

双筒粘度计中的偏心效应*

郭志荣 严宗毅

(廊坊师范专科学校物理系 102819) (北京大学力学系 100871)

(吴望一推荐, 1994年7月18日收到)

摘 要

本文用摄动法研究了双筒式粘度计的内外筒不同心时对于测量粘度所引起的误差, 算例表明, 若问题的特征雷诺数越小 (或者两筒的隙宽越高, 偏心所引起的测量误差越大, 对于通常双筒粘度计的工作参数, 只要两筒的偏心距不超过两筒正常隙宽的1/10, 所引起的测量误差是不大的。

关键词 双筒粘度计 粘度测量 偏心效应 Navier-Stokes方程 摄动法

一、问题的提法

用双筒粘度计来测量不可压缩牛顿流体的粘度时, 外筒 (半径为 R_2^*) 以匀角速度 ω^* 旋转, 通过测量流体作用于静止内筒 (半径为 R_1^*) 上方矩 M^* 的大小, 可以算出流体的粘度 μ^* (正比于 M^*)^[1]。

在开始测量之前, 先要调一粘度计, 使得内外圆筒同心, 但在多次测量之后, 内外筒位置仍可能相对移动, 使得两筒不再同心, 本文的目的就是讨论这一偏心现象对于测量误差的影响。

由于两筒隙宽 $R_2^* - R_1^*$ 远小于筒的高度, 可以忽略其端面效应, 当作平面流动来处理, 服从定常Navier-Stokes方程^[2]

$$\left. \begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{V}^* &= 0 \\ \rho^* (\mathbf{V}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{V}^* &= -\nabla^* p^* + \mu^* \nabla^{*2} \mathbf{V}^* \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 \mathbf{V}^* , p^* 和 ρ^* 分别是流体的速度、压强和密度,

$$\nabla^* = \mathbf{e}_R \frac{\partial}{\partial R^*} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{R^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (\text{见图1})$$

将各量无量纲化 (长度相对于 R_1^* , 速度 \mathbf{V}^* 相对于 $\omega^* R_1^*$, 压强 p^* 相对于 $\rho^* \omega^* R_1^{*2}$), 并用不带* 的量表示无量纲量, 引入流函数 ψ 使:

$$V_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (1.2)$$

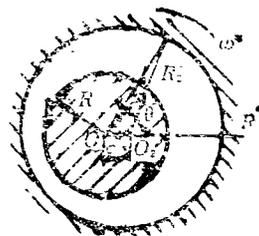


图1 问题的几何形状

* 国家自然科学基金资助课题

则(1.1)式化为:

$$\nabla^2(\nabla^2\psi) - Re(\mathbf{V} \cdot \nabla)\nabla^2\psi = 0 \quad (1.3)$$

式中 Re 是特征雷诺数, ∇^2 是拉普拉斯算子:

$$Re = \omega^* R_1^{*2} / \nu^*, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.4)$$

这里 $\nu^* = \mu^* / \rho^*$ 是流体的运动学粘度. 如图1所示, 记外筒中心 O_2 到内筒中心 O 的距离为 c^* (偏心距), 引入无量纲隙宽 $\beta - 1$ 和偏心度 ε :

$$\beta = R_2^* / R_1^*, \quad \varepsilon = c^* / R_1^* \quad (1.5)$$

可以写出如下边界条件:

$$R=1: \psi=0, \quad \partial\psi/\partial R=0 \quad (1.6)$$

$$R=f(\theta): \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \varepsilon f(\theta) \sin\theta, \quad \frac{\partial\psi}{\partial R} = \beta \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin^2\theta}{\beta^2} \quad (1.7)$$

这里 $R=1$ 和 $R=f(\theta)$ 分别表示内外筒位置,

$$f(\theta) = \varepsilon \cos\theta + \sqrt{\beta^2 - \varepsilon^2} \sin^2\theta \quad (1.8)$$

(1.8)式可由余弦定理($R_2^{*2} = R^2 + c^{*2} - 2R^*c^*\cos\theta$)导出, (1.7)式则由外筒表面流体速度(大小为 $\omega^*R_2^*$, 方向与外筒表面相切)在 R 和 θ 两方向投影导出.

二、摄动法求解

因为在实际测量中, 偏心距总是比隙宽小得多, 即 $\varepsilon \ll \beta - 1 \ll 1$, 我们可以用摄动法求解上述问题. 为此, 首先将 ψ 和 $f(\theta)$ 展为 ε 的幂级数:

$$\psi(R, \theta) = \psi_0(R) + \varepsilon\psi_1(R, \theta) + \varepsilon^2\psi_2(R, \theta) + \dots \quad (2.1)$$

$$f(\theta) = \beta + \varepsilon \cos\theta - \frac{1}{2\beta} \varepsilon^2 \sin^2\theta + \dots \quad (2.2)$$

再用下列展开式把 $R=f(\theta)$ 上的边界条件(1.7)转移到 $R=\beta$ 上:

$$\frac{\partial\psi}{\partial R} \Big|_{R=f(\theta)} = \frac{\partial\psi}{\partial R} \Big|_{R=\beta} + \frac{\partial^2\psi}{\partial R^2} \Big|_{R=\beta} [f(\theta) - \beta] + \dots \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \Big|_{R=f(\theta)} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \Big|_{R=\beta} + \frac{\partial^2\psi}{\partial R\partial\theta} \Big|_{R=\beta} [f(\theta) - \beta] + \dots \quad (2.4)$$

将上述各式代入(1.3)、(1.6)和(1.7)式, 得到零级近似所满足的方程和边界条件为:

$$\frac{d^4\psi_0}{dR^4} + \frac{2}{R} \frac{d^3\psi_0}{dR^3} - \frac{1}{R^2} \frac{d^2\psi_0}{dR^2} + \frac{1}{R^2} \frac{d\psi_0}{dR} = 0$$

$$R=1: \psi_0=0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial R}=0$$

$$R=\beta: \frac{\partial\psi_0}{\partial\theta}=0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial R}=\beta$$

零级近似相当于 $\varepsilon=0$, 即无偏心的情况, 其解为:

$$\psi_0(R) = \frac{\beta^2}{2(\beta^2 - 1)} (R^2 - 1 - 2\ln R) \quad (2.5)$$

一级近似($O(\varepsilon)$ 级项)所满足的方程和边界条件是

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial R^4} + \frac{2}{R} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R^3} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial R^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{R^3} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial R \partial \theta^2} \\ & + \frac{4}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^4} - Re \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2 \partial \theta} + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3}\right) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R \partial \theta} \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^3}\right) \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \theta^3} \right] = 0 \\ R=1: & \psi_1=0, \quad \partial \psi_1 / \partial R=0 \\ R=\beta: & \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \beta \sin \theta, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial R} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \cos \theta \end{aligned} \right.$$

根据边界条件, 可设:

$$\psi_1(R, \theta) = X(R) \cos \theta + Y(R) \sin \theta \quad (2.6)$$

将此式代入一级近似的方程和边界条件可得:

$$\begin{aligned} X'''' + \frac{2}{R} X''' - \frac{3}{R^2} X'' + \frac{3}{R^3} X' - \frac{3}{R^4} X - Re \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) Y'' \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3}\right) Y' - \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^4}\right) Y \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} Y'''' + \frac{2}{R} Y''' - \frac{3}{R^2} Y'' + \frac{3}{R^3} Y' - \frac{3}{R^4} Y + Re \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \left[\left(1 - \frac{1}{R^2}\right) X'' \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R^3}\right) X' - \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^4}\right) X \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$R=1: X=0, Y=0, X'=0, Y'=0 \quad (2.9)$$

$$R=\beta: X=-\beta, Y=0, X'=(1+\beta^2)/(1-\beta^2), Y'=0 \quad (2.10)$$

(2.7)~(2.10) 式是常微分方程组的线性两点边值问题。为了求得这一边值问题的解, 我们仿照本文第二作者与其合作者以前提出的算法^[3], 先解四个初值问题 (它们的解分别记作 $X_i, Y_i, i=1, 2, 3, 4$), 每个初值问题都求解常微分方程组 (2.7) 和 (2.8), 初始条件包含 (2.9) 式, 并在 $R=1$ 轮流令 X'', Y'', X''', Y''' 之一等于 1, 而令其余三个量为零, 用四阶 Runge-Kutta 法数值求得 $1 < R < \beta$ 区间的解。原来的边值问题的解可写作 X_i, Y_i 的线性组合:

$$X(R) = C_1 X_1(R) + C_2 X_2(R) + C_3 X_3(R) + C_4 X_4(R)$$

$$Y(R) = C_1 Y_1(R) + C_2 Y_2(R) + C_3 Y_3(R) + C_4 Y_4(R)$$

这样的 X, Y 及其导数 X', Y' 应该在 $R=\beta$ 处满足边界条件 (2.10), 由此得到 4 个线性代数方程, 用来确定未知的常数 C_1, C_2, C_3, C_4 。将所得结果代回 (2.6) 式, 即得一级近似解 $\psi_1(R, \theta)$ 。

二级近似在 $R=\beta$ 处的边界条件是:

$$R=\beta:$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} = [1 + X'(\beta)] \sin \theta \cos \theta - Y'(\beta) \cos^2 \theta$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial R} = \frac{1}{\beta(\beta^2 - 1)} - X''(\beta) \cos^2 \theta - Y''(\beta) \sin \theta \cos \theta$$

由此可设二级近似解形如:

$$\psi_2(R, \theta) = U(R) + V(R) \cos 2\theta + W(R) \sin 2\theta \quad (2.11)$$

并导出如下常微分方程组的两点边值问题:

$$\begin{aligned}
 & U'''' + \frac{2}{R} U'''' + \left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} - Re \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) \right] U'' \\
 & - \left[Re \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) + \frac{1}{R^3} \right] U' + \left[Re \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \left(\frac{1}{R^4} - \frac{1}{R^2} \right) + \frac{5}{R^4} \right] U \\
 & = \frac{Re}{2R} \left[XY'''' + X'Y'' - X''Y' - X'''Y + \frac{1}{R} (XY'' - X''Y) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R^2} (X'Y - XY') \right] \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & V'''' + \frac{2}{R} V'''' - \left(\frac{9}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) V'' + \frac{8}{R^3} V' - 2Re \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) (W'' + W') \\
 & + 8Re \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \left(-\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^4} \right) W \\
 & = -\frac{Re}{2R} \left[XY'''' - X'Y'' - X''Y' + X'''Y' + \frac{1}{R} (XY'' - 2X'Y' + X''Y) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{R^2} (X'Y + XY') + \frac{4}{R^3} XY \right] \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & W'''' + \frac{2}{R} W'''' - \left(\frac{9}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) W'' + \frac{8}{R^3} W' \\
 & + Re \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \left[2 \left(1 - \frac{1}{R^2} \right) (V'' + V') - 8 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^4} \right) V \right] \\
 & = \frac{Re}{2R} \left[XX'''' - YY'''' - X'X'' + Y'Y'' + \frac{1}{R} (XX'' - YY'' - X'^2 + Y'^2) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{R^2} (YY' - XX') + \frac{2}{R^3} (X^2 - Y^2) \right] \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$R=1: U=0, V=0, W=0, U'=0, V'=0, W'=0 \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned}
 R=\beta: U=0, V &= \frac{1}{2(\beta^2-1)}, W=0 \\
 U' &= \frac{1}{\beta(\beta^2-1)} - \frac{1}{2} X'', V' = -\frac{1}{2} X'' \\
 W' &= -\frac{1}{2} Y''
 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

(2.12)~(2.14)式是关于 U, V, W 的线性非齐次常微分方程组, 它的解可以写成如下形式:

$$U(R) = \sum_{i=1}^6 D_i U_i(R) + U_0(R)$$

$$V(R) = \sum_{i=1}^6 D_i V_i(R) + V_0(R)$$

$$W(R) = \sum_{i=1}^6 D_i W_i(R) + W_0(R)$$

其中 $U_i, V_i, W_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 是相应齐次方程组 (即 (2.12)~(2.14) 右端项为零的情形) 的 6 个线性无关解 (可仿照上文求 X, Y 的方法数值求解 6 个初值问题而得), 而 U_0, V_0, W_0 是原来非齐次方程组的一个特解 (例如, 可令 $R=1$ 处满足 (2.15) 式及 $U''=V''=W''=U'''=V'''=W'''=0$ 数值求解初值问题而得), 系数 $D_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 可由 $R=\beta$ 的边界条件 (2.16) 所给出的 6 个线性代数方程组求出. 在求 U_0, V_0, W_0 时, (2.12)~(2.14) 式右端的 X, Y 取自一级近似结果 (事实上, 可重新数值求解 (2.7)、(2.8) 式的初值问题而方便地求得, 其初始条件是 (2.9) 式和 $R=1: X''=C_1, Y''=C_2, X'''=C_3, Y'''=C_4$, 容易验证, 这样算出的 X, Y 必然满足 $R=\beta$ 上的边界条件 (2.10) 式).

将这样求得的 U, V, W 代入 (2.11) 可得 $\psi_2(R, \theta)$, 再将 (2.5)、(2.6)、(2.11) 代入 (2.1) 式可得 $\psi(R, \theta)$, 再由 (1.2) 式可求将速度分量 V_R, V_θ .

内筒表面的切应力为:

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{R} \right)_{R=1} \\ &= \frac{2\beta^2}{\beta^2-1} + \varepsilon [X''(1) \cos \theta + Y''(1) \sin \theta] \\ &\quad + \varepsilon^2 [U''(1) + V''(1) \cos 2\theta + W''(1) \sin 2\theta] + \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

流体作用在单位高度内筒上的力矩为:

$$M = \int_0^{2\pi} \tau d\theta = 2\pi \left[\frac{2\beta^2}{\beta^2-1} + \varepsilon^2 U''(1) + \dots \right] \quad (2.18)$$

定义无偏心 ($\varepsilon=0$) 时相应的力矩为 M_0 :

$$M_0 = \frac{4\pi\beta^2}{\beta^2-1} \quad (2.19)$$

则可得:

$$\frac{M}{M_0} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) U''(1) + O(\varepsilon^3) \quad (2.20)$$

注意: 双筒粘度计测出流体的粘度 μ^* 正比于 M , 因此 M/M_0 也表示就两筒偏心与同心时所测得的流体粘度之比, $M/M_0 - 1$ 也就是偏心效应引起粘度测量的相对误差.

由 (2.20) 式看出, 偏心所引起的测量误差是二级效应 (即 $O(\varepsilon^2)$ 量级), 这是因为 $O(\varepsilon)$ 级项所引起 τ 的变化在对 θ 角积分时互相抵消的缘故.

三、结果与讨论

在这一问题中有三个无量纲参数: 特征雷诺数 Re , 无偏心时的相对隙宽 $\beta-1$ 和偏心度 ε (其定义分别见 (1.4) 和 (1.5) 式). 以 Low Shear 30 (MS-LS 2T-2T 型) 双筒粘度计为例, $R_1^* = 5.5 \text{ mm}$, $R_2^* = 6.0 \text{ mm}$, 因而 $\beta-1 = 1/11$. 如果待测流体是水 (ν^* 约为 $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), 外筒取最大转速约为 80 r/min (相当于 $\omega^* = 8.38 \text{ s}^{-1}$, 切变率约为 $\dot{\gamma} = 100 \text{ s}^{-1}$), 则 $Re = 252$. 考虑到双筒粘度计有多种类型, 下面的算例所取的参数范围为 $Re = 0 \sim 2000$, $\beta-1 = 1/22, 1/11$ 和 $1/5.5$, $\varepsilon/(\beta-1) = 0 \sim 0.2$, 所有计算都进行到二级近似.

图 2 画出了不同 Re 下流体沿圆周方向的典型速度剖面 $V_\theta(R)$. 对比图 1 可知, $\theta = 0^\circ$ 和 180°

分别对应于有偏心时隙宽最大和最小之处，因而其平均速度分别低于或高于 $\theta=90^\circ$ 处的值，而且剖面偏离线性； $\theta=90^\circ$ 的速度剖面受偏心影响最小，接近线性。 $Re=0$ 和 $Re=2000$ 的速度剖面大体相似，但内筒附近的斜率（切变率 $\dot{\gamma}$ ）有些不同。

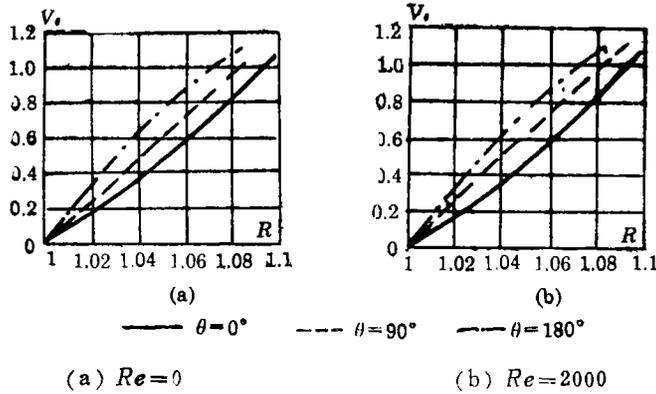


图2 不同 Re 下的流体沿圆周方向的速度剖面($\beta-1=1/11$, $\epsilon/(\beta-1)=0.1$)

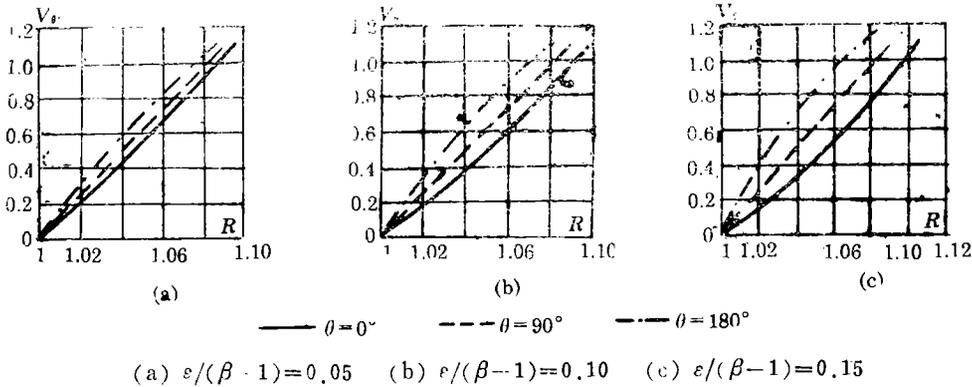


图3 不同偏心度 ϵ 之下流体沿圆周方向的速度剖面($Re=1000$, $\beta-1=1/11$)

计算表明对所取的参数范围，流体的径向速度 $V_R(R, \theta)$ 始终很小，可以忽略不计（图中未画出）。

图3画出了不同偏心度 ϵ 之下的典型速度剖面 $V_\theta(R)$ ，可以看出，当 Re 和 $\beta-1$ 不变时，随着 ϵ 增大，不同 θ 处的 $V_\theta(R)$ 彼此相差可大（ $\epsilon=0$ 时 V_θ 与 θ 无关）。

图4考察 $\beta-1$ （无偏心时的相对隙宽）对速度剖面 $V_\theta(R)$ 的影响。可以看出，当 Re 和

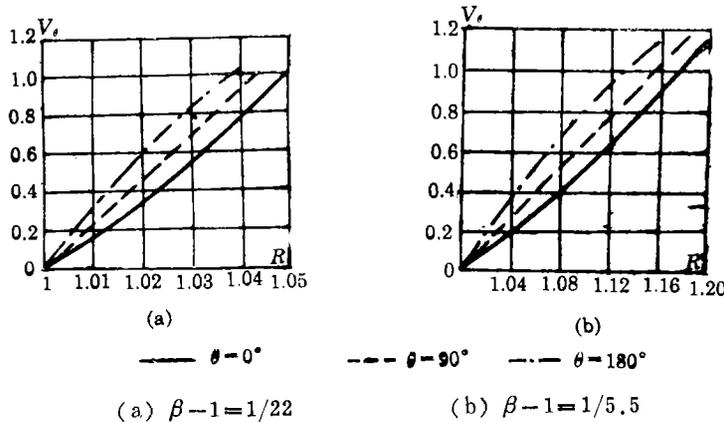


图4 不同 $\beta-1$ 下的流体沿圆周方向的速度剖面($Re=1000$, $\epsilon/(\beta-1)=0.1$)

$\epsilon/(\beta-1)$ 不变时, 增大 $\beta-1$ 会使不同 θ 处的 $V_\theta(R)$ 差别加大.

图5画出了当 $\beta-1$ 不变时, 在不同 Re 之下粘度测量误差 $(M/M_0) - 1$ 随偏心度 ϵ 的变化. 可以看出, 在同一偏心度之下, Re 越低, 测量误差越大. 对于一个选定的粘度计来说, 在低切变率下进行测量时角速度 ω^* 较小, 因而 Re 较低. 一般测量全血的粘度时, 总是先在较高切变率下测量, 再逐渐降低切变率 (这样可减少红细胞沉淀). 如果只在测量开始前调整一次内外筒同心, 就难免在以后进行低切变率测量时出现内外筒偏心, 而这时由于 Re 较低, 测量误差会加大. 为了保证测量的精确度, 建议在进行多次测量时, 特别是在低切变率下进行测量时, 中间至少再调整一次内外筒同心. 此外, 对于粘度 μ^* 较大的流体, Re 也较低, 更要注意保持内外筒同心.

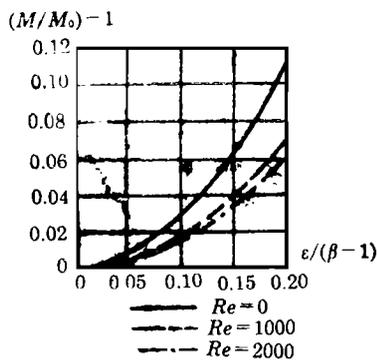


图5 $\beta-1=1/11$ 时偏心所引起
测量粘度的相对误差

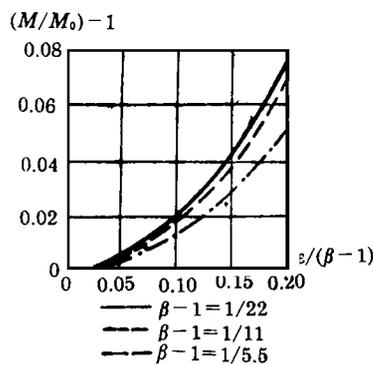


图6 $Re=1000$ 时偏心所引起
测量粘度的相对误差

图6画的是在同一 Re 之下, $\beta-1$ (无偏心时相对隙宽) 不同时, 测量粘度相对误差 $(M/M_0) - 1$ 的变化. 显然, 当 $\epsilon/(\beta-1)$ 相同时, $\beta-1$ 越小所引起的误差就越大, 这可由图4的速度剖面来说明. 图4中, $\beta-1=1/22$ 时的流体速度剖面在内筒表面附近变化得比 $\beta-1=1/5.5$ 时剧烈些, 因而引起所测力矩 M 偏离 M_0 较多.

由图5和图6看出, 对于通常双筒粘度计工作的参数范围, 只要两筒的偏心距 c^* 不超过两筒正常隙宽 $R_2^* - R_1^*$ 的 $1/10$, 测量粘度的误差就不会大于3%, 因而可以忽略不计. 但是如果偏心太大, 就会引起显著误差, 特别是当 Re 较低或者正常隙宽很窄时.

本文的摄动理论到二级近似为止, 只适用于 $\epsilon/(\beta-1)$ 大约小于0.2的情形. 因为在实际测量中, 测量前都要调整两筒同心, 所以, 偏心不致于太大, 无需再求摄动理论的高级近似.

参 考 文 献

- [1] 严宗毅、魏茂元、于天文, 《血液流变学——基础、检测、应用》, 黑龙江科学技术出版社 (1993), 13.
- [2] 吴望一, 《流体力学》, 下册, 北京大学出版社 (1983), 213.
- [3] 李平、严宗毅、庄逢源, 双筒粘度计中牛顿流体的振荡解, 应用数学和力学, 14(6) (1993), 535—541.

The Eccentric Effect of a Coaxial Viscometer

Guo Zhi-rong

(Department of Physics, Langfang Normal College for Professional Training, Langfang, Hebei, 102849)

Yan Zong-yi

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing, 100871)

Abstract

This paper studies the effect of the eccentricity between the inner bob and the outer cup in a coaxial viscometer on the measurements of the viscosity by using a perturbation scheme. Our numerical examples demonstrate that the error incurred by the eccentricity would become larger as the characteristic Reynolds number decreases or as the gap width between the bob and the cup gets narrower. However, such errors may not be significant if the eccentric distance is not larger than 1/10 of the gap width, for the usual working range of a coaxial viscometer.

Key words coaxial viscometer, the measurements of the viscosity, the eccentric effect, Navier-Stokes equations, the perturbation technique