应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不用Kirchhoff-Love假定的三维弹性板近似理论及其边界条件*

钱 伟 长

（上海大学，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072）

摘 要

经典弹性板理论采用了著名的克希霍夫(Kirchhoff)[1]-拉甫(Love)[2]的经典基本假定，在卡氏张量坐标$x_i(i=0,1,2)$中，这些基本假定是：(1) 略去横向即x_0轴向正应变，即假定$e_{00}=0$；(2) 略去横向剪应变，即假定$e_{0\alpha}=0$，其中$\alpha=1,2$；(3) 略去横向正应力，即假定$\sigma_{00}=0$．人们利用这些假定，建立了应变位移关系和应力位移关系，再利用应力平衡的三维方程，通过跨厚度的积分，找到弹性板中面上的各待定量所应满足的经典理论方程．前文[3,4,5]，曾在不用克希霍夫-拉甫经典假定的弹性板三维理论中建立了一种近似理论，但并未证明这种近似理论的唯一性，也没有研究相应的近似边界条件．本文将用三维弹性体的广义变分原理[6]研究相同的问题．本文通过变分驻值条件，求得唯一的近似方程和相应的近似边界条件．本文详细研究了一级近似的平衡方程和近似边界条件．

关键词 三维弹性板 克希霍夫-拉甫假定 卡氏张量坐标

一、三维的弹性板理论及其边界条件

设$x_i(i=0,1,2)$为弹性板中各点的卡氏坐标，其中$x_\alpha(\alpha=1,2)$为弹性板中面上的一对正交坐标轴Ox_α的坐标，x_0为垂直于中面的坐标轴Ox_0的坐标(图1)．在下文中我们用小写英文字母角标$i,j,k,l\ldots$等代表(0,1,2)三个三维角标，而用小写希腊字母角标$\alpha,\beta,\gamma,\omega\ldots$等代表

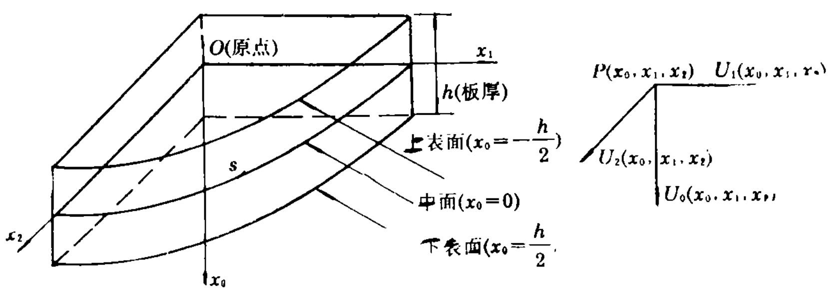

图1 弹性板的中面卡氏坐标(x_i)，以及板内任意点$P(x_0,x_1,x_2)$的变形位移矢量U_i

* 1994年5月15日收到．

(1,2)两个平面角标．用σ_{ij}代表应力张量，用e_{ij}代表应变张量，它们都是对称张量．用U_i代表变形的位移矢量，它们都是x_i的场函数，并在板内各任意x_i上满足下列关系：

1．**应变位移关系**（限于小应变或小位移）

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(U_{i,j}+U_{j,i}) \qquad (i,j=0,1,2) \tag{1.1}$$

其中$(\cdots)_{,i}$代表$(\cdots)$对x_i的导数，即

$$(\cdots)_{,i}=\frac{\partial(\cdots)}{\partial x_i} \qquad (i=0,1,2) \tag{1.2}$$

在下文，我们对任一式的自由角标i而言，将不再重复（$i=0,1,2$）的说明，只要某式有自由角标，即表示该式在该自由角标取值0,1,2时分别代表三个相似的表达式。

2．**应力应变关系**

$$Ee_{ij}=(1+\nu)\sigma_{ij}-\nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \qquad (i,j=0,1,2) \tag{1.3}$$

其中 i,j都是自由角标，σ_{kk}中的k是哑标，σ_{kk}代表k逐一取值0,1,2时所得三项 $\sigma_{00},\sigma_{11},\sigma_{22}$的代数和，在下文，凡张量项的角标中有两个相同时，都代表该张量项逐一取值0,1,2 时所得三项的代数和，这一对角标不论用kk表示，或用ii表示都是三项相加，和 k 或i表达无关，所以称为哑标，于是，我们有

$$e_{kk}=e_{ii}=e_{00}+e_{11}+e_{22},\quad \sigma_{kk}=\sigma_{ii}=\sigma_{00}+\sigma_{11}+\sigma_{22} \tag{1.4}$$

$$U_{k,k}=U_{i,i}=\frac{\partial U_0}{\partial x_0}+\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2}$$

另外，δ_{ij}为克氏δ符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{1.5}$$

(1.3)式中E为杨氏模量，ν为泊桑比。

(1.3)式也可以写成应变应力关系

$$\sigma_{ij}=\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\{(1-\nu_1)e_{ij}+\nu_1 e_{kk}\delta_{ij}\} \tag{1.6}$$

其中 E_1和ν_1分别为平面应变问题中的折合杨氏模量和折合泊松比，它们分别是

$$E_1=\frac{E}{1-\nu^2},\quad \nu_1=\frac{\nu}{1-\nu} \tag{1.7}$$

而且还有关系

$$\frac{E}{1+\nu}=\frac{E_1}{1+\nu_1} \tag{1.8}$$

3．**应力平衡方程**

$$\sigma_{ij,j}=-\rho\bar{f}_i \tag{1.9}$$

其中 ρ为弹性材料的重量密度，$\bar{f}_i$为单位重量上所受的体积力矢量。

4．**板上下表面($x_0=\mp h/2$)上的表面受力状态**

$$\sigma_{00}=\bar{p}_+ \text{（在}x_0=h/2\text{上，}\bar{p}_+>0\text{为拉力，}\bar{p}_+<0\text{为压力）} \tag{1.10a}$$

$$\sigma_{00}=\bar{p}_- \text{（在}x_0=-h/2\text{上，}\bar{p}_->0\text{为拉力，}\bar{p}_-<0\text{为压力）} \tag{1.10b}$$

$$\sigma_{0\alpha}=0\ (\text{在}x_0=\mp h/2\text{上}，\alpha=1\text{或}2) \tag{1.10c}$$

上式的自由角标α代表1，2两值，$\bar{p}_+$，$\bar{p}_-$为表面所受外向拉力，而外加剪力在表面上都等于零，这对大多数受力状态而言，都是满足的。当然，本文推导也很易推广到表面上外加剪力不等于零的情况。

5. 板的边界面上的边界条件

我们将假定板的边界面一般都垂直于板的中面，在边界面上，称边界位移已给的区域为Ω_u，称边界外力已给的区域为Ω_σ， 于是有边界条件：

$$U_i=\bar{U}_i\qquad(\text{在}\Omega_u\text{上}) \tag{1.11a}$$

$$\sigma_{i\alpha}n_\alpha=\bar{\sigma}_{ni}\qquad(\text{在}\Omega_\sigma\text{上}) \tag{1.11b}$$

其中 $\Omega_u+\Omega_\sigma$等于边界面的总面积Ω，即

$$\Omega_u+\Omega_\sigma=\Omega \tag{1.12}$$

n_α为边界面外向法线在二维平面内的方向余弦。Ω_u和Ω_σ可以有各种分布情况，有时可以很复杂，图2绘出了一些简单情况。

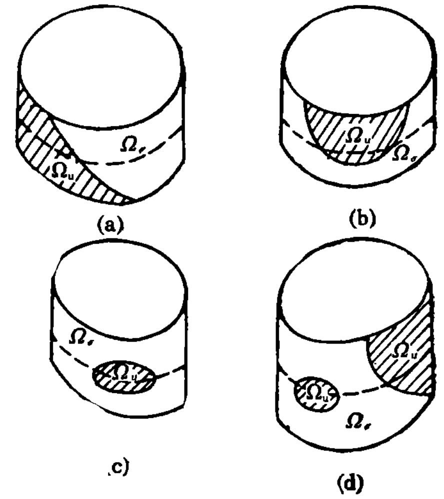

图2 边界面上各种Ω_u和Ω_σ的分布情况举例

在以中面边界上的单元弧段ds为基础的边界面单元hds上，一般是由位移已给的几个层段和外力已给的几个层段相间组成，我们将称位移已给的层段为

$$h_u^{(2j-1)}<x_0<h_u^{(2j)}\qquad(j=1,2,\cdots,J) \tag{1.13}$$

而称外力已给的层段为

$$h_\sigma^{(2k-1)}<x_0<h_\sigma^{(2k)}\qquad(k=1,2,\cdots,K) \tag{1.14}$$

我们在下文将采用下列各简化积分符号

$$\int_h(\cdots)dx_0=\int_{-h/2}^{h/2}(\cdots)dx_0 \tag{1.15a}$$

$$\int_{h_u}(\cdots)dx_0=\left\{\int_{h_u^{(1)}}^{h_u^{(2)}}+\int_{h_u^{(3)}}^{h_u^{(4)}}+\cdots+\int_{h_u^{(2j-1)}}^{h_u^{(2j)}}\right\}(\cdots)dx_0 \tag{1.15b}$$

$$\int_{h_\sigma}(\cdots)dx_0=\left\{\int_{h_\sigma^{(1)}}^{h_\sigma^{(2)}}+\int_{h_\sigma^{(3)}}^{h_\sigma^{(4)}}+\cdots+\int_{h_\sigma^{(2k-1)}}^{h_\sigma^{(2k)}}\right\}(\cdots)dx_0 \tag{1.15c}$$

由于边界面单元hds是位移已给的层段和外力已给的层段相间组成的，所以我们有

$$\int_h(\cdots)dx_0=\int_{h_u}(\cdots)dx_0+\int_{h_\sigma}(\cdots)dx_0 \tag{1.16}$$

我们在下文将称中面边界线的整个弧线域为s，称凡有外力已给层段的边界弧线域为s_σ，而称凡有位移已给层段的边界弧线域为s_u，于是，明显地可以看到

$$s\leqslant s_u+s_\sigma\leqslant 2s \tag{1.17}$$

当中面全部边界线上的所有边界面单元hds中既有外力已给的层段又有位移已给的层段时，s_u，s_σ之和为$2s$；当中面边界线上有外力已给的弧段和有位移已给的弧段完全分开时，s_u，s_σ之和为s。

二、弹性板在边界变形条件和边界力作用下平衡时的广义变分原理

三维弹性体在边界变形和边界外力作用下平衡问题的广义变分原理，业已由作者用拉格朗日乘子法研究过[6]。

三维弹性体的应变能密度ε为

$$\varepsilon=\frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)}\{(1-\nu_1)e_{kl}e_{kl}+\nu_1 e_{kk}e_{ll}\} \tag{2.1}$$

弹性板在上下表面力(1.10a,b,c)，体积力$\bar{f}_i$，和边界面变形位移已给（1.11a）和边界面外力已给(1.11b)的约束条件下的广义变分原理可以写成

$$\delta\Pi=0 \tag{2.2}$$

其中Π为广义变分原理的泛函：

$$\Pi=\iiint_\tau \varepsilon dx_0dx_1dx_2-\iiint_\tau \bar{f}_i\rho U_i dx_0dx_1dx_2-\iint_{\Omega_0}(\bar{p}_+U_0^+-\bar{p}_-U_0^-)dx_1dx_2$$

$$-\iint_{\Omega_u}(U_i-\bar{U}_i)(\sigma_{i\alpha}n_\alpha)dsdx_0-\iint_{\Omega_\sigma}\sigma_{ni}U_i dsdx_0 \tag{2.3}$$

其中 τ为整个弹性体的体积，Ω_0弹性板上下表面的总面积，也是板的中面总面积，Ω_u和Ω_σ分别代表边界面位移已给和外力已给的边界面积，s为弹性板中面的边界弧长，n_α为 边界面外向法线在二维平面内的方向余弦，U_0^+,U_0^-为上下表面的垂直位移，$\bar{f}_i,\bar{p}_+,\ \bar{p}_-,\ \bar{U}_i,\bar{\sigma}_{ni}$ 都是在变分中保持不变的已给不变量．变分时，e_{ij},U_i,σ_{ij}服从应变位移关系(1.1)和应力应变关系(1.6)．

通过变分，我们有

$$\delta\Pi=\iiint_\tau \delta\varepsilon\ dx_0dx_1dx_2-\iiint_\tau \bar{f}_i\rho\delta U_i dx_0dx_1dx_2-\iint_{\Omega_0}(\bar{p}_+\delta U_0^+-\bar{p}_-\delta U_0^-)dx_1dx_2$$

$$-\iint_{\Omega_u}(U_i-\bar{U}_i)n_\alpha\delta\sigma_{i\alpha}dx_0ds-\iint_{\Omega_\sigma}\delta U_i n_\alpha\sigma_{\alpha i}dx_0ds-\iint_{\Omega_\sigma}\bar{\sigma}_{ni}\delta U_i dsdx_0 \tag{2.4}$$

其中，在利用了(1.6)式后，得

$$\iiint_\tau \delta\varepsilon\ dx_0dx_1dx_2=\iiint_\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial e_{ij}}\ \delta e_{ij}dx_0dx_1dx_2=\iiint_\tau\sigma_{ij}\delta e_{ij}dx_0dx_1dx_2 \tag{2.5}$$

在进一步利用了(1.1)式后，上式可以写成

$$\iiint_\tau \delta\varepsilon\ dx_0dx_1dx_2=\iiint_\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial e_{ij}}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta U_j}{\partial x_i}\right)dx_0dx_1dx_2 \tag{2.6a}$$

由于$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，上式进一步简化

$$\iiint_\tau \delta\varepsilon\ dx_0dx_1dx_2=\iiint_\tau\sigma_{ij}\frac{\partial\delta U_i}{\partial x_j}dx_0dx_1dx_2$$

$$=\iiint_\tau\left\{\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\delta U_\alpha}{\partial x_\beta}+\sigma_{\alpha0}\frac{\partial\delta U_\alpha}{\partial x_0}+\sigma_{0\alpha}\frac{\partial\delta U_0}{\partial x_\alpha}+\sigma_{00}\frac{\partial\delta U_0}{\partial x_0}\right\}dx_0dx_1dx_2 \tag{2.6b}$$

用分部积分，我们证明

$$\iiint_\tau\sigma_{i0}\frac{\partial\delta U_i}{\partial x_0}dx_0dx_1dx_2=\iint_{\Omega_0}[\sigma_{i0}^+\delta U_i^+-\sigma_{i0}^-\delta U_i^-]dx_1dx_2$$

$$-\iiint \sigma_{i0,0}\delta U_0 dx_0 dx_1 dx_2 \tag{2.7a}$$

在利用了格林公式后，我们还可以证明

$$\iiint_\tau \sigma_{i\beta}\frac{\partial \delta U_1}{\partial x_\beta}dx_0 dx_1 dx_2 = \iint_\Omega (\sigma_{i\beta}n_\beta)\delta U_i dx_0 ds - \iiint_\tau \sigma_{i\beta,\beta}\delta U_i dx_0 dx_1 dx_2 \tag{2.7b}$$

于是(2.6b)式可以化简为

$$\iiint_\tau \delta e\ dx_0 dx_1 dx_2 = -\iiint_\tau \sigma_{ij,j}\delta U_i dx_0 dx_1\ dx_2 + \iint_{\Omega_0}\{\sigma^+_{i0}\delta U^+_i - \sigma^-_{i0}\delta U^-_i)dx_1 dx_2$$

$$+\iint_\Omega \sigma_{i\alpha}n_\alpha \delta U_i dx_0 ds \tag{2.8}$$

代入(2.4)式，整理后得

$$\delta\Pi = -\iiint_\tau (\sigma_{ij,j}+\bar{f}_i\rho)\delta U_i dx_0 dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega_0}\{(\sigma^+_{00}-\bar{p}_+)\delta U^+_0 - (\sigma^+_{00}-\bar{p}_-)\delta U^-_0\}dx_1 dx_2$$

$$+\iint_{\Omega_0}(\sigma^+_{\alpha 0}\delta U^+_\alpha - \sigma^-_{\alpha 0}\delta U^-_\alpha)dx_1 dx_2 - \iint\{(U_i-\bar{U}_i)n_\alpha\delta\sigma_{i\alpha}\}dx_0 ds$$

$$-\iint_{\Omega_\sigma}[\bar{\sigma}_{ni}-\sigma_{i\alpha}n_\alpha]\delta U_i dx_0 ds \tag{2.9}$$

因为Π为驻值时，δU_i在τ中，以及δU_i，$\delta\sigma_{ij}$等在上下表面Ω_0上和边界面Ω_u，Ω_σ上的变分都是独立的。所以，从(2.9)式驻值条件中给出应力平衡方程(1.9)式，上下表面受力条件(1.10 a,b,c)，边界面的边界位移已给条件（在Ω_u上）(1.11a)和边界外力已给条件(1.11b)（在Ω_σ上）。在证明中，我们利用了应变位移关系(1.1)和应力应变关系(1.6)。这就证明了(2.3)确为本问题的泛函。

不三、最一般的不用克希霍夫-拉甫假定的弹性板理论 (e_{00}, σ_{00}, $e_{0\alpha}\neq 0$) 和一级近似理论

我们在前文[3,4,5]中业已指出，在不用克希霍夫-拉甫假定的条件下，e_{00}，$e_{0\alpha}$既然不等于零，则可以用x_0的幂级数来表示，一般可以设

$$e_{00}=\sum_{k=0}^{\infty}A_{(k}x_0^k \tag{3.1a}$$

$$e_{\alpha 0}=\sum_{k=1}^{\infty}(S_{(2k\ \alpha}+x_0 S_{(2k+1)\alpha})\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)x_0^{2k-2} \tag{3.1b}$$

其中 A_k，$S_{(2k\ \alpha}$，$S_{(2k+1\ \alpha}$等都是(x_1,x_2)的待定场函数，通过(1.1)式的e_{00}表达式对x_0积分，得U_0的幂级数表达式，把它代入(1.1)式的$e_{0\alpha}$的表达式，再对x_0积分，得U_α的幂级数表达式，其结果为

$$U_0(x_0,x_1,x_2)=u_0(x_1,x_2)+\sum_{k=0}\frac{1}{k+1}A_{(k)}x_0^{k+1} \tag{3.2a}$$

$$U_\alpha(x_0,x_1,x_2)=u_\alpha(x_1,x_2)-u_{0,\alpha}x_0-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(k+2)}A_{(k),\alpha}x_0^{k+2}$$

$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2k-1}\left[\frac{1}{4}h^2-\frac{2k-1}{2k+1}x_0^2\right]x_0^{2k-1}S_{(2k)\alpha}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{4}h^2-\frac{2k}{2k+2}x_0^2\right]x_0^{2k}S_{(2k+1)\alpha}\right\} \tag{3.2b}$$

把它们代入(1.1)就可以计算$e_{\alpha\beta}$各分量的表达式，再用(1.6)就可以计算各应力分量的表达式，其中$u_i(x_1,x_2)$实际上是中面各点的变形位移分量；它们和$A_{(k)},S_{(2k)\alpha},S_{(2k+1)\alpha}$都是$x_1$，$x_2$的待定函数，它们所应满足的微分方程和边界条件，都可以通过泛函Π的变分驻值条件来决定。

为了求得合理的近似理论，我们可以近似地从幂级(1.1a,b)中取少数项来进行近似运算。本文将从e_{0i}中的幂级数(3.1a,b)中各取一项的近似理论称为一级近似理论，称各取两项的近似理论为二级近似理论。一级近似理论有$u_i,A_{(0)},S_{(2)\alpha}$等6个待定量，而二级近似理论则有$u_i,A_{(0)},A_{(1)},S_{(2)\alpha},S_{(3)\alpha}$等9个待定量，依此类推。

在一级近似理论中，我们将取e_{0i}的近似表达式如下：

$$e_{00}=A_{(0)},\quad e_{0\alpha}=\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)S_{(2)\alpha} \tag{3.3}$$

而有关的U_i的一级近似表达式可以写成

$$U_0=u_0+A_{(0)}x_0 \tag{3.4a}$$

$$U_\alpha=u_\alpha-u_{0,\alpha}x_0-\frac{1}{2}A_{(0),\alpha}x_0^2+2\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0S_{(2)\alpha} \tag{3.4b}$$

应变分量除(3.3)外，其它分量可以写成

$$e_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})-u_{0,\alpha\beta}x_0-\frac{1}{2}A_{(0),\alpha\beta}x_0^2$$

$$+\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0(S_{(2)\alpha,\beta}+S_{(2)\beta,\alpha}) \tag{3.5}$$

于是，应力分量(1.6)式可以写成：

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})+\nu_1u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}-[(1-\nu_1)u_{0,\alpha\beta}\right.$$

$$+\nu_1u_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]x_0+\nu_1A_{(0)}\delta_{\alpha\beta}-\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)A_{(0),\alpha\beta}+\nu_1A_{(0),\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]x_0^2$$

$$\left.+\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0[(1-\nu_1)(S_{(2)\alpha,\beta}+S_{(2)\beta,\alpha})+2\nu_1S_{(2)\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}]\right\} \tag{3.6a}$$

$$\sigma_{0\alpha}=\frac{E_1}{1+\nu_1}\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)S_{(2)\alpha} \tag{3.6b}$$

$$\sigma_{00}=\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left\{\nu_1u_{\alpha,\alpha}-\nu_1\nabla^2u_0x_0+A_{(0)}-\frac{1}{2}\nu_1\nabla^2A_{(0)}x_0^2\right.$$

$$\left.+2\nu_1\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0S_{(2)\alpha,\alpha}\right\} \tag{3.6c}$$

把(3.4a,b)中的U_i和(3.6a,b,c)中的应力分量σ_{ij}代入(2.9)式δU_i，$\delta\sigma_{ij}$中，并对x_0进行积分。在Ω_0中，我们可以利用格林公式进行简化，如以$P_\alpha(x_1,x_2)$为例，有

$$\iint_{\Omega_0} P_{\alpha,\alpha}dx_1dx_2=\int_s P_\alpha n_\alpha ds \tag{3.7}$$

(2.9)式可以化为用δu_i，$\delta A_{(0)}$，$\delta S_{(2)\alpha}$等变分所表示的变分式，$\delta\Pi$的驻值条件可以分开为$\delta\Pi u_\alpha$，$\delta\Pi u_0$，$\delta\Pi A_{(0)}$，$\delta\Pi S_{(2)\alpha}$四部份分别为驻值的条件。

现在以δu_α的有关各项之和为例（即$\delta\Pi u_\alpha$）从(2.9)式我们有

$$\begin{aligned}\Pi u_\alpha= &-\iiint_\tau(\sigma_{\alpha i,i}+\bar{f}_\alpha\rho)\delta u_\alpha dx_0dx_1dx_2+\iint_{\Omega_0}(\sigma^+_{\alpha 0}-\sigma^-_{\alpha 0})\delta u_\alpha dx_1dx_2\\ &-\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\iint_{\Omega_u}(U_\beta-\bar{U}_\beta)n_\alpha\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(\delta u_{\alpha,\beta}+\delta u_{\beta,\alpha})+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta u_{\gamma,\gamma}\right\}dx_0ds\\ &-\iint_{\Omega_\sigma}[\bar{\sigma}_{n\beta}-\sigma_{\beta\alpha}n_\alpha]\delta u_\beta dx_0ds\end{aligned} \tag{3.8}$$

对x_0积分时，注意到

$$\int_h\sigma_{\alpha 0,0}\delta u_\alpha dx_0=\int_h(\sigma_{\alpha 0}\delta u_\alpha)_{,0}dx_0=(\sigma^+_{\alpha 0}-\sigma^-_{\alpha 0})\delta u_\alpha \tag{3.9}$$

同时，引进薄膜张力分量$N_{\alpha\beta}$

$$N_{\alpha\beta}=\int_h\sigma_{\alpha\beta}dx_0,\quad N_{(h_\sigma)\alpha\beta}=\int_{h_\sigma}\sigma_{\alpha\beta}dx_0 \tag{3.10}$$

于是(3.8)式可以简化为

$$\begin{aligned}\delta\Pi u_0= &-\iint_{\Omega_0}\left(N_{\alpha\beta,\beta}+\int_h\bar{f}_\alpha\rho dx_0\right)\delta u_\alpha dx_1dx_2\\ &-\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\int_{S_u}\left[\int_{h_u}(U_\beta-\bar{U}_\beta)dx_0n_\alpha\right]\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(\delta u_{\alpha,\beta}+\delta u_{\beta,\alpha})\right.\\ &\left.+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta u_{\gamma,\gamma}\right\}ds-\int_{S_\sigma}\left\{\int_{h_\sigma}\ _{n\alpha}dx_0-N_{(h_\sigma)\alpha\beta}n_\beta\right\}\delta u_\alpha ds\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中，有关x_0的各种积分号是(1.15)，(1.16)，s_u，s_σ的定义见(1.17)式及其说明，式(3.11)中的δu_α在Ω_0中和在s_σ上，和$\delta u_{\alpha,\beta}$在边界s_u上都是独立变分。因此，$\delta\Pi u_\alpha$的变分驻值条件给出：

$$N_{\alpha\beta,\beta}+\int_h\bar{f}_\alpha\rho dx_0=0 \qquad (\text{在}\Omega_0\text{上}) \tag{3.12}$$

$$\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)dx_0=0 \qquad (\text{在}s_u\text{上}) \tag{3.13}$$

$$\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n\alpha}dx_0-N_{(h_\sigma)\alpha\beta}=0 \qquad (\text{在}s_\sigma\text{上}) \tag{3.14}$$

再研究有δu_0各项的泛函变分，称$\delta\Pi$中涉及δu_0的部份为$\delta\Pi u_0$，从(2.9)式，我们有

$$\begin{aligned}\delta\Pi u_0=&\iiint_\tau\{(\sigma_{\alpha j,j}+\bar{f}_\alpha\rho)x_0\delta u_{0,\alpha}-(\sigma_{0j,j}+\bar{f}_0\rho)\delta u_0\}dx_0dx_1dx_2\\ &+\iint_{\Omega_0}\{(\sigma^+_{00}-\sigma^-_{00})-(\bar{p}_+-\bar{p}_-)\}\delta u_0dx_1dx_2-\iint_{\Omega_0}\{(\sigma^+_{\alpha 0}+\sigma^-_{\alpha 0})\delta u_{0,\alpha}\frac{h}{2}dx_1dx_2\end{aligned}$$

$$+\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\iint_{\Omega_h}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)\left[\frac{1}{2}(1-\nu_1)\delta u_{0,\alpha\beta}+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta_{0,\gamma\gamma}\right]n_\beta dsdx_0$$

$$+\iint_{\Omega\sigma}\{(\bar{\sigma}_{n\alpha}-\sigma_{\alpha\beta}n_\beta)x_0du_{0,\alpha}-(\bar{\sigma}_{n0}-\sigma_{0\alpha}n_\alpha)\delta u_0\}dsdx_0 \tag{3.15}$$

对x_0积分，上式化为

$$\delta\Pi u_0=\iint_{\Omega_0}\left\{\left[M_{\alpha\beta,\beta}-Q_\alpha+\int_h \bar{f}_\alpha\rho x_0dx_0\right]\delta u_{0,\alpha}-\left[Q_{\alpha,\alpha}+(\bar{p}_+-\bar{p}_-)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_h\bar{f}_0\rho dx_0\right]\delta u_0\right\}dx_1dx_2+\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\int_{s_u}\left\{\int_{h_u}U_\alpha x_0dx_0\right.$$

$$\left.-\int_{h_u}\bar{U}_\alpha x_0dx_0\right\}\{(1-\nu_1)\delta u_{0,\alpha\beta}$$

$$+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta u_{0,\gamma\gamma}\}n_\beta ds+\int_{s_\sigma}\left\{\left[\int_{h_\sigma}\ {}_{n\alpha}x_0dx_0-M_{(h_\sigma)\alpha\beta}n_\beta\right]\delta u_{0,\beta}\right.$$

$$\left.-\left[\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n0}dx_0-Q_{(h_\sigma)\alpha}n_\alpha\right]\delta u_0\right\}ds \tag{3.16}$$

其中 Q_α为横剪，$M_{\alpha\beta}$为弯矩，它们分别是

$$Q_\alpha=\int_h\sigma_{0\alpha}dx_0,\qquad M_{\alpha\beta}=\int_h\sigma_{\alpha\beta}x_0dx_0 \tag{3.17}$$

同时还引进

$$Q_{(h_\sigma)\alpha}=\int_{h_\sigma}\sigma_{0\alpha}dx_0,\qquad M_{(h_\sigma)\alpha\beta}=\int_{h_\sigma}\sigma_{\alpha\beta}x_0dx_0 \tag{3.17a}$$

$$Q_{(h_u)\alpha}=\int_{h_u}\sigma_{0\alpha}dx_0,\qquad M_{(h_u)\alpha\beta}=\int_{h_u}\sigma_{\alpha\beta}x_0dx_0 \tag{3.17b}$$

(3.16)式在利用了格林公式后，还能进一步简化。其结果为

$$\delta\Pi u_0=-\iint_{\Omega_0}\left\{M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+\bar{p}_+-\bar{p}_-+\int_h\bar{f}_0\rho dx_0+\int_h\bar{f}_{\alpha,\alpha}\rho x_0dx_0\right\}\delta u_0dx_1dx_2$$

$$+\int_{s_u}\left\{M_{(h_u)\alpha\beta,\beta}-Q_{(h_u)\alpha}+\int_{h_u}\bar{f}_\alpha\rho x_0dx_0\right\}n_\alpha du_0ds$$

$$+\int_{s_u}\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\left[\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)x_0dx_0\right]\{(1-\nu_1)\delta u_{0,\alpha\beta}+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta u_{0,\gamma\gamma}\}n_\beta ds$$

$$+\int_{s_\sigma}\left\{\left[\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n\alpha}x_0dx_0-M_{(h_\sigma)\alpha\beta}n_\beta\right]\delta u_{0,\beta}+\left[\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n0}dx_0\right.\right.$$

$$\left.\left.-M_{(h_\sigma)\alpha\beta,\beta}+\int_{h_\sigma}\bar{f}_\alpha\rho x_0dx_0n_\alpha\right]\delta u_0\right\}ds \tag{3.18}$$

δu_0，$\delta u_{0,\alpha}$，$\delta u_{0,\alpha\beta}$在有关各点上都是独立变分，所以，当$\delta\Pi u_0$是驻值时，(3.18)式给出

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+\bar{p}_+-\bar{p}_-+\int_h\bar{f}_0\rho dx_0+\int_h\bar{f}_{\alpha,\alpha}\rho x_0dx_0=0\qquad(\text{在}\Omega_0\text{上}) \tag{3.19}$$

$$\left[M_{(h_u)\alpha\beta,\beta}-Q_{(h_u)\alpha}+\int_{h_u}\bar{f}_\alpha\rho x_0dx_0\right]=0\qquad(\text{在}s_u\text{上}) \tag{3.20a}$$

$$\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)x_0dx_0=0 \qquad (\text{在}s_u\text{上}) \tag{3.20b}$$

$$\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n\alpha}x_0dx_0-M_{(h_\sigma)\alpha\beta}n_\beta=0 \qquad (\text{在}s_\sigma\text{上}) \tag{3.21a}$$

$$\int_h\bar{\sigma}_{n0}dx_0-\left(M_{(h_\sigma)\alpha\beta,\beta}+\int_{h_\sigma}\bar{f}_\alpha\rho x_0dx_0\right)n_\alpha=0 \qquad (\text{在}s_\sigma\text{上}) \tag{3.21b}$$

现在让我们研究涉及$\delta A_{(0)}$的各项的变分泛函$\delta\Pi A_{(0)}$，把δU_i，$\delta\sigma_{ij}$中有关$\delta A_{(0)}$的各项代入(2.9)，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi A_{(0)}=&\iiint_\tau\Big\{(\sigma_{\alpha\beta,\beta}+\sigma_{\alpha0,0}+\bar{f}_\alpha\rho)\frac{1}{2}x_0^2\delta A_{(0),\alpha}\\&-[\sigma_{0\alpha,\alpha}+\sigma_{00,0}+\bar{f}_0\rho]x_0\delta A_{(0)}\Big\}dx_0dx_1dx_2\\&+\iint_{\Omega_0}\Big\{[\sigma^+_{00}+\sigma^-_{00}-\bar{p}_+-\bar{p}_-]\frac{1}{2}h\delta A_{(0)}\\&-\frac{1}{8}(\sigma^+_{\alpha0}-\sigma^-_{\alpha0})h^2\delta A_{(0),\alpha}\Big\}dx_1dx_2\\&-\frac{1}{2}\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\int_{s_u}\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)x_0^2[(1-\nu_1)\delta A_{(0),\alpha\beta}\\&+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta A_{(0),\gamma\gamma}]n_\beta dsdx_0+\int_{s_\sigma}\int_{h_\sigma}\{(\bar{\sigma}_{n\alpha}\\&-\sigma_{\alpha\beta}n_\beta)\frac{1}{2}\delta A_{(0),\alpha}x_0^2-(\bar{\sigma}_{n0}-\sigma_{0\alpha}n_\alpha)\delta A_{(0)}x_0\}dx_0ds\end{aligned} \tag{3.22}$$

对x_0积分，并引进

$$\begin{aligned}&M^{(2)}_{\alpha\beta}=\int_h\sigma_{\alpha\beta}x_0^2dx_0,\quad Q^{(1)}_\alpha=\int_h\sigma_{0\alpha}x_0dx_0,\quad H^{(0)}=\int_h\sigma_{00}dx_0\\&M^{(2)}_{(h_u)\alpha\beta}=\int_{h_u}\sigma_{\alpha\beta}x_0^2dx_0,\quad Q^{(1)}_{(h_u)\alpha}=\int_{h_u}\sigma_{0\alpha}x_0dx_0\\&M^{(2)}_{(h_\sigma)\alpha\beta}=\int_{h_\sigma}\sigma_{\alpha\beta}x_0^2dx_0,\quad Q^{(1)}_{(h_\sigma)\alpha}\int_{h_\sigma}\sigma_{0\alpha}x_0dx_0\end{aligned} \tag{3.23}$$

(3.22)式可以化为

$$\begin{aligned}\delta\Pi A_{(0)}=&\iint_{\Omega_0}\Big\{\Big(M^2_{\alpha\beta,\beta}-2Q^{(1)}_\alpha+\int_h\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx\Big)\frac{1}{2}\delta A_{(0),\alpha}\\&-\frac{1}{2}(\bar{p}_++\bar{p}_-)h\delta A_{(0)}-\Big[Q^{(1)}_{\alpha,\alpha}-H^{(0)}\\&+\int_h\bar{f}_0\rho x_0dx_0\Big]\delta A_{(0)}\Big\}dx_1dx_2\\&-\frac{1}{2}\frac{E_1}{1-u_1^2}\int_{s_u}\Big[\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)x_0^2dx\Big][(1-v_1)\delta A_{(0),\alpha\beta}\end{aligned}$$

$$+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta A_{(0),\gamma\gamma}]n_\beta ds+\int_{s_\sigma}\left\{\left[\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n\alpha}x_0^2dx_0\right.\right.$$

$$\left.-M_{(h_\sigma)\alpha\beta}^{(2)}n_\beta\right]\frac{1}{2}\delta A_{(0),\alpha}-\left[\int_h\bar{\sigma}_{n0}x_0dx_0\right.$$

$$\left.\left.-Q_{(h_\sigma)}^{(1)}n_\alpha\right]\delta A_{(0)}\right\}ds \tag{3.24}$$

用格林公式，最后简化得

$$\delta\Pi A_{(0)}=-\iint_{\Omega_0}\frac{1}{2}\left\{M_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{(2)}-2H^{(0)}+(\bar{p}_++\bar{p}_-)h+2\int_h\bar{f}_0\rho x_0dx_0\right.$$

$$\left.+\int_h\bar{f}_{\alpha,\alpha}\rho x_0^2\right\}\delta A_{(0)}dx_1dx_2+\int_{s_u}\frac{1}{2}\left[M_{(h_u)\alpha\beta,\beta}^{(2)}-2Q_{(h_u)\alpha}^{(1)}\right.$$

$$\left.+\int_{h_u}\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0\right]\Big\}n_\alpha\delta A_{(0)}ds$$

$$-\frac{1}{2}\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\int_{s_u}\left\{\left[\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)x_0^2dx_0\right](1-\nu_1)\delta A_{(0),\alpha\beta}\right.$$

$$\left.+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta A_{(0),\gamma\gamma}\right\}n_\beta ds+\frac{1}{2}\int_{s_\sigma}\left\{\left[\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n\alpha}x_0^2dx_0\right.\right.$$

$$\left.-M_{(h_\sigma)\alpha\beta}^{(2)}n_\beta\right]\delta A_{(0),\alpha}-\left[2\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n0}x_0dx_0\right.$$

$$\left.\left.-\left(M_{(h_\sigma)\alpha\beta,\beta}^{(2)}+\int_{h_\sigma}\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0\right)n_\alpha\right]\delta A_{(0)}\right\}ds \tag{3.25}$$

$\delta\Pi A_{(0)}$的驻值条件给出

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta}^{(2)}-2H^{(0)}+(\bar{p}_++\bar{p}_-)h+2\int_h\bar{f}_0\rho x_0dx+\int_h\bar{f}_{\alpha,\alpha}\rho x_0^2dx_0=0 \tag{3.26}$$

$$n_\alpha\left[M_{(h_u)\alpha\beta,\beta}^{(2)}-2Q_{(h_u)\alpha}^{(1)}+\int_{h_u}\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0\right]=0\qquad(\text{在}s_u\text{上}) \tag{3.27a}$$

$$\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)x_0^2dx_0=0\qquad(\text{在}s_u\text{上}) \tag{3.27b}$$

$$\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n\alpha}x_0^2dx_0-M_{(h_\sigma)\alpha\beta}^{(2)}n_\beta=0\qquad(\text{在}s_\sigma\text{上}) \tag{3.28a}$$

$$2\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n0}x_0dx_0-\left(M_{(h_\sigma)\alpha\beta,\beta}^{(2)}+\int_{h_\sigma}\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx\right)n_\alpha=0\qquad(\text{在}s_\sigma\text{上}) \tag{3.28b}$$

最后，涉及的泛函变分为

$$\delta\Pi S_{(2)\alpha}=-\iiint_\tau(\sigma_{\alpha\beta,\beta}+\sigma_{\alpha0,0}+\bar{f}_\alpha\rho)\delta S_{(2)\alpha}2\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0dx_1dx_2$$

$$+\iint_{\Omega_0}(\sigma^+_{\alpha 0}+\sigma^-_{\alpha 0})\delta S_{(2)\alpha}\frac{1}{6}h^3dx_1dx_2$$

$$-\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\iiint\Big\{(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)[(1-\nu_1)(\delta S_{(2)\alpha,\beta}+\delta S_{(2)\beta,\alpha})$$

$$+2\nu_1\delta S_{(2)\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}]n_\beta\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0$$

$$+(U_0-\bar{U}_0)n_\alpha\delta S_{(2)\alpha}(1-\nu_1)\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)\Big\}dx_0ds$$

$$-\iint_{\Omega_\sigma}\{(\bar{\sigma}_{n\alpha}-\sigma_{\alpha\beta}n_\beta)\delta S_{(2)\alpha}\}2\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0ds \tag{3.29}$$

对x_0积分，并引进内力素

$$\Sigma^{(3)}_{\alpha\beta}=\int_h\sigma_{\alpha\beta}2\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0 \tag{3.30a}$$

$$\chi^{(2)}=\int\sigma_{0\alpha}2\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)dx_0 \tag{3.30b}$$

$$\Sigma^{(3)}_{h(0)\alpha\beta}=\int_h\sigma_{\alpha\beta}2\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0 \tag{3.30c}$$

(3.29)式可以写成

$$\delta\Pi S_{(2)\alpha}=-\iint_{\Omega_0}\Big\{\Sigma^{(3)}_{\alpha\beta,\beta}-\chi^{(2)}_\alpha+\int_h 2\Big(\frac{1}{4}h^2$$

$$-\frac{1}{3}x_0^2\Big)x_0\bar{f}_\alpha\rho dx_0\Big\}\delta S_{(2)\alpha}dx_1dx_2$$

$$-\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\int_{s_u}\left\{\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0\right\}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(S_{(2)\alpha,\beta}+S_{(2)\beta,\alpha})+\nu_1\delta_{\alpha\beta}\delta S_{(2)\gamma,\gamma}\right\}n_\beta ds$$

$$-\frac{E_1}{1-\nu^2}\int_{s_u}\left\{\int_{h_u}(U_0-\bar{U}_0)\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)dx_0\right\}$$

$$\cdot\{(1-\nu_1)n_\alpha S_{(2)\alpha}\}ds-\int_{s_0}\Big\{2\int_{h_u}\bar{\sigma}_{n\alpha}\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0$$

$$-\Sigma^{(3)}_{(h_\sigma)\alpha\beta}n_\beta\Big\}\delta S_{(2)\alpha}ds \tag{3.31}$$

于是得到$\delta\Pi S_{(2)\alpha}$的驻值条件

$$\Sigma^{(3)}_{\alpha\beta,\beta}-\chi^{(2)}_\alpha+\int_h 2\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0\bar{f}_\alpha\rho dx_0=0\qquad(\text{在}\Omega_0\text{上}) \tag{3.32}$$

$$\int_{h_u}(U_\alpha-\bar{U}_\alpha)\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0=0\qquad(\text{在}s_u\text{上}) \tag{3.33a}$$

$$\int_{h_u}(U_0-\bar{U}_0)\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)dx_0=0 \qquad (\text{在}s_u\text{上}) \tag{3.33b}$$

$$2\int_{h_\sigma}\bar{\sigma}_{n\alpha}\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0-\Sigma^{(3)}_{(h_\sigma)\alpha\beta}\,n_\beta=0 \qquad (\text{在}s_\sigma\text{上}) \tag{3.33c}$$

从上面的讨论中，我们导出求u_0，u_1，u_2，$A_{(0)}$，$S_{(2)1}$，$S_{(2)2}$等6个待定函数的6个微分方程：(3.12)，(3.19)，(3.26)，(3.32)，其中(3.12)，(3.32)当α取值1和2时，各为两个方程，其余的方程都是边界条件；计算在s_u上所必需满足的位移已知边界条件11个，它们是(3.13)，(3.20a，b)，(3.27a，b)，(3.33a，b)，其中(3.13)，(3.20b)，(3.27a，b)，(3.33a)当α取值1，2时都是2个条件。还有在s_σ上所必须满足的外力已知的边界条件10个，它们是(3.14)，(3.21a，b)，(3.28c，d)，(3.34)，当α取值1，2时，都代表2个条件，一共有21个边界条件。

四、用6个待定函数u_0，u_1，u_2，$A_{(0)}$，$S_{(2)1}$，$S_{(2)2}$表达的一级近似理论的微分方程和边界条件

把(3.6a，b，c)代入(3.10)，(3.17)，(3.23)，(3.30)式，就可以求待定函数u_0，u_α，$A_{(0)}$，$S_{(2)\alpha}$($\alpha=1$，2)表达的各种内力素，它们是

$$N_{\alpha\beta}=B_1\Big\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})+\nu_1u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}$$
$$-\frac{1}{24}h^2[(1-\nu_1)A_{(0),\alpha\beta}+\nu_1A_{(0),\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]+\nu_1A_{(0)}\delta_{\alpha\beta}\Big\} \tag{4.1}$$

$$M_{\alpha\beta}=D_1\Big\{-[(1-\nu_1)u_{0,\alpha\beta}+\nu_1u_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]+\frac{2}{5}h^2\Big[\frac{1}{2}(1-\nu_1)(S_{(2)\alpha,\beta}$$
$$+S_{(2)\beta,\alpha})+\nu_1S_{(2)\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\Big]\Big\} \tag{4.2}$$

$$Q_\alpha=2D_1(1-\nu_1)S_{(2)\alpha} \tag{4.3}$$

$$M^{(2)}_{\alpha\beta}=D_1\Big\{\frac{1}{2}[(1-\nu_1)(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})+\nu_1u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\nu_1A_{(0)}\delta_{\alpha\beta}]$$
$$-\frac{3}{40}h^2[(1-\nu_1)A_{(0),\alpha\beta}+\nu_1A_{(0),\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]\Big\} \tag{4.4}$$

$$Q^{(1)}_\alpha=0 \tag{4.5}$$

$$H^{(0)}=B_1\Big\{\nu_1u_{\alpha,\alpha}+A_{(0)}-\frac{1}{24}\nu_1h^2\nabla^2A_{(0)}\Big\} \tag{4.6}$$

$$\Sigma^{(3)}_{\alpha\beta}=D_1^{(3)}\Big\{-\frac{3}{8}[(1-\nu_1)u_{0,\alpha\beta}+\nu_1u_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]$$
$$+\frac{68}{63}h^2\Big[\frac{1}{2}(1-\nu_1)(S_{(2)\alpha,\beta}+S_{(2)\beta,\alpha})+\nu_1S_{(2)\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\Big]\Big\} \tag{4.7}$$

$$\chi^{(2)}_\alpha=\frac{16}{8}D_1^{(3)}(1-\nu_1)S_{(2)\alpha} \tag{4.8}$$

其中 B_1，D_1，$D_1^{(3)}$分别为板的平面应变问题的抗拉刚度，抗弯刚度，和高阶抗弯刚度

$$B_1=\frac{E_1h}{1-\nu_1^2},\ D_1=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1^2)},\ D_1^{(3)}=\frac{E_1h^5}{80(1-\nu_1^2)},\tag{4.9}$$

把(4.1)～(4.8)代入(3.12)，(3.19)，(3.26)，(3.23)式等用内力素表达的6个微分方程，即得用u_0，u_1，u_2，$A_{(0)}$，$S_{(2)1}$，$S_{(2)2}$等6个场函数所表示的6个微分方程。这里应该指出，所有这些场函数，都是x_1，x_2的函数，所以，这些微分方程也都是(x_1，x_2)平面内的偏微分方程，这些微分方程可以分成两组，一组只包含u_1，u_2，$A_{(0)}$，另一组只包含u_0，$S_{(2)1}$，$S_{(2)2}$，它们可以分别写成：

$$\frac{1}{2}(1-\nu_1)u_{\alpha,\beta\beta}+\frac{1}{2}(1+\nu_1)u_{\beta,\alpha\beta}+\nu_1A_{(0),\alpha}-\frac{1}{24}h^2\nabla^2A_{(0),\alpha}$$
$$+\frac{1}{B_1}\int_h\bar{f}_\alpha\rho dx_0=0\tag{4.10}$$

$$\nu_1u_{\alpha,\alpha}-\frac{h^2}{24}\nabla^2(u_{\alpha,\alpha})+A_{(0)}-\frac{1}{12}\nu_1h^2\nabla^2A_{(0)}+\frac{1}{320}h^4\nabla^4A_{(0)}$$
$$-\frac{1}{2B_1}\left\{(\bar{p}_++\bar{p}_-)h+2\int_h\bar{f}_0\rho x_0dx_0+\int_h\bar{f}_{\alpha,\alpha}\rho x_0^2dx_0\right\}\tag{4.11}$$

以上两式是从(3.12)和(3.26)中导出的，还有

$$-\nabla^4u_0+\frac{2}{5}h^2\nabla^2S_{(2)\alpha,\alpha}+\frac{1}{D_1}\left\{-(\bar{p}_+-\bar{p}_-)+\int_h\bar{f}_0\rho dx+\int_h\bar{f}_{\alpha,\alpha}\rho x_0dx_0\right\}\tag{4.12}$$

$$-\nabla^2u_{0,\alpha}-2(1-\nu_1)S_{(2)\alpha}+\frac{17}{84}h^2[(1-\nu_1)S_{(2)\alpha,\beta\beta}+(1+\nu_1)S_{(2)\beta,\alpha\beta}]$$
$$+\frac{3}{4D_1^{(3)}}\int_h\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)x_0\bar{f}_\alpha\rho dx=0\tag{4.13}$$

以上两式是从(3.19)和(3.32)导出的。

我们可以一般地将边界条件分成两类，一类是位移已给的边界段s_u上的条件，另一类是外力已给的边界假s_σ上的条件，但我们必须指出，s_u段和s_σ段在整个弧长s上有时是分开的，有时是重叠的，而且在重叠的条件下，每个边界条件中的u_0，$S_{(2)1}$，$S_{(2)2}$和u_1，u_2，$A_{(0)}$这两组边界值一般都同时出现。这样，(4.10)，(4.11)和(4.12)，(4.13)这两组微分方程虽然分别处理两组待定量，但边界值条件却分不开，在求解中将引起较大困难。只有当边界面上位移已给和外力已给的两类区域Ω_u，Ω_σ的交接线垂直于中面时(见图3)，(u_0，$S_{(2)\alpha}$)和($A_{(0)}$，u_α)在边界中才能完全分开，这时$h_u=h_\sigma=h$。

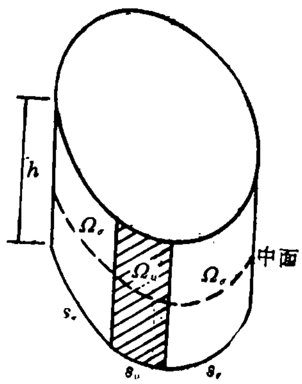

图3 位移已给和外力已给边界区域的交线垂直于中面，s_u，s_σ不重叠而且相接，同时$h_u=h_\sigma=h$

在下面，我们只限于讨论s_u，s_σ不重叠的情况下的边界条件。在这种情况下，我们有

$$s_u+s_\sigma=s\ (整个中面的周长)\tag{4.14a}$$

$$h_u=h_\sigma=h\ (板厚，并设板等厚)\tag{4.14b}$$

把(3.4a，b)，(3.6a，b、c)，(4.1)～

(4.8)诸式代入(3.13)，(3.20a, b)，(3.27a, b)，(3.33a, b)， 得s_u边界上应该满足的位移已给边界条件：

$$u_\alpha-\frac{1}{24}h^2A_{(0),\alpha}\frac{1}{h}\int_h \bar{U}_\alpha dx_0=0$$

[从 (3.13) 导出] (4.15a)

$$n_\alpha\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)\nabla^2u_\alpha+\frac{1}{2}(1+\nu_1)u_{\beta,\alpha\beta}+\nu_1A_{(0),\alpha}-\frac{3}{40}h^2\nabla^2A_{(0),\alpha}\right\}$$

$$+\frac{1}{D}n_\alpha\int_h \bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0=0$$

[从(3.27a)导出] (4.15b)

$$u_\alpha-\frac{2}{5}h^2A_{(0),\alpha}-\frac{12}{h^3}\int_h \bar{U}_\alpha x_0^2dx_0=0$$

[从(3.27b)导出] (4.15c)

以上是有关u_α，$A_{(0)}$在s_u上的 5 个边界条件，还有

$$n_\alpha\left\{-\nabla^2u_{0,\alpha}+\frac{1}{5}h^2[(1-\nu_1)\nabla^2S_{(2)\alpha}+(1+\nu_1)S_{(2)\beta,\alpha\beta}]\right.$$

$$\left.-2(1-\nu_1)S_{(2)\alpha}+\frac{1}{D_1}\int_h \bar{f}_\alpha\rho x_0dx_0\right\}=0$$

[从(3.20a)导出] (4.16a)

$$-u_{0,\alpha}+\frac{2}{5}h^2S_{(2)\alpha}-\frac{12}{h^3}\int_h \bar{U}_\alpha x_0dx_0=0$$

[从(3.20b)导出] (4.16b)

$$-u_{0,\alpha}+\frac{17}{42}h^2S_{(2)\alpha}-\frac{60}{h^5}\int_h \bar{U}_\alpha\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0=0$$

[从(3.33a)导出] (4.16c)

$$u_0-\frac{6}{h^3}\int_h \bar{U}_0\left(\frac{1}{4}h^2-x_0^2\right)dx_0=0$$

[从(3.33b)导出] (4.16d)

以上是有关u_0，$S_{(2)\alpha}$在s_u上的 6 个边界条件.

把(3.4a, b)，(3.6a, b, c)，(4.1)～(4.8)诸式代入(3.14)，(3.21a, b)，(3.28)，(3.34)，求得在S_σ上应该满足的边界条件：

$$n_\beta\left\{[(1-\nu_1)u_{0,\alpha\beta}+\nu_1u_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]-\frac{2}{5}h^2\left[\frac{1}{2}(1-\nu_1)(S_{(2)\alpha,\beta}+S_{(2)\beta,\alpha})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_1S_{(2)\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]\right\}-\frac{1}{D_1}\int_h \bar{\sigma}_{n\alpha}x_0dx_0=0$$

[从(3.21a)导出] (4.17a)

$$n_\alpha\left\{\nabla^2u_{0,\alpha}-\frac{2}{5}h^2\left[\frac{1}{2}(1-\nu_1)\nabla^2S_{(2)\alpha}+\frac{1}{2}(1+\nu_1)S_{(2)\beta,\alpha\beta}\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{D_1}\left\{\int_h \bar{\sigma}_{n0}dx_0-n_\alpha\int_h \bar{f}_\alpha\rho x_0dx_0\right\}=0$$

[从(3.21b)导出] (4.17b)

$$n_\beta\left\{\frac{8}{3}[(1-\nu_1)u_{0,\alpha\beta}+\nu_1 u_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]-\frac{68}{63}h^2\left[\frac{1}{2}(1-\nu_1)(S_{2\alpha,\beta}+S_{2\beta,\alpha})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_1 S_{2\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]\right\}+\frac{2}{D_1^{(3)}}\int_h\bar{\sigma}_{n\alpha}\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0=0$$

[从(3.34)导出] (4.17c)

以上是在s_σ上u_0，$S_{(2\alpha}$所应该满足的5个边界条件．还有

$$n_\beta\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})+\nu_1 u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{24}h^2[(1-\nu_1)A_{(0),\alpha\beta}\right.$$

$$\left.+\nu_1 A_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]+\nu_1 A_0\delta_{\alpha\beta}\right\}-\frac{1}{B_1}\int_h\bar{\sigma}_{n\alpha}dx_0=0$$

[从(3.14)导出] (4.18a)

$$n_\beta\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta\alpha})+\nu_1 u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\nu_1 A_0\delta_{\alpha\beta}-\frac{3}{40}h^2[(1-\nu_1)A_{(0),\alpha\beta}\right.$$

$$\left.+\nu_1 A_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]\right\}-\frac{1}{D_1}\int_h\bar{\sigma}_{n\alpha}x_0^2dx_0=0$$

[从(3.28)导出] (4.18b)

$$n_\alpha\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)u_{\alpha,\beta\beta}+\frac{1}{2}(1+\nu_1)u_{\beta,\alpha\beta}+\nu_1 A_{0,\alpha}-\frac{3}{40}h^2A_{(0),\alpha\beta\beta}\right\}$$

$$-\frac{2}{D_1}\int_h\bar{\sigma}_{n0}x_0dx_0+\frac{n_\alpha}{D_1}\int_h\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0=0$$

[从(3.28d)导出] (4.18c)

以上是有关u_α，A_0在s_σ上应该满足的5个边界条件．

五、在特定的常规边界条件下简化（4.15）～（4.18）

现在我们将在固定边界、自由边界、铰支边界等三种情况下，研究简化边界条件(4.15)～(4.18)式．

1．固定边界中的边界条件

当边界各点固定时，在Ω_u上

$$\bar{U}_1=0\qquad\left(-\frac{1}{2}h\leq x\leq\frac{1}{2}h\right)\tag{5.1}$$

在同一区域内，外力未知，所以，只有和s_u有关的边界条件，才是有效的．于是在(4.15)～(4.18)中，只剩下边界条件(4.15a，b，c)和(4.16a，b，c，d)各式，共11个条件，其中根据(5.1)，很易从(4.15a，c)，(4.16b，c，d)诸式中证明

$$u_0=u_\alpha=u_{0,\alpha}=S_{(2),\alpha}=A_{0,\alpha}=0\tag{5.2}$$

其余两式，即(4.15b)和(4.16a)可以写成

$$n_\alpha\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)\nabla^2u_\alpha+\frac{1}{2}(1+\nu_1)u_{\beta,\alpha\beta}-\frac{3}{40}h^2\nabla^2A_{0,\alpha}\right\}$$

$$+\frac{1}{D_1}n_\alpha\int_h\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0=0\tag{5.3a}$$

$$n_\beta\left\{\frac{8}{3}[(1-\nu_1)u_{0,\alpha\beta}+\nu_1u_{0,\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]-\frac{68}{63}h^2\left[\frac{1}{2}(1-\nu_1)(S_{2\alpha,\beta}+S_{2\beta,\alpha})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_1S_{2\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right]\right\}+\frac{2}{D_1^{(3)}}\int_h\bar{\sigma}_{n\alpha}\left(\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{3}x_0^2\right)x_0dx_0=0$$

[从(3.34)导出] (4.17c)

以上是在s_σ上u_0，$S_{(2)\alpha}$所应该满足的5个边界条件．还有

$$n_\beta\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})+\nu_1u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}-\frac{1}{24}h^2[(1-\nu_1)A_{(0),\alpha\beta}\right.$$

$$\left.+\nu_1A_{(0),\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]+\nu_1A_{(0)}\delta_{\alpha\beta}\right\}-\frac{1}{B_1}\int_h\bar{\sigma}_{n\alpha}dx_0=0$$

[从(3.14)导出] (4.18a)

$$n_\beta\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta\alpha})+\nu_1u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\nu_1A_{(0)}\delta_{\alpha\beta}-\frac{3}{40}h^2[(1-\nu_1)A_{(0),\alpha\beta}\right.$$

$$\left.+\nu_1A_{(0),\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}]\right\}-\frac{1}{D_1}\int_h\bar{\sigma}_{n\alpha}x_0^2dx_0=0$$

[从(3.28)导出] (4.18b)

$$n_\alpha\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)u_{\alpha,\beta\beta}+\frac{1}{2}(1+\nu_1)u_{\beta,\alpha\beta}+\nu_1A_{(0),\alpha}-\frac{3}{40}h^2A_{(0),\alpha\beta\beta}\right\}$$

$$-\frac{2}{D_1}\int_h\bar{\sigma}_{n0}x_0dx_0+\frac{n_\alpha}{D_1}\int_h\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0=0$$

[从(3.28d)导出] (4.18c)

以上是有关u_α，$A_{(0)}$在s_σ上应该满足的5个边界条件．

五、在特定的常规边界条件下简化（4.15）～（4.18）

现在我们将在固定边界、自由边界、铰支边界等三种情况下，研究简化边界条件(4.15)～(4.18)式．

1．固定边界中的边界条件

当边界各点固定时，在Ω_u上

$$\bar{U}_1=0\qquad\left(-\frac{1}{2}h\le x\le\frac{1}{2}h\right)\tag{5.1}$$

在同一区域内，外力未知，所以，只有和s_u有关的边界条件，才是有效的．于是在(4.15)～(4.18)中，只剩下边界条件(4.15a，b，c)和(4.16a，b，c，d)各式，共11个条件，其中根据(5.1)，很易从(4.15a，c)，(4.16b，c，d)诸式中证明

$$u_0=u_\alpha=u_{0,\alpha}=S_{(2),\alpha}=A_{(0),\alpha}=0\tag{5.2}$$

其余两式，即(4.15b)和(4.16a)可以写成

$$n_\alpha\left\{\frac{1}{2}(1-\nu_1)\nabla^2u_\alpha+\frac{1}{2}(1+\nu_1)u_{\beta,\alpha\beta}-\frac{3}{40}h^2\nabla^2A_{(0),\alpha}\right\}$$

$$+\frac{1}{D_1}n_\alpha\int_h\bar{f}_\alpha\rho x_0^2dx_0=0\tag{5.3a}$$