应用数学和力学, 第 25 卷 第 2 期(2004 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 02_0166_15

包含泥沙冲淤的浅水方程的混合有限元法 (II) ——时间沿特征方向离散的全离散情形*

罗振东[1,2], 朱 江[2], 曾庆存[2], 谢正辉[2]

(1. 首都师范大学 数学系, 北京 100037;
2. 中国科学院 大气物理研究所, 北京 100029)

(戴世强推荐)

摘要: 进一步研究由水动力学方程、泥沙输运方程和河床变化方程组成的浅水方程混合有限元法, 给出时间沿特征方向离散的一种全离散格式, 并证明全离散的水流速度、床底高度、水体厚度、水中泥沙含量的混合有限元解的存在性和收敛性(误差估计)•

关 键 词: 混合有限元法; 浅水方程; 误差估计; 水流和泥沙淤积; 特征方法
中图分类号: O241.4 文献标识码: A

引 言

尽管输运_扩散方法(即 Lagrange_Galerkin 方法, 这种方法也称为特征方法[1]) 是一种老方法, 并已经广泛应用与处理带有扩散项的偏微分方程, 但是直到 20 世纪 80 年代初才成功地应用于处理 Navier_Stokes 方程的混合有限元法的数值解的收敛性[2]• 20 世纪 90 年代初 Berm dez 等人[3] 将该方法应用于处理只包含水厚度的浅方程而且只给出数值计算方法, 并没有对其计算方法的收敛性作分析• 本文将该方法应用于由水动力学方程、泥沙输运方程和河床变化方程组成的浅水方程, 分析全离散的水流速度、床底高度、水体厚度、水中泥沙含量的混合有限元解的存在性和收敛性(误差估计) • 这是对该方程研究的第(II) 部分• 在第(I) 部分[4], 我们已经讨论了空间变量离散而时间连续的半离散情形• 由于这里的方程是与第(I) 部分[4] 相同的, 所以, 有关的分析背景和假定不再重复了•

* 收稿日期: 2000_08_30; 修订日期: 2003_06_28
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071052, 49776283) ; 中国科学院“百人计划” 资助项目; 国家杰出青年科学基金资助项目(40225015) ; 北京市优秀人才专项经费资助项目; 北京市自然科学基金资助项目
作者简介: 罗振东(1958—) , 男, 广西桂平人, 教授, 博士, 博士生导师, 研究方向: 有限元法及其应用(联系人. Tel: 86_10_68902352; Fax: 86_10_68902785; E_mail: luozhd@ mail. cnu. edu. cn) ;
曾庆存(1935—) , 男, 广东人, 研究员, 中科院院士, 博士, 博士生导师, 从事地球流体力学、大气环流、数值天气预报理论、气侯动力学和气侯数值模拟、环境生态动力学、自然控制论、大气遥感等方面的研究•

本文的安排如下: 第 1 节先简单重述由水动力学方程、泥沙输运方程和河床变化方程组成的浅水方程的初边值问题及下文需要的结果• 第 2 节提出该方程沿特征方向离散时间的全离散化方法, 并讨论全离散的混合有限元解的存在性和收敛性•

1　包含泥沙冲淤的浅水方程回顾

设 $\Omega \in R^2$ 中一个适当光滑的有界区域• 在水深变化不大的假定下, 考虑下面包含水流和泥沙冲淤的浅水方程:

(i) 水流的连续方程为(参见[5]):

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + Z\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 0, \qquad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中}; \tag{1}$$

(ii) 水流的动量方程如下(为[6]中所导出的):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + f(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}) = -g\nabla(Z + z_b) + A\Delta\boldsymbol{v} - C_D|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z, \qquad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中}; \tag{2}$$

(iii) 淤泥输运方程如下(也为[6]中所导出的):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla S = \varepsilon\Delta S - \frac{\alpha\omega}{Z}(S - S^*), \qquad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中}; \tag{3}$$

(iv) 底床变化方程如下(也为[6]中所导出的):

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + h_1\nabla\boldsymbol{v}_1 = \frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S - S^*), \qquad \text{在 } \Omega \times (0, T) \text{ 中}; \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{v} = (u, v)$ 表示水流速度向量, z_s 和 z_b 分别表示水面的高度和底床的高度而且 $Z = z_s - z_b$ 表示水层的厚度(如图 1 所示)• f 是 Coriolis 参数(可取为常数), $\boldsymbol{k}$ 表示垂直方向的单位向量, g 表示重力加速度, A 表示粘性系数, C_D 表示底床障碍物系数, S 表示水含沙量($\mathrm{kg/m^3}$), ε 表示泥沙扩散系数, ω 表示泥沙的下沉速度, h_1 表示沉淀物输运层的厚度(可视为已知函数), $\boldsymbol{v}_1$ 表示沉淀物质量输运的速度(也可视为已知函数), 而 ρ_1 表示床沙的密度(可视为常数), S^* 表示依赖于 $|\boldsymbol{v}_1|$ 和 h_1 的水流夹沙函数(是一个经验函数, 为了便于讨论这里假定其为常数)•

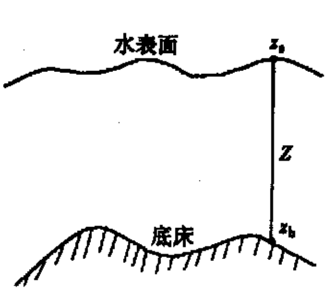

图 1

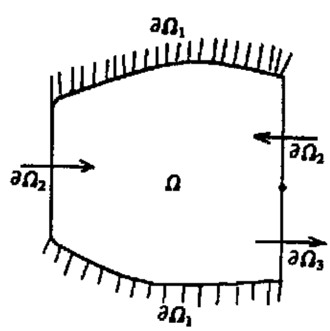

图 2

(v) 考虑边界条件如下• 首先, 假定将边界分为自然边界条件和人工边界条件, 并分为如下 3 种情形: 刚性边界为 $\partial\Omega_1$, 入流的横截边界为 $\partial\Omega_2$, 出流或人工边界为 $\partial\Omega_3$(例如, $\partial\Omega_3$ 是海湾和开阔的大海为人工边界, 参见图 2)• 根据物理原理, 在 $\partial\Omega_1$ 上的边界条件定义为

$$\boldsymbol{v} = 0, \ -\varepsilon\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{n}} = \kappa(S - S^{**}) + M, \qquad \text{在 } \partial\Omega_1 \times (0, T) \text{ 上}, \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是边界上的单位外法向量(指向外面)，κ 是某个系数，$\kappa(S-S^{**})$ 是由于湍流而在边界上吸收的盐量，S^{**} 是某种饱和状态的含盐量；而 M 是由于从边界流入水中的盐量(但是随边界变化被忽略)。在 $\partial\Omega_2$ 和 $\partial\Omega_3$ 上边界条件定义为

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}}=\boldsymbol{A}\leqslant 0,\quad Z=Z_0,\quad z_{\mathrm{b}}=z_{\mathrm{b}0},\quad S=S_0,\qquad \text{在}\ \partial\Omega_2\times(0,T)\ \text{上}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}}=\boldsymbol{B}\geqslant 0,\quad Z=Z_0,\quad z_{\mathrm{b}}=z_{\mathrm{b}0},\quad \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{n}}=0,\qquad \text{在}\ \partial\Omega_3\times(0,T)\ \text{上}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}$、S_0、Z_0 和 $z_{\mathrm{b}0}$ 是已知函数，$z_{\mathrm{s}}|_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}=z_{\mathrm{s}0}=Z_0+z_{\mathrm{b}0}$。

(ⅵ) 初始条件如下：

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{v}^0,\quad Z(\boldsymbol{x},0)=Z^0,\quad S(\boldsymbol{x},0)=S^0,\quad z_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{x},0)=z_{\mathrm{b}}^0,\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{v}^0$、S^0、Z^0 和 z_{b}^0 也是已知函数，$z_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x},0)=z_{\mathrm{s}}^0=Z^0+z_{\mathrm{b}}^0$。

于是，问题(1)~(8)的混合变分形式可叙述为：

问题(Ⅰ) 求 $(\boldsymbol{v},Z,z_{\mathrm{b}},S):[0,T]\to Y_1\times Y_2\times Y_2\times Y_3$ 使得 $S|_{\partial\Omega_2}=S_0$ 满足

$$(Z_t,\Phi)+(Z\operatorname{div}\boldsymbol{v},\Phi)=0,\qquad \forall\,\Phi\in Y_2, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}_t,\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})+f(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})-g(Z+z_{\mathrm{b}},\operatorname{div}\boldsymbol{w})+\\&\quad A(\nabla\boldsymbol{v},\nabla\boldsymbol{w})+C_{\mathrm{D}}(|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}/Z,\boldsymbol{w})=\\&\quad -\langle Z_0+z_{\mathrm{b}0},\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}+\langle\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{w}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3},\qquad \forall\,\boldsymbol{w}\in Y_1,\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&(S_t,\psi)+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla S,\psi)+\varepsilon(\nabla S,\nabla\psi)+\alpha\omega((S-S^*)/Z,\psi)+\\&\quad\kappa\langle S-S^{**},\psi\rangle_{\partial\Omega_1}+\langle M,\psi\rangle_{\partial\Omega_1}=0,\qquad \forall\,\psi\in Y_{03},\end{aligned} \tag{11}$$

$$(z_{\mathrm{b}t},\eta)=\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S-S^*,\eta)-(h_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1,\eta),\qquad \forall\,\eta\in Y_2, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{v}^0,\quad Z(\boldsymbol{x},0)=Z^0,\quad S(\boldsymbol{x},0)=S^0,\quad z_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{x},0)=z_{\mathrm{b}}^0,\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{8}$$

其中 $Y_1=\left\{\boldsymbol{w}\in H^1(\Omega)^2;\ \boldsymbol{w}|_{\partial\Omega_1}=\boldsymbol{0}\right\}$，$Y_2=L^2(\Omega)$，$Y_3=H^1(\Omega)$，$Y_{03}=\left\{\psi\in Y_3;\ \psi|_{\partial\Omega_1}=0\right\}$，$y_t=\partial y/\partial t$，$\langle\varphi,\psi\rangle_G=\int_G\varphi\cdot\psi\,\mathrm{d}s$ 表示在表面 G 上的 L^2 内积。

正如[7]中所说的，讨论问题(Ⅰ)的广义解的存在唯一性，需要对边值数据、初始数据以及有关系数作物理上和数学上均合理的如下假定：

(A_1) $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}\in W^{3/2,\infty}(\partial\Omega)^2$，$S^{**}$、$Z_0$、$z_{\mathrm{b}0}\in W^{1/2,\infty}(\partial\Omega)$，$t\in[0,T]$；

(A_2) $\boldsymbol{v}^0\in W^{2,\infty}(\Omega)^2$，$Z^0$、$z_{\mathrm{b}}^0\in W^{1,\infty}(\Omega)$，$S^0\in W^{2,\infty}(\Omega)$；

(A_3) $h_1\in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$，$\boldsymbol{v}_1\in L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))$，$S^*\in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$；

(A_4) 存在正的常数 M_* 和 M^* 使得：$M_*\leqslant\left\{f,g,A,C_{\mathrm{D}},\varepsilon,\alpha,\omega,\rho_1\right\}\leqslant M^*$；

(A_5) 假定 $\partial\Omega\in C^{l,\beta}(l\geqslant 0,\beta\geqslant 0)$，$S_0\in C^{l,\beta}(\partial\Omega\times[0,T])$，则存在 S_0 到 $C_0^{l,\beta}(R^2)$ 上的一个延拓(不妨仍然记为 S_0) 使得

$$\|S_0\|_{l,q}\leqslant\delta,\qquad l\geqslant 0,\ 1\leqslant q\leqslant\infty,$$

其中 δ 是任意可以选择的小正数。

附注 假定(A_5)可以从 Sobolev 空间的性质[8]导出。本文用到的 Sobolev 空间及性质是熟知的[8~10]。另外本文使用的 C、C_i 和 $M_i(i=0,1,\dots)$ 均表示与剖分参数 h(参见第 2 节)无关的一般常数，不同的地方出现可以不等。

在[4]中已经给出了下面的结果。

定理 1 在(A_1)~(A_5)的假定下，问题(Ⅰ)存在唯一的解 $(\boldsymbol{v},Z,z_{\mathrm{b}},S)\in Y_1\times Y_2\times Y_2\times$

Y_3 使得 $S|_{\partial\Omega_2}=S_0$, 而且存在正的常数 M_0、M_1、M_2 和 M_3 满足

$$M_0\leqslant Z\leqslant M_1,\quad \|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,\infty}\leqslant M_2,\quad \|\nabla S\|_{0,\infty}\leqslant M_3. \tag{13}$$

2　沿特征方向离散时间的全离散化的混合元解的存在性和收敛性

设 $\mathscr{T}_h$ 是剖分单元为$K_i(i=1,2,\cdots,k)$的拟一致三角形剖分[9~10], 并记 $\mathrm{diam}(K_i)=h_i$ 和 $h=\max\{h_i;i=1,2,\cdots,k\}$. 定义 3 个有限元空间 $Y_{1h}\subset Y_1$、$Y_{2h}\subset Y_2$ 和 $Y_{3h}\subset Y_3$ 如下:

$$Y_{1h}=\{\boldsymbol{w}_h\in Y_1\cap C^0(\Omega)^2;\ \boldsymbol{w}_h|_K\in P_{m+1}(K)^2,\ \forall K\in\mathscr{T}_h\}, \tag{14}$$

$$Y_{2h}=\{\phi_h\in Y_2;\ \phi_h|_K\in P_m(K),\ \forall K\in\mathscr{T}_h\}, \tag{15}$$

$$Y_{3h}=\{\psi_h\in Y_3\cap C^0(\Omega);\ \psi_h|_K\in P_{m+1}(K),\ \forall K\in\mathscr{T}_h\}, \tag{16}$$

其中 $m\geqslant0$ 是整数, $P_m(K)$ 表示次数不超过 m 的多项式空间.

回顾下面的等式:

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S, \tag{18}$$

$\mathrm{D}y/\mathrm{D}t$ 表示$y=\boldsymbol{v}$ 或S 关于t 的通常的整体导数, 即

$$\frac{\mathrm{D}y(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial\tau}y(X(\boldsymbol{x},t,\tau),\tau)_{\tau=t}, \tag{19}$$

$\tau\to X(\boldsymbol{x},t;\tau)$ 是粒子在时刻 t 时在点$\boldsymbol{x}$ 处的轨迹, 即 $X(\boldsymbol{x})=X(\boldsymbol{x},t;\tau)$ 是常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}X(\boldsymbol{x},t;\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{v}(X(\boldsymbol{x},t;\tau),\tau),\qquad X(\boldsymbol{x},t;t)=\boldsymbol{x} \tag{20}$$

的解.

设 Δt 是时间步长, $t_n=n\Delta t\ (n=0,1,2,\cdots)$, $L=T/\Delta t$. 记$X^n(\boldsymbol{x})=X(\boldsymbol{x},t_{n+1};t_n)$, 那么$\mathrm{D}y/\mathrm{D}t$ 在$t=t_{n+1}$ 可近似表示为

$$\frac{\mathrm{D}y(\boldsymbol{x},t)}{\mathrm{D}t}\approx\frac{y^{n+1}(\boldsymbol{x})-y^n(X^n(\boldsymbol{x}))}{\Delta t}. \tag{21}$$

由此可导出问题(Ⅰ)关于时间 t 沿着特征方向离散的出下面的半离散化格式:

问题(Ⅰ^n)　求$(\boldsymbol{v}^n,Z^n,z_{\mathrm{b}}^n,S^n)\in Y_1\times Y_2\times Y_2\times Y_3(n=1,2,\cdots,L)$使得$S^n|_{\partial\Omega_2}=S_0$, 满足

$$(Z^n,\phi)+\Delta t(Z^n\mathrm{div}\boldsymbol{v}^{n-1},\phi)=(Z^{n-1},\phi),\qquad\forall\phi\in Y_2, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}^n,\boldsymbol{w})+f\Delta t(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}^n,\boldsymbol{w})+A\Delta t(\nabla\boldsymbol{v}^n,\nabla\boldsymbol{w})+C_{\mathrm{D}}\Delta t(|\boldsymbol{v}^{n-1}|\boldsymbol{v}^n/Z^n,\boldsymbol{w})=\\&\quad(\boldsymbol{v}^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x})),\boldsymbol{w})+g\Delta t(Z^n+z_{\mathrm{b}}^n,\mathrm{div}\boldsymbol{w})-\\&\quad\Delta t\langle Z_0+z_{\mathrm{b}}^0,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}+\Delta t\langle\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{w}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3},\qquad\forall\boldsymbol{w}\in Y_1,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&(S^n,\psi)+\Delta t\varepsilon(\nabla S^n,\nabla\psi)+\Delta t\alpha\omega(S^n/Z^n,\psi)+\Delta t\kappa\langle S^n,\psi\rangle_{\partial\Omega_1}=\\&\quad(S^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x})),\psi)+\Delta t\alpha\omega(S^*/Z^n,\psi)-\Delta t\langle M,\psi\rangle_{\partial\Omega_1}+\\&\quad\Delta t\kappa\langle S^{**},\psi\rangle_{\partial\Omega_1},\qquad\forall\psi\in Y_{03},\end{aligned} \tag{24}$$

$$(z_{\mathrm{b}}^n,\eta)=(z_{\mathrm{b}}^{n-1},\eta)+\Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S^n-S^*,\eta)-\Delta t(h_1\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1,\eta),\qquad\forall\eta\in Y_2, \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{v}^0$、Z^0、z_{b}^0 和 S^0 为(8)或(A2)中所给.

我们的分析需要对问题(Ⅰ^n)的逼近解中的 Z^n 作下面的物理上合理的假定:

(A_6) $Z^n > 0,\ n = 1, 2, \cdots, L$.

注 从图 1 可知这假定(A_6)显然是合理的.

定理 2 如果$(A_1)\sim(A_6)$成立而且 $\Delta t < 1/\|\boldsymbol{v}^{n-1}\|_{0,\infty}$, 那么问题$(\mathrm{I}^n)$存在唯一的解$(\boldsymbol{v}^n, Z^n, z_b^n, S^n) \in Y_1 \cap W^{2,\infty}(\Omega)^2 \times Y_2 \cap W^{1,\infty}(\Omega) \times Y_2 \cap W^{1,\infty}(\Omega) \times Y_3 \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ 满足 $S^n|_{\partial\Omega} = S_0$, 而且有

$$M_0 \leqslant Z^n \leqslant M_1,\quad \|v^n\|_{1,\infty} \leqslant M_2,\quad \|S^n\|_{1,\infty} \leqslant M_3 \qquad (n = 1, 2, \cdots, L). \tag{26}$$

证明 首先考虑(22). 由于

$$(\phi, \phi) + \Delta t(\phi \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{n-1}, \phi) \geqslant \|\phi\|_0^2 - \Delta t\|\phi\|_0^2 \|\nabla \boldsymbol{v}^{n-1}\|_{0,\infty} \equiv \sigma_1 \|\phi\|_0^2, \tag{27}$$

其中 $\sigma_1 = 1 - \Delta t\|\nabla \boldsymbol{v}^{n-1}\|_{0,\infty} > 0$, 即(22)的左边是一个正定的双线性型, 那么, 由 Lax-Milgram 引理[9~10]、递推公式、(A_2)、(A_6)和椭圆型偏微分方程解的正则性可知, 方程(22)存在唯一的解 $Z^n \in Y_2 \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ $(n = 1, 2, \cdots, L)$ 并存在两个正的常数 M_0 和 M_1 使得

$$M_0 \leqslant Z^n \leqslant M_1 \qquad (n = 1, 2, \cdots, L). \tag{28}$$

其次, 考虑(24). 由于

$$\begin{aligned}(\psi, \psi) + \Delta t\varepsilon(\nabla\psi, \nabla\psi) + \Delta t\alpha\omega(\psi/Z^n, \psi) + \Delta t\kappa\langle\psi, \psi\rangle_{\partial\Omega_1} \geqslant \\ \|\psi\|_0^2 + \Delta t\varepsilon\|\nabla\psi\|_0^2 + \Delta t\alpha\omega\|\psi\|_0^2/M_1 + \Delta t\kappa\|\psi\|_{0,\partial\Omega_1}^2 \geqslant \sigma_2\|\psi\|_1^2,\end{aligned} \tag{29}$$

其中 $\sigma_2 = \min\left\{1 + \Delta t\alpha\omega/M_1, \Delta t\varepsilon\right\}$, 即(24)的左边也是在 Y_{03} 上正定的双线性型, 那么, 由 Lax_Milgram 引理、递推公式、$(A_1)\sim(A_5)$和型偏微分方程解的正则性可知, 方程(24)存在唯一的解 $S^n \in Y_1 \cap W^{2,\infty}(\Omega)$ $(n = 1, 2, \cdots, L)$ 满足 $S^n|_{\partial\Omega_2} = S_0$, 而且存在正的常数 M_3 使得

$$\|S^n\|_{1,\infty} \leqslant M_3 \qquad (n = 1, 2, \cdots, L). \tag{30}$$

显然, 对于已知的 S^n, 方程(25)存在唯一的解 $z_b^n \in Y_2 \cap W^{1,\infty}(\Omega)$, $n = 1, 2, \cdots, L$.

最后, 考虑(23). 注意到 $(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = 0$ 和

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + f\Delta t(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) + A\Delta t(\nabla\boldsymbol{w}, \nabla\boldsymbol{w}) + C_D\Delta t(|\boldsymbol{v}^{n-1}|\boldsymbol{w}/Z^n, \boldsymbol{w}) = \\ \|\boldsymbol{w}\|_0^2 + A\Delta t\|\nabla\boldsymbol{w}\|_0^2 + C_D\Delta t(|\boldsymbol{v}^{n-1}|\boldsymbol{w}/Z^n, \boldsymbol{w}) \geqslant \\ \|\boldsymbol{w}\|_0^2 + A\Delta t\|\nabla\boldsymbol{w}\|_0^2 \geqslant \sigma_3\|\boldsymbol{w}\|_1^2,\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\sigma_3 = \min\left\{1, A\Delta t\right\}$, 即(23)的左边也是正定的双线性型, 那么, 由 Lax_Milgram 引理、递推公式、$(A_1)\sim(A_6)$和椭圆型偏微分方程解的正则性可知, 方程(23)存在唯一的解 $\boldsymbol{v}^n \in Y_1 \cap W^{2,\infty}(\Omega)^2$ $(n = 1, 2, \cdots, L)$ 而且存在正的常数 M_2 使得

$$\|\boldsymbol{v}^n\|_{1,\infty} \leqslant M_2 \qquad (n = 1, 2, \cdots, L). \tag{32}$$

定理 2 证毕.

现在, 考虑问题(Ⅰ)的下面的全离散混合有限元解:

问题(I_h^n) 求$(\boldsymbol{v}_h^n, Z_h^n, z_{bh}^n, S_h^n) \in Y_{1h} \times Y_{2h} \times Y_{2h} \times Y_{3h}$ $(n = 1, 2, \cdots, L)$ 使得 $S_h^n|_{\partial\Omega_2} = S_0$, 满足

$$(Z_h^n, \phi_h) + \Delta t(Z_h^n \operatorname{div}\boldsymbol{v}_h^{n-1}, \phi_h) = (Z_h^{n-1}, \phi_h), \qquad \forall \phi_h \in Y_{2h}, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_h^n, \boldsymbol{w}_h) + f\Delta t(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}_h^n, \boldsymbol{w}_h) + A\Delta t(\nabla\boldsymbol{v}_h^n, \nabla\boldsymbol{w}_h) + C_D\Delta t(|\boldsymbol{v}_h^{n-1}|\boldsymbol{v}_h^n/Z_h^n, \boldsymbol{w}_h) = \\ (\boldsymbol{v}_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{w}_h) + g\Delta t(Z_h^n + z_{bh}^n, \operatorname{div}\boldsymbol{w}_h) - \\ \Delta t\langle Z_0 + z_{b0}, \boldsymbol{w}_h \cdot \boldsymbol{n}\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3} + \Delta t\langle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{w}_h\rangle_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3}, \qquad \forall \boldsymbol{w}_h \in Y_{1h},\end{aligned} \tag{34}$$

$$(S_h^n, \psi_h) + \Delta t\varepsilon(\nabla S_h^n, \nabla\psi_h) + \Delta t\alpha\omega(S_h^n/Z_h^n, \psi_h) + \Delta t\kappa\langle S_h^n, \psi_h\rangle_{\partial\Omega_1} =$$
$$(S_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})), \psi) + \Delta t\alpha\omega(S^*/Z_h^n, \psi_h) - \Delta t\langle M, \psi_h\rangle_{\partial\Omega_1} +$$
$$\Delta t\kappa\langle S^{**}, \psi_h\rangle_{\partial\Omega_1}, \qquad \forall\psi_h \in Y_{03h}, \tag{35}$$

$$(z_{bh}^n, \eta_h) = (z_{bh}^{n-1}, \eta_h) + \Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S_h^n - S^*, \eta_h) - \Delta t(h_1\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1, \eta_h), \qquad \forall\eta_h \in Y_{2h}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{v}_h^0 = P_h\boldsymbol{v}^0,\ Z_h^0 = r_hZ^0,\ S_h^0 = R_hS^0,\ z_{bh}^0 = r_hz_b^0, \tag{37}$$

其中 $Y_{03h} = Y_{03} \cap Y_{3h}$, $X_h^m(\boldsymbol{x}) = X_h(\boldsymbol{x}, (m+1)\Delta t; m\Delta t)$ 是方程

$$\frac{\mathrm{d}X_h}{\mathrm{d}\tau} = \boldsymbol{v}_h(X_h, \tau),\ X_h(\boldsymbol{x}, (m+1)\Delta t; (m+1)\Delta t) = \boldsymbol{x} \tag{38}$$

在时刻 $\tau = m\Delta t$ 的解, 而且 P_h 表示从 Y_1 到 Y_{1h} 内的 L^2 投影, 即对于任意的 $\boldsymbol{w} \in Y_1$, 都有

$$(\boldsymbol{w} - P_h\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_h) = 0, \qquad \forall\boldsymbol{w}_h \in Y_{1h}; \tag{39}$$

又 r_h 表示从 Y_2 到 Y_{2h} 内的 L^2 投影, 即对于任意的 $\phi \in Y_2$, 都有

$$(\phi - r_h\phi, \phi_h) = 0, \qquad \forall\phi_h \in Y_{2h}; \tag{40}$$

而 R_h 表示从 Y_3(或 Y_{03}) 到 Y_{3h}(或 Y_{03h}) 内的 L^2 投影, 即对于任意的 $\psi \in Y_3$(或 Y_{03}), 都有

$$(\psi - R_h\psi, \psi_h) = 0, \qquad \forall\psi_h \in Y_{3h}(\text{或 } Y_{03h})\cdot \tag{41}$$

算子 P_h、r_h 和 R_h 满足下面的逼近性质[9~11]:

$$\|\boldsymbol{w} - P_h\boldsymbol{w}\|_s \leqslant Ch^{r-s}\|\boldsymbol{w}\|_r, \qquad \boldsymbol{w} \in H^r(\Omega)^2,\ s = 0, 1;\ s \leqslant r < m+2, \tag{42}$$
$$\|\phi - r_h\phi\|_s \leqslant Ch^{r-s}\|\phi\|_r, \qquad \phi \in H^r(\Omega),\ s = 0, 1;\ s \leqslant r \leqslant m+1, \tag{43}$$
$$\|\psi - R_h\psi\|_s \leqslant Ch^{r-s}\|\psi\|_r, \qquad \psi \in H^r(\Omega),\ s = 0, 1;\ s \leqslant r \leqslant m+2\cdot \tag{44}$$

正如 Pironneau 导出的 Adams 方法[2], $X^n(\boldsymbol{x})$ 和 $X_h^n(\boldsymbol{x})$ 可以分别近似地表示如下

$$X^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \Delta t\boldsymbol{v}^n(\boldsymbol{x}),\ X_h^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \Delta t\boldsymbol{v}_h^n(\boldsymbol{x}) \tag{45}$$

或

$$X^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \frac{\Delta t}{2}(\boldsymbol{v}^{n-1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}^{n-2}(\boldsymbol{x})),\ X_h^n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \frac{\Delta t}{2}(\boldsymbol{v}_h^{n-1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}_h^{n-2}(\boldsymbol{x}))\cdot \tag{46}$$

定理 3　在定理 2 的条件下, 问题 (I_h^n) 存在唯一解 $(\boldsymbol{v}_h^n, Z_h^n, z_{bh}^n, S_h^n) \in Y_{1h} \times Y_{2h} \times Y_{2h} \times Y_{3h}$, $n = 1, 2, \cdots, L$, 满足 $S_h^n|_{\partial\Omega_2} = S_0$·

证明　由于方程(33)~(36)的左手边分别是 Y_{2h}、Y_{1h}、Y_{3h} 和 Y_{2h} 上的双线性型, 所以从定理 2 的论证知线性方程组(33)~(36)的系数矩阵是正定的, 由此问题 (I_h^n) 存在唯一的解 $(\boldsymbol{v}_h^n, Z_h^n, z_{bh}^n, S_h^n) \in Y_{1h} \times Y_{2h} \times Y_{2h} \times Y_{3h}$, $n = 1, 2, \cdots, L$, 使得 $S_h^n|_{\partial\Omega_2} = S_0$· 定理 3 证毕·

对问题 (I_h^n) 的解作误差估计需要利用下面离散的 Gronwall 引理[12]·

引理 4　如果 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是正序列, $\{c_n\}$ 是单调递增而且满足

$$a_n + b_n \leqslant c_n + \lambda\sum_{j=0}^{n-1}a_j, \qquad n \geqslant 1,\ \lambda > 0;\ a_0 + b_0 \leqslant c_0, \tag{47}$$

那么

$$a_n + b_n \leqslant c_n\exp(\lambda n), \qquad n \geqslant 0\cdot \tag{48}$$

为了估计问题 (I_h^n) 的解的误差, 还需要类似于[7]中那样, 对离散解 Z_h^n 和 $\boldsymbol{v}_h^n$ 作物理上合理的有界的假定, 即假定存在不依赖于 h 的正的常数 C_0、C_1 和 C_2 使得

$$C_0 \leqslant Z_h^n \leqslant C_1;\ \|\boldsymbol{v}_h^n\|_{1,\infty} \leqslant C_2 \qquad (n = 1, 2, \cdots, L)\cdot \tag{49}$$

定理 5　在定理 3 和(49)的假定下, 如果问题 (I^n) 的解 $(\boldsymbol{v}^n, Z^n, z_b^n, S^n) \in W^{m+2,\infty}(\Omega)^2 \times$

$W^{m+1,\infty}(\Omega)\times W^{m+1,\infty}(\Omega)\times W^{m+2,\infty}(\Omega)$, Δt 是足够的小且 $h^2=O(\Delta t)$, 那么下列误差估计成立:

$$\|\boldsymbol{v}^n-\boldsymbol{v}_h^n\|_0+\Delta t^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}^i-\boldsymbol{v}_h^i)\|_0\leqslant Ch^{m+1},\tag{50}$$

$$\|S^n-S_h^n\|_0+\Delta t^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(S^i-S_h^i)\|_0\leqslant Ch^{m+1},\tag{51}$$

$$\|Z^n-Z_h^n\|_0+\|z_{\mathrm{b}}^n-z_{\mathrm{b}h}^n\|_0\leqslant Ch^{m+1}\qquad(n=1,2,\cdots,L).\tag{52}$$

证明　在问题(I^n)中取 $\phi=\phi_h$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_h$, $\psi=\psi_h$ 和 $\eta=\eta_h$, 并与问题(I_h^n)相减可得下面的误差方程:

$$\begin{aligned}&(Z^n-Z_h^n,\phi_h)+\Delta t(Z^n\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{n-1}-Z_h^n\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h^{n-1},\phi_h)=\\&\qquad(Z^{n-1}-Z_h^{n-1},\phi_h),\qquad\forall\phi_h\in Y_{2h},\end{aligned}\tag{53}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}^n-\boldsymbol{v}_h^n,\boldsymbol{w}_h)+f\Delta t(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{v}^n-\boldsymbol{v}_h^n),\boldsymbol{w}_h)+A\Delta t(\nabla(\boldsymbol{v}^n-\boldsymbol{v}_h^n),\nabla\boldsymbol{w}_h)+\\&\qquad C_{\mathrm{D}}\Delta t(|\boldsymbol{v}^{n-1}|\boldsymbol{v}^n/Z^n-|\boldsymbol{v}_h^{n-1}|\boldsymbol{v}_h^n/Z_h^n,\boldsymbol{w}_h)=\\&\qquad(\boldsymbol{v}^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x}))-\boldsymbol{v}_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})),\boldsymbol{w}_h)+\\&\qquad g\Delta t(Z^n+z_{\mathrm{b}}^n-Z_h^n-z_{\mathrm{b}h}^n,\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h),\qquad\forall\boldsymbol{w}_h\in Y_{1h},\end{aligned}\tag{54}$$

$$\begin{aligned}&(S^n-S_h^n,\psi_h)+\Delta t\varepsilon(\nabla(S^n-S_h^n),\nabla\psi_h)+\Delta t\alpha\omega(S^n/Z^n-S_h^n/Z_h^n,\psi_h)+\\&\qquad\Delta t\kappa\langle S^n-S_h^n,\psi_h\rangle_{\partial\Omega_1}=(S^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x}))-S_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})),\psi_h)+\\&\qquad\Delta t\alpha\omega(S^*/Z^n-S^*/Z_h^n,\psi_h),\qquad\forall\psi_h\in Y_{03h},\end{aligned}\tag{55}$$

$$(z_{\mathrm{b}}^n-z_{\mathrm{b}h}^n,\eta_h)=(z_{\mathrm{b}}^{n-1}-z_{\mathrm{b}h}^{n-1},\eta_h)+\Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S^n-S_h^n,\eta_h),\qquad\forall\eta_h\in Y_{2h}.\tag{56}$$

记 $\xi^n=P_h\boldsymbol{v}^n-\boldsymbol{v}_h^n$, $\zeta^n=r_hZ^n-Z_h^n$, $\chi^n=r_hz_{\mathrm{b}}^n-z_{\mathrm{b}h}^n$ 及 $\pi^n=R_hS^n-S_h^n$. 由(40)、(42)、(43)、(49)、(53)、Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}&(\zeta^n,\zeta^n)=(r_hZ^n-Z^n,\zeta^n)+(Z^n-Z_h^n,\zeta^n)=\\&\qquad(Z^{n-1}-Z_h^{n-1},\zeta^n)-\Delta t(Z^n\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{n-1}-Z_h^n\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h^{n-1},\zeta^n)=\\&\qquad(\zeta^{n-1},\zeta^n)-\Delta t(\zeta^n\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h^{n-1},\zeta^n)-\Delta t((Z^n-r_hZ^n)\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{n-1}+\\&\qquad r_hZ^n\operatorname{div}(\boldsymbol{v}^{n-1}-\boldsymbol{v}_h^{n-1}),\zeta^n)\leqslant\\&\qquad(\zeta^{n-1},\zeta^n)+C\Delta t\|\zeta^n\|_0^2+\frac{\theta_0\Delta t}{4}\|\nabla(\boldsymbol{v}^{n-1}-\boldsymbol{v}_h^{n-1})\|_0^2+\\&\qquad C\Delta t\|Z^n-Z_h^n\|_0^2\leqslant\\&\qquad(\zeta^{n-1},\zeta^n)+C\Delta t\|\zeta^n\|_0^2+Ch^{2(m+1)}\Delta t+\Delta t\frac{\theta_0}{2}\|\nabla\xi^{n-1}\|_0^2,\end{aligned}\tag{57}$$

其中 θ_0 和下文用到的 $\theta_i(i=1,2,\cdots)$ 是可以任意选取的小正数. 利用公式 $a(a-b)=[a^2-b^2+(a-b)^2]/2$ 可得

$$\begin{aligned}&\|\zeta^n\|_0^2-\|\zeta^{n-1}\|_0^2+\|\zeta^n-\zeta^{n-1}\|_0^2\leqslant\\&\qquad C\Delta t\|\zeta^n\|_0^2+Ch^{2(m+1)}\Delta t+\Delta t\theta_0\|\nabla\xi^{n-1}\|_0^2.\end{aligned}\tag{58}$$

当 Δt 足够小, 例如 $C\Delta t\leqslant1/2$ 时, 对这个不等式从 1 到 n 作和, 并注意到 $\zeta^0=0$ 可得

$$\begin{aligned}&\|\zeta^n\|_0^2+\sum_{i=1}^{n}\|\zeta^i-\zeta^{i-1}\|_0^2\leqslant\\&\qquad C\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\zeta^i\|_0^2+Ch^{2(m+1)}+2\Delta t\theta_0\sum_{i=0}^{n-1}\|\nabla\xi^i\|_0^2.\end{aligned}\tag{59}$$

在引理 4 中取 $a_n = \|\zeta^n\|_0^2$, $b_n = \sum_{i=1}^{n}\|\zeta^i - \zeta^{i-1}\|_0^2$ 和 $c_n = 2\Delta t\theta_0\sum_{i=0}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2 + Ch^{2m+2}$, 定义 $b_0 = 0$, 则 $a_0 + b_0 \leqslant c_0$, 从而由引理 4 可得

$$\|\zeta^n\|_0^2 \leqslant Ch^{2(m+1)} + C\Delta t\theta_0\sum_{i=0}^{n-1}\|\nabla\xi^i\|_0^2. \tag{60}$$

由(39)、(42)、(43)、(49)、(54)、Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}(\xi^n, \xi^n) = {} & (P_h\boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{v}^n, \xi^n) + (\boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{v}_h^n, \xi^n) = \\ & -f\Delta t(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{v}_h^n), \xi^n) - A\Delta t(\nabla(\boldsymbol{v}^n - \boldsymbol{v}_h^n), \nabla\xi^n) - \\ & C_{\mathrm{D}}\Delta t(|\boldsymbol{v}^{n-1}|\boldsymbol{v}^n/Z^n - |\boldsymbol{v}_h^{n-1}|\boldsymbol{v}_h^n/Z_h^n, \xi^n) + \\ & (\boldsymbol{v}^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{v}_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})), \xi^n) + \\ & g\Delta t(Z^n + z_{\mathrm{b}}^n - Z_h^n + z_{\mathrm{b}h}^n, \mathrm{div}\xi^n) \leqslant \\ & Ch^{2(m+1)}\Delta t + C\Delta t\|\xi^n\|_0^2 - \frac{A\Delta t}{2}\|\nabla\xi^n\|_0^2 + C\Delta t\|\zeta^n\|_0^2 + \\ & C\Delta t\|\chi^n\|_0^2 + (\boldsymbol{v}^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{v}_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})), \xi^n).\end{aligned} \tag{61}$$

利用中值定理、(45)和(49)可得

$$\|\boldsymbol{v}^m(X_h^m) - \boldsymbol{v}^m(X^m)\|_0 \leqslant \|\nabla\boldsymbol{v}\|_{0,\infty}\|X_h^m - X^m\|_0 \leqslant C\Delta t\|\boldsymbol{v}^m - \boldsymbol{v}_h^m\|_0. \tag{62}$$

当 Δt 足够小时, 由(45)可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}_h^m(X_h^m) - \boldsymbol{v}^m(X_h^m)\|_0 = {} & \|\boldsymbol{v}_h^m(\boldsymbol{x} + \Delta t\boldsymbol{v}_h^m) - \boldsymbol{v}^m(\boldsymbol{x} + \Delta t\boldsymbol{v}_h^m)\|_0 \leqslant \\ & \|\boldsymbol{v}^m(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{v}_h^m(\boldsymbol{x})\|_0.\end{aligned} \tag{63}$$

这样, 当 $h^2 = O(\Delta t)$ 时, 由(42)和(61)可得

$$\begin{aligned}\|\xi^n\|_0^2 \leqslant {} & Ch^{2(m+1)}\Delta t + C\Delta t\|\xi^n\|_0^2 - \frac{A\Delta t}{2}\|\nabla\xi^n\|_0^2 + C\Delta t\|\zeta^n\|_0^2 + \\ & C\Delta t\|\chi^n\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\xi^n\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\xi^{n-1}\|_0^2,\end{aligned} \tag{64}$$

即

$$\begin{aligned}& \|\xi^n\|_0^2 - \|\xi^{n-1}\|_0^2 + A\Delta t\|\nabla\xi^n\|_0^2 \leqslant \\ & \quad Ch^{2(m+1)}\Delta t + C\Delta t\|\xi^n\|_0^2 + C\Delta t(\|\zeta^n\|_0^2 + \|\chi^n\|_0^2).\end{aligned} \tag{65}$$

当 Δt 足够小, 例如 $C\Delta t \leqslant 1/2$ 时, 对这个不等式从 1 到 n 作和, 并注意到 $\xi^0 = 0$ 和 $\chi^0 = 0$ 可得

$$\begin{aligned}& \|\xi^n\|_0^2 + A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2 \leqslant \\ & \quad Ch^{2(m+1)} + C\Delta t\sum_{i=1}^{n-1}\|\xi^i\|_0^2 + C\Delta t\sum_{i=0}^{n}(\|\zeta^i\|_0^2 + \|\chi^i\|_0^2).\end{aligned} \tag{66}$$

在引理 4 中取 $a_n = \|\xi^n\|_0^2$, $b_n = A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2$ 和 $c_n = Ch^{2m+2} + C\Delta t\sum_{i=1}^{n}(\|\zeta^i\|_0^2 + \|\chi^i\|_0^2)$, 定义 $b_0 = 0$, 则有 $a_0 + b_0 \leqslant c_0$, 因此, 由引理 4 可得

$$\|\xi^n\|_0^2 + A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2 \leqslant Ch^{2(m+1)} + C\Delta t\sum_{i=1}^{n}(\|\zeta^i\|_0^2 + \|\chi^i\|_0^2). \tag{67}$$

由(55)、(41)、(44)、(49)、Hölder 不等式、Cauchy 不等式、迹定理[9~10]和(43), 与(62)~(64)同理可得

$$\|\pi^n\|_0^2 = (R_hS^n - S^n, \pi^n) + (S^n - S_h^n, \pi^n) =$$

$$\begin{aligned}&-\Delta t\varepsilon(\nabla(S^n-S_h^n),\nabla\pi^n)-\Delta t\alpha\omega(S^n/Z^n-S_h^n/Z_h^n,\pi^n)-\\&\Delta t\kappa\langle S^n-S_h^n,\pi^n\rangle_{\partial\Omega_1}+\Delta t\alpha\omega(S^*/Z^n-S^*/Z_h^n,\pi^n)+\\&(S^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x}))-S_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})),\pi^n)\leqslant\\&Ch^{2(m+1)}\Delta t-\frac{\Delta t\varepsilon}{2}\|\nabla\pi^n\|_0^2+C\Delta t\|\pi^n\|_0^2+\frac{\Delta t\theta_1}{2}\|\zeta^n\|_0^2+\\&\frac{1}{2}(\|\pi^n\|_0^2+\|\pi^{n-1}\|_0^2)+\frac{\Delta t\theta_1}{2}\|\xi^{n-1}\|_0^2.\end{aligned}\tag{68}$$

即

$$\begin{aligned}&\|\pi^n\|_0^2-\|\pi^{n-1}\|_0^2+\Delta t\varepsilon\|\nabla\pi^n\|_0^2\leqslant\\&Ch^{2(m+1)}\Delta t+C\Delta t\|\pi^n\|_0^2+\Delta t\theta_1\|\zeta^n\|_0^2.\end{aligned}\tag{69}$$

当 Δt 足够小, 例如 $C\Delta t\leqslant 1/2$ 时, 对这个不等式从 1 到 n 作和, 并注意到 $\pi^0=0$ 可得

$$\begin{aligned}&\|\pi^n\|_0^2+\Delta t\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\pi^i\|_0^2\leqslant\\&Ch^{2(m+1)}+C\Delta t\sum_{i=1}^{n-1}\|\pi^i\|_0^2+2\Delta t\theta_1\sum_{i=0}^{n}\|\zeta^i\|_0^2.\end{aligned}\tag{70}$$

在引理 4 中取 $a_n=\|\pi^n\|_0^2$, $b_n=\Delta t\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\pi^i\|_0^2$ 和 $c_n=2\Delta t\theta_1\sum_{i=0}^{n}\|\zeta^i\|_0^2+Ch^{2m+2}$, 定义 $b_0=0$, 则有 $a_0+b_0\leqslant c_0$, 因此, 由引理 4 可得

$$\|\pi^n\|_0^2+\Delta t\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\pi^i\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+C\Delta t\theta_1\sum_{i=0}^{n}\|\zeta^i\|_0^2.\tag{71}$$

由(40)、(56)、(43)、(44)、Hölder 不等式和 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}&(\chi^n,\chi^n)=(r_hz_{\mathrm{b}}^n-z_{\mathrm{b}}^n,\chi^n)+(z_{\mathrm{b}}^n-z_{\mathrm{b}h}^n,\chi^n)=\\&(z_{\mathrm{b}}^{n-1}-z_{\mathrm{b}h}^{n-1},\chi^n)+\Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S^n-S_h^n,\chi^n)=\\&(\chi^{n-1},\chi^n)+\Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S^n-R_hS^n,\chi^n)+\Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(\pi^n,\chi^n)\leqslant\\&(\chi^{n-1},\chi^n)+Ch^{2(m+1)}\Delta t+C\Delta t\|\chi^n\|_0^2+\frac{\theta_2\Delta t}{4}\|\pi^n\|_0^2.\end{aligned}\tag{72}$$

对这个不等式利用等式 $a(a-b)=[a^2-b^2+(a-b)^2]/2$ 可得

$$\begin{aligned}&\|\chi^n\|_0^2-\|\chi^{n-1}\|_0^2+\|\chi^n-\chi^{n-1}\|_0^2\leqslant\\&Ch^{2(m+1)}\Delta t+C\Delta t\|\chi^n\|_0^2+\frac{\theta_2\Delta t}{2}\|\pi^n\|_0^2.\end{aligned}\tag{73}$$

又当 Δt 足够小, 例如 $C\Delta t\leqslant 1/2$ 时, 这个不等式从 1 到 n 作和, 并注意到 $\chi^0=0$ 可得

$$\begin{aligned}&\|\chi^n\|_0^2+\sum_{i=1}^{n}\|\chi^i-\chi^{i-1}\|_0^2\leqslant\\&Ch^{2(m+1)}+C\Delta t\sum_{i=0}^{n-1}\|\chi^i\|_0^2+\theta_2\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\pi^i\|_0^2.\end{aligned}\tag{74}$$

又在引理 4 中取 $a_n=\|\chi^n\|_0^2$, $b_n=\sum_{i=1}^{n}\|\chi^i-\chi^{i-1}\|_0^2$ 和 $c_n=Ch^{2(m+1)}+\theta_2\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\pi^i\|_0^2$, 定义 $b_0=0$, 则 $a_0+b_0\leqslant c_0$, 这样, 由引理 4 可得

$$\|\chi^n\|_0^2+\sum_{i=1}^{n}\|\chi^i-\chi^{i-1}\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+C\theta_2\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\pi^i\|_0^2.\tag{75}$$

将(60)代入(67)可得

$$\|\xi^n\|_0^2+A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+$$
$$C\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\chi^i\|_0^2+C\theta_0\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2. \tag{76}$$

将(60)代入(71)可得

$$\|\pi^n\|_0^2+\Delta t\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\pi^i\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+C\theta_1\theta_0\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2. \tag{77}$$

将(77)代入(75)可得

$$\|\chi^n\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+C\theta_2\theta_1\theta_0\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2. \tag{78}$$

将(78)代入(76)可得

$$\|\xi^n\|_0^2+A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}+\theta_3\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\chi^i\|_0^2, \tag{79}$$

其中 $\theta_3=C\theta_0+C\theta_0C\theta_1\theta_2$. 在(79)中取 $\theta_3\leqslant A/2$ 可得

$$\|\xi^n\|_0^2+\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\xi^i\|_0^2\leqslant Ch^{2(m+1)}. \tag{80}$$

将(80)代入(60)、(78)和(77)可得

$$\|\zeta^n\|_0+\|\chi^n\|_0\leqslant Ch^{m+1}, \tag{81}$$

$$\|\pi^n\|_0+\Delta t^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\|\nabla\pi^i\|_0\leqslant Ch^{m+1}. \tag{82}$$

将(42)、(43)、(44)与(80)、(81)、(82)结合可得(50)、(52)、(51). 定理5证毕.

下面考虑问题(Ⅰ)和问题(Ⅰ^n)之间的误差估计. 我们有下面的结论.

定理6　在(A_1)~(A_6)假定下, 如果问题(Ⅰ)的解 $(\boldsymbol{v}, Z, z_b, S)$ 满足

$$\|\nabla\boldsymbol{v}_t\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|\boldsymbol{v}_{tt}\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|Z_{tt}\|_{L^\infty(L^\infty)}+$$
$$\|z_{btt}\|_{L^\infty(L^\infty)}+\|S_{tt}\|_{L^\infty(L^\infty)}\leqslant M_4, \tag{83}$$

那么, 下面误差估计成立

$$\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0+\Delta t^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i)\|_0\leqslant C\Delta t, \tag{84}$$

$$\|S(t_n)-S^n\|_0+\Delta t^{1/2}\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(S(t_i)-S^i)\|_0\leqslant C\Delta t, \tag{85}$$

$$\|Z(t_n)-Z^n\|_0+\|z_b(t_n)-z_b^n\|_0\leqslant C\Delta t, \tag{86}$$

其中 $y_{tt}=\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2$, $(\boldsymbol{v}^n, Z^n, z_b^n, S^n)$ 是问题(Ⅰ^n)的解, $(\boldsymbol{v}(t_n), Z(t_n), z_b(t_n), S(t_n))$ 是问题(Ⅰ)的解在 $t=t_n$ 时刻的值.

证明　利用 Taylor 展开式可得

$$\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}t}=\frac{1}{\Delta t}[y(t_m)-y(X^{m-1})]+\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{m-1}}^{t_m}(t-t_m)y_{tt}\mathrm{d}t, \tag{87}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{\Delta t}[y(t_m)-y(t_{m-1})]+\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{m-1}}^{t_m}(t-t_m)y_{tt}\mathrm{d}t. \tag{88}$$

在问题(Ⅰ)中取 $t=t_n$, 而且与问题(Ⅰ^n)相减, 并利用(87)~(88)可得下面误差方程

$$(Z(t_n)-Z^n,\Phi)+\Delta t(Z(t_n)\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(t_n)-Z^n\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}^{n-1},\Phi)=$$

$$(Z(t_{n-1})-Z^{n-1},\phi)+\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(Z_{tt},\phi)\,\mathrm{d}t,\qquad\forall\phi\in Y_2,\tag{89}$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n,\boldsymbol{w})+f\Delta t(\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n),\boldsymbol{w})+A\Delta t(\nabla(\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n),\nabla\boldsymbol{w})+\\&\quad C_{\mathrm{D}}\Delta t(|\boldsymbol{v}(t_n)|\boldsymbol{v}(t_n)/Z(t_n)-|\boldsymbol{v}^{n-1}|\boldsymbol{v}^n/Z^n,\boldsymbol{w})=\\&\quad(\boldsymbol{v}(X^{n-1},t_{n-1})-\boldsymbol{v}^{n-1}(X^{n-1}),\boldsymbol{w})+g\Delta t(Z(t_n)+z_{\mathrm{b}}(t_n)-\\&\quad Z^n-z_b^n,\operatorname{div}\boldsymbol{w})+\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(\boldsymbol{v}_{tt},\boldsymbol{w})\,\mathrm{d}t,\qquad\forall\boldsymbol{w}\in Y_1,\end{aligned}\tag{90}$$

$$\begin{aligned}&(S(t_n)-S^n,\psi)+\Delta t\varepsilon(\nabla(S(t_n)-S^n),\nabla\psi)+\Delta t\kappa\langle S(t_n)-S^n,\psi\rangle_{\partial\Omega_1}+\\&\quad\Delta t\alpha\omega(S(t_n)/Z(t_n)-S^n/Z^n,\psi)=\\&\quad(S(X^{n-1},t_{n-1})-S^{n-1}(X^{n-1}),\psi)+\Delta t\alpha\omega(S^*/Z(t_n)-S^*/Z^n,\psi)+\\&\quad\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(S_{tt},\psi)\,\mathrm{d}t,\qquad\forall\psi\in Y_{03},\end{aligned}\tag{91}$$

$$\begin{aligned}&(z_{\mathrm{b}}(t_n)-z_{\mathrm{b}}^n,\eta)=(z_{\mathrm{b}}(t_{n-1})-z_{\mathrm{b}}^{n-1},\eta)+\Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S(t_n)-S^n,\eta)+\\&\quad\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(z_{\mathrm{b}tt},\eta)\,\mathrm{d}t,\qquad\forall\eta\in Y_2.\end{aligned}\tag{92}$$

在(89)中取 $\phi=Z(t_n)-Z^n$，并利用等式 $a(a-b)=[a^2-b^2+(a-b)^2]/2$ 和不等式(83)、(13)、Hölder 不等式、Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}&\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2-\|Z(t_{n-1})-Z^{n-1}\|_0^2+\\&\quad\|Z(t_n)-Z^n-Z(t_{n-1})+Z^{n-1}\|_0^2=\\&\quad2\Big[\Delta t(Z(t_n)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(t_n)-Z^n\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{n-1},Z^n-Z(t_n))+\\&\quad\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(Z_{tt},Z(t_n)-Z^n)\,\mathrm{d}t\Big]\leqslant\\&\quad C\Delta t^3+C\Delta t\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2+\frac{\theta_4\Delta t}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_{n-1})-\boldsymbol{v}^{n-1})\|_0^2.\end{aligned}\tag{93}$$

当 Δt 足够小，例如 $C\Delta t\leqslant1/2$ 时，对(93)从 1 到 n 作和，并注意到 $Z(t_0)-Z^0=0$ 可得

$$\begin{aligned}&\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2+\sum_{i=1}^{n}\|Z(t_i)-Z^i-Z(t_{i-1})+Z^{i-1}\|_0^2\leqslant\\&\quad C\Delta t^3+C\Delta t\sum_{i=0}^{n-1}\|Z(t_i)-Z^i\|_0^2+\theta_4\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i)\|_0^2.\end{aligned}\tag{94}$$

在引理 4 中取 $a_n=\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2$，$b_n=\sum_{i=1}^{n}\|Z(t_i)-Z^i-Z(t_{i-1})+Z^{i-1}\|_0^2$ 和 $c_n=C\Delta t^3+\theta_4\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i)\|_0^2$，定义 $\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_0)-\boldsymbol{v}^0)\|_0=0$ 和 $b_0=0$，那么 $a_0+b_0\leqslant c_0$，因此，由引理 4 可得

$$\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2\leqslant C\Delta t^2+C\theta_4\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i)\|_0^2.\tag{95}$$

在(90)中取 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n$，与(61)～(64)同理可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2+A\Delta t\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n)\|_0^2=\\&\quad(\boldsymbol{v}(X^{n-1},t_{n-1})-\boldsymbol{v}^{n-1}(X^{n-1}),\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n)-\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&C_{\mathrm{D}}\Delta t(|\boldsymbol{v}(t_n)|\boldsymbol{v}(t_n)/Z(t_n)-|\boldsymbol{v}^{n-1}|\boldsymbol{v}^n/Z^n,\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n)+\\
&\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(\boldsymbol{v}_{tt},\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n)\mathrm{d}t+g\Delta t(Z(t_n)+\\
&z_{\mathrm{b}}(t_n)-Z^n-z_{\mathrm{b}}^n,\operatorname{div}(\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n))\leqslant\\
&C\Delta t^3+C\Delta t\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2+C\Delta t\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2+\\
&C\Delta t\|z_{\mathrm{b}}(t_n)-z_{\mathrm{b}}^n\|_0^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2+\\
&\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}(t_{n-1})-\boldsymbol{v}^{n-1}\|_0^2+\frac{A\Delta t}{2}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n)\|_0^2. \qquad (96)
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2-\|\boldsymbol{v}(t_{n-1})-\boldsymbol{v}^{n-1}\|_0^2+A\Delta t\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n)\|_0^2\leqslant\\
&C\Delta t^3+C\Delta t\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2+C\Delta t\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2+\\
&C\Delta t\|z_{\mathrm{b}}(t_n)-z_{\mathrm{b}}^n\|_0^2. \qquad (97)
\end{aligned}
$$

再当 Δt 足够小, 例如 $C\Delta t\leqslant 1/2$ 时, 对(97) 从 1 到 n 作和, 并注意到 $\boldsymbol{v}(t_0)-\boldsymbol{v}^0=0$, $Z(t_0)-Z^0=0$ 和 $z_{\mathrm{b}}(t_0)-z_{\mathrm{b}}^0=0$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2+A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i)\|_0^2\leqslant\\
&C\Delta t^2+C\Delta t\sum_{i=0}^{n-1}\|\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i\|_0^2+C\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|Z(t_i)-Z^i\|_0^2+\\
&C\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|z_{\mathrm{b}}(t_i)-z_{\mathrm{b}}^i\|_0^2. \qquad (98)
\end{aligned}
$$

在引理 4 中取 $a_n=\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2$, $b_n=A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i)\|_0^2$ 和 $c_n=C\Delta t^2+C\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|Z(t_i)-Z^i\|_0^2+C\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|z_{\mathrm{b}}(t_i)-z_{\mathrm{b}}^i\|_0^2$, 定义 $b_0=0$, 则 $a_0+b_0\leqslant c_0$, 那么, 再由引理 4 可得

$$
\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}(t_n)-\boldsymbol{v}^n\|_0^2+A\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(\boldsymbol{v}(t_i)-\boldsymbol{v}^i)\|_0^2\leqslant\\
&C\Delta t^2+C\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|Z(t_i)-Z^i\|_0^2+C\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|z_{\mathrm{b}}(t_i)-z_{\mathrm{b}}^i\|_0^2. \qquad (99)
\end{aligned}
$$

在(91) 中取 $\psi=S(t_n)-S^n$, 与(61) ~ (64) 同理可得

$$
\begin{aligned}
&\|S(t_n)-S^n\|_0^2+\varepsilon\Delta t\|\nabla(S(t_i)-S^i)\|_0^2+\Delta t\kappa\|S(t_n)-S^n\|_{0,\partial\Omega_1}^2=\\
&(S^{n-1}(X^{n-1}(\boldsymbol{x}))-S_h^{n-1}(X_h^{n-1}(\boldsymbol{x})),S(t_n)-S^n)-\\
&\Delta t\alpha\omega(S(t_n)/Z(t_n)-S^n/Z^n,S(t_n)-S^n)+\\
&\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(S_{tt},S(t_n)-S^n)\mathrm{d}t+\\
&\Delta t\alpha\omega(S^*/Z(t_n)-S^*/Z^n,S(t_n)-S^n)\leqslant\\
&C\Delta t^3+C\Delta t\|S(t_n)-S^n\|_0^2+\frac{\theta_6\Delta t}{4}\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2+\\
&\frac{1}{2}\|S(t_n)-S^n\|_0^2+\frac{1}{2}\|S(t_{n-1})-S^{n-1}\|_0^2. \qquad (100)
\end{aligned}
$$

即

$$\|S(t_n)-S^n\|_0^2-\|S(t_{n-1})-S^{n-1}\|_0^2+\varepsilon\Delta t\|\nabla(S(t_n)-S^n)\|_0^2\leqslant$$
$$C\Delta t^3+C\Delta t\|S(t_n)-S^n\|_0^2+\frac{\theta_6\Delta t}{2}\|Z(t_n)-Z^n\|_0^2. \tag{101}$$

再当 Δt 足够小, 例如 $C\Delta t\leqslant 1/2$ 时, 对(101)从1到 n 作和, 并注意到 $S(t_0)-S^0=0$ 和 $Z(t_0)-Z^0=0$ 可得

$$\|S(t_n)-S^n\|_0^2+\varepsilon\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(S(t_i)-S^i)\|_0^2\leqslant$$
$$C\Delta t^2+C\Delta t\sum_{i=0}^{n-1}\|S(t_i)-S^i\|_0^2+\theta_6\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|Z(t_i)-Z^i\|_0^2. \tag{102}$$

又在引理4中取 $b_n=\varepsilon\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(S(t_i)-S^i)\|_0^2$, $c_n=C\Delta t^2+\theta_6\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|Z(t_i)-Z^i\|_0^2$ 和 $a_n=\|S(t_n)-S^n\|_0^2$, 定义 $b_0=0$, 则 $a_0+b_0\leqslant c_0$, 于是, 由引理4可得

$$\|S(t_n)-S^n\|_0^2+\varepsilon\Delta t\sum_{i=1}^{n}\|\nabla(S(t_i)-S^i)\|_0^2\leqslant$$
$$C\Delta t^2+C\theta_6\Delta t\sum_{i=0}^{n}\|Z(t_i)-Z^i\|_0^2. \tag{103}$$

在(92)中取 $\eta=z_b(t_n)-z_b^n$, 由Hölder不等式、Cauchy不等式和(83)可得

$$(z_b(t_n)-z_b^n,z_b(t_n)-z_b^n)-(z_b(t_{n-1})-z_b^{n-1},z_b(t_n)-z_b^n)=$$
$$\Delta t\frac{\alpha\omega}{\rho_1}(S(t_n)-S^n,z_b(t_n)-z_b^n)+\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_n-t)(z_{btt},z_b(t_n)-z_b^n)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C\Delta t^3+C\Delta t\|z_b(t_n)-z_b^n\|_0^2+\frac{\theta_7\Delta t}{4}\|S(t_n)-S^n\|_0^2. \tag{104}$$

再在(104)中利用 $a(a-b)=[a^2-b^2+(a-b)^2]/2$ 可得

$$\|z_b(t_n)-z_b^n\|_0^2-\|z_b(t_{n-1})-z_b^{n-1}\|_0^2+$$
$$\|z_b(t_n)-z_b^n-(z_b(t_{n-1})-z_b^{n-1})\|_0^2\leqslant$$
$$C\Delta t^3+C\Delta t\|z_b(t_n)-z_b^n\|_0^2+\frac{\theta_7\Delta t}{4}\|S(t_n)-S^n\|_0^2. \tag{105}$$

又当 Δt 足够小, 例如 $C\Delta t\leqslant 1/2$ 时, 对(105)从1到 n 作和, 并注意到 $S(t_0)-S^0=0$ 和 $z_b(t_0)-z_b^0=0$ 可得

$$\|z_b(t_n)-z_b^n\|_0^2+\sum_{i=1}^{n}\|z_b(t_i)-z_b^i-(z_b(t_{i-1})-z_b^{i-1})\|_0^2\leqslant$$
$$C\Delta t^2+C\Delta t\sum_{i=1}^{n-1}\|z_b(t_i)-z_b^i\|_0^2+\theta_7\sum_{i=1}^{n}\Delta t\|S(t_i)-S^i\|_0^2. \tag{106}$$

在引理4中取 $a_n=\|z_b(t_n)-z_b^n\|_0^2$, $b_n=\sum_{i=1}^{n}\|z_b(t_i)-z_b^i-(z_b(t_{i-1})-z_b^{i-1})\|_0^2$ 和 $c_n=C\Delta t^2+\theta_7\sum_{i=0}^{n}\Delta t\|S(t_i)-S^i\|_0^2$, 定义 $b_0=0$, 则 $a_0+b_0\leqslant c_0$, 因此, 由引理4可得

$$\|z_b(t_n)-z_b^n\|_0^2\leqslant C\Delta t^2+C\theta_7\sum_{i=1}^{n}\Delta t\|S(t_i)-S^i\|_0^2. \tag{107}$$

将(95)代入(103)可得

$$\| S(t_n) - S^n \|_0^2 + \varepsilon \Delta t \sum_{i=1}^{n} \| \nabla (S(t_i) - S^i) \|_0^2 \leqslant$$

$$C \Delta t^2 + C\theta_4\theta_6 \Delta t \sum_{i=0}^{n} \| \nabla (\boldsymbol{v}(t_i) - \boldsymbol{v}^i) \|_0^2 \cdot \tag{108}$$

将(108)代入(107)可得

$$\| z_{\mathrm{b}}(t_n) - z_{\mathrm{b}}^n \|_0^2 \leqslant C \Delta t^2 + C\theta_4\theta_6\theta_7 \Delta t \sum_{i=0}^{n} \| \nabla (\boldsymbol{v}(t_i) - \boldsymbol{v}^i) \|_0^2 \cdot \tag{109}$$

将(109)和(95)代入(99)可得

$$\| \boldsymbol{v}(t_n) - \boldsymbol{v}^n \|_0^2 + A \Delta t \sum_{i=1}^{n} \| \nabla (\boldsymbol{v}(t_i) - \boldsymbol{v}^i) \|_0^2 \leqslant$$

$$C \Delta t^2 + \theta_{10} \Delta t \sum_{i=0}^{n} \| \nabla (\boldsymbol{v}(t_i) - \boldsymbol{v}^i) \|_0^2, \tag{110}$$

其中 $\theta_{10} = C\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7 + C\theta_4$• 在(110)中取 $\theta_{10} \leqslant A/2$ 可得(84)• 将(84)代入(108)、(109)和(95)可得(85)和(86)• 定理6证毕•

结合定理5和定理6可得下一个结论•

定理7　在定理5~6的条件下, 下面误差估计成立:

$$\| \boldsymbol{v}(t_n) - \boldsymbol{v}_h^n \|_0 + \Delta t^{1/2} \sum_{i=1}^{n} \| \nabla (\boldsymbol{v}(t_i) - \boldsymbol{v}_h^i) \|_0 \leqslant C(\Delta t + h^{m+1}), \tag{111}$$

$$\| S(t_n) - S_h^n \|_0 + \Delta t^{1/2} \sum_{i=1}^{n} \| \nabla (S(t_i) - S_h^i) \|_0 \leqslant C(\Delta t + h^{m+1}), \tag{112}$$

$$\| Z(t_n) - Z_h^n \|_0 + \| z_{\mathrm{b}}(t_n) - z_{\mathrm{b}h}^n \|_0 \leqslant C(\Delta t + h^{m+1}) \quad (n = 1, 2, \cdots, L), \tag{113}$$

其中 $(\boldsymbol{v}_h^n, Z_h^n, z_{\mathrm{b}h}^n, S_h^n)$ 是问题(I_h^n)的解, 而$(\boldsymbol{v}(t_n), Z(t_n), z_{\mathrm{b}}(t_n), S(t_n))$是问题(Ⅰ)的解在 $t = t_n$ 时刻的值•

3　结　　论

我们已经利用输运_扩散方法(即 Lagrange_Galerkin)处理了包含泥沙冲淤的非线性浅水方程, 并导出时间沿特征方向离散的全离散化混合有限元解的存在性和误差估计• 我们将在第(Ⅲ)部分给出一些模拟长江三角洲的水流和泥沙冲淤的数值模拟实例•

[参　考　文　献]

[1] Boris J P, Book D L. Flux corrected transport[J]. SHASTA J Comput Phys, 1973, **2**(1): 36—69.

[2] Pironneau O. On the transport_diffusion algorithm and its applications to the Navier_Stokes equations [J]. Numer Math, 1982, **38**(2): 309—332.

[3] Bermúdez A, Rodriguez C, Vilar M A. Solving shallow water equations by a mixed implicit finite element method[J]. IMA J Numer Anal, 1991, **11**(1): 79—97.

[4] 罗振东, 朱江, 曾庆存, 等. 包含泥沙冲淤的浅水方程的混合有限元法(Ⅰ)——时间连续的情形[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(1): 74—84.

[5] 忻孝康, 刘儒勋, 蒋伯诚. 计算流体动力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989.

[6] ZENG Qing_cun. Silt sedimentation and relevant engineering problem—an example of natural cybernetics[A]. In: Proceeding of the Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics [C]. ICIAM95 held in Hamburg, Academic Verlag, 1995, 463—487.

[7] Chipada S, Dawson C N, Martinez M L, et al. Finite element approximations to the system of shallow water equations—Ⅰ: Continuous_time a priori error estimates[J]. SIAM J Numer Anal, 1998, **35**(2): 692—711.

[8] Adams R A. Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.

[9] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North_Holland, 1978.

[10] 罗振东. 有限元混合法理论基础及其应用[M]. 济南: 山东教育出版社, 1996.

[11] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer_Verlag, 1991.

[12] Girault V, Raviart P A. Finite Element Approximations of the Navier_Stokes Equations[M]. Berlin Beidelberg, New York: Springer_Verlag, 1979.

Mixed Finite Element Methods for the Shallow Water Equations Including Current and Silt Sedimentation (Ⅱ)—The Discrete_Time Case Along Characteristics

LUO Zhen_dong[1,2], ZHU Jiang[2], ZENG Qing_cun[2],
XIE Zheng_hui[2]

(1. Department of Mathematics, Capital Normal University,
Beijing 100037, P.R.China;
2. Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100029, P.R.China)

Abstract: The mixed finite element(MFE) methods for a shallow water equation system consisting of water dynamics equations, silt transport equation, and the equation of bottom topography change were derived. A fully discrete MFE scheme for the discrete_time along characteristics is presented and error estimates are established. The existence and convergence of MFE solution of the discrete current velocity, elevation of the bottom topography, thickness of fluid column, and mass rate of sediment is demonstrated.

Key words: mixed finite element method; shallow water equation; error estimate; current and silt sedimentation; characteristics method