应用数学和力学，第16卷 第3期（1995年3月）
Adplied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于湍流理论中的不封闭性的讨论*

蔡树棠 刘宇陆

（上海市应用数学和力学研究所，上海大学，上海 200072）

（1994年3月9日收到）

摘 要

有一种观点认为湍流的不封闭性是由于N-S方程的非线性，这是一似是而非的错误说法。因为工程上要求的量并不仅仅限于湍流的平均速度和平均压力，即使方程式是线性的，也无法把工程上要求的这些量逐个求出来。本文论证了湍流的不封闭性来源于目前的湍流理论中缺少了一个与实际情况符合的有关分布函数，并且进一步说明了湍流模式理论的局限性和用N-S方程直接计算机模拟亦是相当困难的原因。

关键词 湍流 不封闭性 分布函数 模式理论

一、引 言

有一种观点认为湍流理论不封闭的困难是由于N-S方程的非线性引起的。这种观点初看起来似乎很正确，因为如果方程中不存在非线性项，雷诺平均时就不可能产生雷诺应力项，平均以后的方程组仍旧是四个方程，而未知变量则为$\bar{U}_i$和$\bar{P}$四个，所以并不存在方程组的不封闭的问题。但根本的问题在于许多工程实际并不仅仅要求知道$\bar{U}_i$和$\bar{P}$而已，而且还要求知道更多的其它物理量。这样就给原来的理论提出了一个理论不完整的困难，而就其实质来说仍旧是所谓的不封闭的困难。因此把不封闭困难归结为N-S方程的非线性，看起来好象是正确的，实质上则是错误的。

本文主要论述了建立完整的湍流理论需要的三个重要组成部分：

（1） 雷诺方程和平均流动的连续方程（对变密度的湍流运动，还要加上密度的方程、物态方程及本构关系等等，此处我们仅就不可压情形进行讨论，至于变密度的情况，可以同样进行讨论），即：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{U}_i}{\partial t}+\bar{U}_i\dfrac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2\bar{U}_i-\dfrac{\partial\,\overline{U_iU_j}}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_j}=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

（2） 脉动速度方程和脉动速度连续方程，即：

* 国家自然科学基金资助项目。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\bar{U}_j\dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}+u_j\dfrac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i+\dfrac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j} \end{cases} \tag{1.2}$$

（3） 相应的机率分布函数

此外我们还进一步讨论了湍流模式理论的的局限性．同时也指出了利用N-S方程直接模拟是无法解决湍流问题的．

二、湍流理论中必不可少的三个组成部分

1895年雷诺在推导他的著名方程时是仿照当时已经发展得相当完备的分子运动理论来进行的．但他当时并没有弄清楚湍流理论和分子运动理论之间的根本区别．而这两个理论之间的主要区别有下列两点：

（1） 在弛豫时间上，分子碰撞只有10^{-11}秒，而湍流的衰减时间则往往长达十几分钟以上．由于这个原因，所以分子运动有关的理论中一般只需考虑当时的条件，而并不需要考虑和弛豫现象有关的滞后效应．而和湍流有关的现象则一般必须考虑和弛豫现象有关的滞后效应（也就是通常所说的考虑它的历史过程）．

（2） 在机率分布函数上，分子运动有著名的玻尔兹曼微积分方程和麦克斯维尔分布律．有了统计分布率以后，就可以通过积分得到各阶矩和一些物理量，以及物理量和各阶矩之间的关系，而不会出现不封闭的困难．但是湍流既没有合乎实际的机率分布函数，也没有合乎实际的机率分布函数的方程式，并且它的分布和正态（高斯）分布相差甚远（这一点可以从均匀各向同性湍流的偏斜系数不等于零，而正态分布则恒等于零看出来）．而且在不同情况下分布函数相差非常大，因此在各阶矩和一些平均物理量之间找不到一定的相互关系，由此而产生了通常所谓的不封闭困难．

另外还有一点，湍流和分子运动也是不相同的，但这一点不同并不是十分主要的．这就是分子运动论中的平均自由路程和热运动速率是压力和温度的函数，而湍流的混合长度和湍流脉动的平均速率则是时间和空间坐标的函数，这一点只能引起求解的困难，而不引起本质困难．

由此可见，湍流的不封闭困难根源在于湍流缺少合乎实际的机率分布函数（当然也包括湍流涡旋数目的不确定性），并不在于N-S方程的非线性的性质．

三、湍流问题的解和机率分布函数的关系

我们分三步来讨论这个问题

（1） 仅仅考虑平均运动方程式

如果我们仅仅考虑平均运动的方程式，即方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{U}_i}{\partial t}+\bar{U}_j\dfrac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}=\dfrac{-1}{\rho}\dfrac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}+\nu\nabla^2\bar{U}_i-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i v_j} \\ \dfrac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j}=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

我们立即可以看出以上方程是无法求解的，因为该方程是不封闭的。

（2） 考虑平均运动方程式和脉动速度方程式，即在(3.1) 式的基础上再加上脉动速度的方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\bar{U}_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+u_j\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+U_j\dfrac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\nabla^2 u_i+\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_j} \\ \dfrac{\partial u_j}{\partial x_j}=0 \end{cases} \tag{3.2}$$

如果将(3.1)与(3.2)相加就回到原来的N-S方程，因此方程是可以求解的，但这样解出的是

$$U_i=\bar{U}_i+u_i,\quad P=\bar{P}+p$$

瞬时量，而我们通常实际工程中常用的是它们的平均值 $\bar{U}_i$，$\bar{P}$ 和其它一些平均量，而不是瞬时值。至于怎样把瞬时值划分成平均值和脉动值仍旧依靠分布函数，而不同的分布函数又对应于不同的平均值和脉动值。

（3） 平均运动方程式，脉动方程式和一定的分布函数（包括δ函数）。

在这种条件下，我们可以参照雷诺原来的想法，用分子运动论中的办法求出各阶矩和一些平均值，但必须强调的是不同的统计规律相应于不同的统计方法，也就会得到不同的平均值。也正是因为这样，在缺少统计分布率的情况下，不可能找到各阶矩和一些物理量平均值之间的确定关系，这样也就导致湍流问题的不封闭性。

四、模式理论的局限性

模式理论就其本质而言是第三节中的第二种简化方案，也就是方程式(3.1)和(3.2)联立求解的简化方法。但是一般求解方程式(3.2) 是相当困难的，变更的方法是由求u_i改变为求u_i各阶矩的方程式，即：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\overline{u_iu_k}+\bar{U}_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_k}+\overline{u_ju_k}\dfrac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+\overline{u_ju_i}\dfrac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}+\dfrac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_iu_ju_k} \\ \quad =-\dfrac{1}{\rho}\left(\overline{\dfrac{\partial p}{\partial x_i}u_k+\dfrac{\partial p}{\partial x_k}u_i}\right)+\nu\nabla^2\overline{u_iu_k} \\ \quad -2\nu\overline{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}} \\ \qquad \vdots \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{4.1}$$

由(4.1)式所包含的物理信息要比 (3.2) 式本身少得多，并且(4.1)式也是不封闭的。由于(4.1)的不封闭性及复杂性，为了求解而引进了一些模化关系式，使方程组封闭，这就是所谓的模式理论。但引入的模化关系式的物理依据是不充分的。特别是这些关系的实验依据有时也是不充分的。因此模式理论的局限性就显得非常明显。同时由(3.1)和(3.2)式联立求解并不能马上得出$\bar{U}_i$ 和 $\bar{P}$，而在(3.1)和(3.2)基础上进行模化而得到的值可能会引起更大的误差。

五、利用N-S方程直接模拟湍流的可能性

这个问题实际上就是第三节中第二种情况所讨论的内容．在上面我们已经说过，即使能把瞬时物理量U_i和P求出，也无法将实验上经常应用的物理量$\bar{U}_i$，$\bar{P}$和其它物理量求出来，因为这些量是和统计分布规律和平均的方法有密切关系的．也许有人会说只要做实验测量一下平均速度，不就可以把平均速度和脉动速度分开了吗？事实的确是这样．但问题是我们想要用数值计算来代替既费钱又费力的实验，而结果又避免不了做实验，那我们的计算不又是白费了吗？事实上我们如果只要通过做物理实验就可以确定平均速度和脉动速度，就不必要进行任何复杂的计算.但要对所有实际流动都进行实验也就不切实际的.

在求解N-S方程的时候，还必须考虑相应的定解条件.在真实的湍流问题里，这些条件是符合一定的统计分布规律的，但这一分布律是预先不知道的．因此想要用有限的例子来代替实际的湍流运动是完全不可能的．曾经有人做过这样的对比，在三百多个计算的流线图的例子中可以找到一张流线图,这张流线图可以在二百多张流动照片中找出一张与其基本相仿．这就说明了要使计算的结果和实验观察到的结果一致是非常困难的．在上面的例子中，计算结果只有$\frac{1}{60000}$的可信度，这是不能使做实际工作的同志去大胆应用计算结果的.所以用N-S方程直接模拟湍流问题是不可能的.

此外，国内外流行的大涡和次尺度涡模拟方法是直接求解N-S方程的简化方法,所以存在着与上述方法同样的困难.

六、结　　论

从以上的讨论可知，湍流不封闭的困难并不是N-S方程的非线性,而是由于已有湍流理论缺少了一个切合实际的统计分布律.

参考文献

[1] 蔡树棠、周光垌、魏中磊、谢象春，湍流研究最近半世纪的一些进展，力学进展，10 (1) (1980)，16—36.

[2] 蔡树棠、林多敏，表示湍流场的一种新设想，应用数学和力学，12 (1) (1991)，91—95.

[3] Launder, B.E.et al, *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, London and New York(1972).

[4] Launder, B.E.et al, *Turbulence Models and Their Applications*, Editions Enrolles(1984).

[5] Leslie, D.C., *Developments in the Theory of Turbulence*, Oxford University Press, New York(1983).

On the Closure Problem of Turbulence Model Theory

Tsai Shu-tang Liu Yu-lu

(Shanghai Inst. of Appl. Math. and Mech., Shanghai University, Shanghai)

Abstract

It is pointed out that the closure problem of turbulence model theory be due to the non-linearity of Navier-stokes equation. But this is a wrong viewed for the closure problem of turbulence model theory. In the engineering, the average raged velocity and pressure are not satisfied. On the other hand, even if the N-S equation were linear, all of the physical quantities would be found. In this paper, we re-analysed the closure problem and concluded that the closure problem is induced by lack of statistical distribution function. The limit of turbulence model theory and non-possiblity of direct numerical method to solve the turbulence problem had been pointed out.

Key words turbulence, closure problem, model theory, distribution function