

含二次非线性项的受迫振子在主共振 曲线上表现的浑沌特性*

裴钦元

李 骊

(长沙铁道学院)

(北京工业大学, 北京 100022)

摘 要

本文在[1]的基础上, 用多尺度法和数值模拟对含二次非线性项的受迫振子作了进一步研究, 探讨了其浑沌域与主共振曲线的关系, 通过对主共振曲线稳定性的分析, 我们推测浑沌运动将发生在主共振曲线具有垂直切线的频率附近. 数值模拟结果证实了这一推测. 这就为那些难以用Melnikov方法处理的系统, 提供了一条寻求浑沌运动的可行途径.

关键词 多尺度法 主共振曲线 数值模拟 浑沌运动

一、引 言

众所周知, 浑沌研究中目前最行之有效的解析方法为文[2]发展的Melnikov方法, 这方面的应用与推广详见文[3~5]. 但是, 大量的浑沌问题还不能用Melnikov方法去处理, 必须发展新方法. 文[6,7]在这方面作了一些尝试, 用谐波平衡法和数值方法对Duffing方程进行了研究, 得到了可喜的结果. 在本文中, 我们将再次考虑[1]中曾研究过的含二次非线性项的受迫振子

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + x - \beta x^2 = f \cos \omega t \quad (1.1)$$

并在[1]研究的基础上, 用多尺度法和数值模拟对该振子产生浑沌运动的浑沌域与其主共振曲线的关系作了进一步探讨. 我们首先用多尺度法得出主共振曲线, 并且根据对该主共振曲线各段稳定性的分析可以推测出使该系统产生浑沌运动的外激励的频率域, 必在主共振曲线具有垂直切线的某一频率附近. 数值模拟结果证实了这一推测, 这就为那些难以用Melnikov方法处理的系统提供了一条寻求浑沌运动的可行途径.

二、摄动解及其稳定性

考虑系统

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + x - \beta x^2 = f \cos \omega t \quad (2.1)$$

* 国家自然科学基金资助项目.

1992年9月9日收到初稿, 1994年10月6日收到修改稿.

它的物理背景是受弹簧约束带电导线运动的例子^[8]。其中 $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}$, \bar{f} , ω 为正的或负的参数。为了得到主共振解, 我们需要指定阻尼, 非线性以及激励的阶数, 使他们在相同量级上相互影响。为此, 我们假设

$$\bar{\delta} = \varepsilon^2 \delta, \quad \bar{\beta} = \varepsilon \beta, \quad \bar{f} = \varepsilon^2 f,$$

则方程(2.1)为

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon^2 \delta \dot{x} + \varepsilon \beta x^2 + \varepsilon^2 f \cos \omega t \quad (2.2)$$

现利用多尺度法^[9]寻求方程(2.2)的下列形式的一致渐近解

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (2.3)$$

式中 T_0 为快变时间尺度, T_1, T_2 为慢变时间尺度

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t$$

据此得微分算子

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial T_2} \frac{dT_2}{dt} + \dots \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (n=0, 1, 2).$

我们在本文中只考虑主共振, 因而设

$$\omega = 1 + \varepsilon^2 \sigma \quad (2.5)$$

将(2.3)~(2.5)代入方程(2.2)比较 ε 的幂次, 得下列微分方程组:

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + \beta x_0^2 \quad (2.7)$$

$$D_0^2 x_2 + x_2 = -2D_0 D_1 x_1 - 2D_0 D_2 x_0 - D_1^2 x_0 - \delta D_0 x_0 + 2\beta x_0 x_1 + f \cos(T_0 + \sigma T_2) \quad (2.8)$$

方程(2.6)的复数形式的解为

$$x_0 = A(T_1, T_2) \exp(iT_0) + \bar{A}(T_1, T_2) \exp(-iT_0) \quad (2.9)$$

这里 \bar{A} 为 A 的共轭复根。将(2.9)式代入方程(2.7)得到

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2iD_1 A \exp(iT_0) + \beta[A^2 \exp(2iT_0) + A\bar{A}] + cc \quad (2.10)$$

符号 cc 表示等式右端函数的共轭复数部分。要使解中不出现长期项, 必须有

$$D_1 A = 0, \quad (2.11)$$

由上式得 $A = A(T_2)$ 。则方程(2.10)的特解为

$$x_1 = -\frac{\beta}{3} A^2 \exp(2iT_0) + \beta A \bar{A} + cc \quad (2.12)$$

将(2.9), (2.12)式代入方程(2.8)得

$$D_0^2 x_2 + x_2 = \left[-2iD_2 A - D_1^2 A - \delta iA + \frac{10}{3} \beta^2 A^2 \bar{A} + \frac{f}{2} \exp(\sigma T_2 i) \right] \exp(iT_0) + NST + cc \quad (2.13)$$

式中NST表示不产生长期项的项, 消去方程(2.13)中的长期项, 得

$$-2iD_2A - D_1^2A - \delta iA + \frac{10}{3}\beta^2 A^2 \bar{A} + \frac{f}{2} \exp(\sigma T_2 i) = 0 \quad (2.14)$$

设

$$A = \frac{1}{2} a \exp[i\phi] \quad (2.15)$$

这里 a 和 ϕ 为 T_2 的实函数。将 (2.15) 式代入 (2.14) 式，分开实部与虚部，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dT_2} &= -\frac{\delta}{2}a + \frac{f}{2} \sin\gamma \\ a \frac{d\gamma}{dT_2} &= \sigma a + \frac{5\beta^2}{12} a^3 + \frac{f}{2} \cos\gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

其中 $\gamma = \sigma T_2 - \phi$

定常运动对应于 $\frac{da}{dT_2} = 0$, $\frac{d\gamma}{dT_2} = 0$ 。亦即对应于方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{2}a &= \frac{f}{2} \sin\gamma \\ \sigma a + \frac{5\beta^2}{12} a^3 &= -\frac{f}{2} \cos\gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

的解。从方程组 (2.17) 消去 γ ，得到频率响应方程

$$\left(\frac{\delta}{2}a\right)^2 + \left(\sigma a + \frac{5\beta^2}{12} a^3\right)^2 = \frac{f^2}{4} \quad (2.18)$$

考虑到 (2.5) 式，即可得图 1 和图 2 两种情况下的频率响应曲线。

现在我们来决定定常运动的稳定性，为了实现这一点，设

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + a_1 \\ \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

其中 a_0, γ_0 为 (2.17) 的一组解， a_1, γ_1 为小的扰动量。将 (2.19) 代入 (2.16) 并对 a_1, γ_1 展开，注意到 a_0, γ_0 满足 (2.17) 并略去 a_1, γ_1 二阶以上微量，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_1}{dT_2} &= -\frac{\delta}{2}a_1 + \left(\frac{f}{2} \cos\gamma_0\right)\gamma_1 \\ \frac{d\gamma_1}{dT_2} &= \left(\frac{5\beta^2}{6} a_0 - \frac{f}{2a_0^2} \cos\gamma_0\right)a_1 + \left(-\frac{f}{2a_0} \sin\gamma_0\right)\gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

因而定常运动的稳定性依赖于 (2.20) 式的右端的系数矩阵的特征值。

利用 (2.17) 式，可得到如下的特征方程：

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{\delta}{2} & \sigma a_0 + \frac{5\beta^2}{12} a_0^3 \\ -\frac{1}{a_0} \left(\sigma + \frac{15\beta^2}{12} a_0^2\right) & \lambda + \frac{\delta}{2} \end{vmatrix} = 0$$

展开此行列式得

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \left(\sigma + \frac{5\beta^2}{12} a_0^2\right) \left(\sigma + \frac{15\beta^2}{12} a_0^2\right) + \frac{\delta^2}{4} = 0$$

因此当

$$\left(\sigma + \frac{5\beta^2}{12}a_0^2\right)\left(\sigma + \frac{15\beta^2}{12}a_0^2\right) + \frac{\delta^2}{4} < 0 \quad (2.21)$$

时定常运动是不稳定的, 否则是稳定的. 据此可以得知图1和图2上两垂直切点之间部分 \widehat{AB} 与 \widehat{CD} 为不稳定, 其余部分则为稳定.

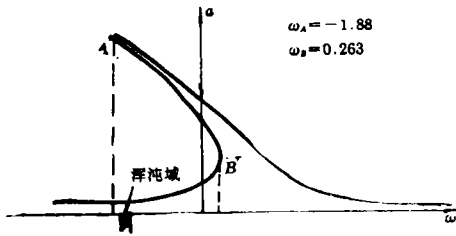


图1 主共振曲线 $\delta=0.3, f=0.79, \beta=1$
混沌域 $\omega \in (-1.72, -1.692)$

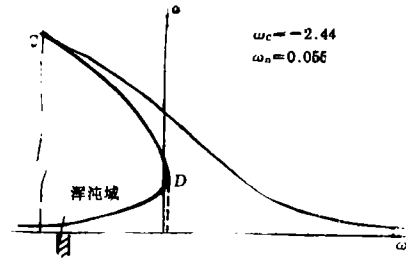


图2 主共振曲线 $\delta=0.4, f=1.15, \beta=1$
混沌域 $\omega \in (-1.74, -1.70)$

三、数值模拟

我们已经知道混沌运动是非线性振动理论研究对象的自然延伸. 那么, 我们自然而然的就会猜想这种运动必然和经典的运动有着某种联系. 显然, 稳定的运动是不可能出现混沌的, 那么, 对不稳定的运动呢? 我们知道对不稳定的振动, 只须稍加干扰就可使它离开原来的状态. 这时若还存在另一种稳定的振动状态, 那么最终有可能趋于它, 但若不存在另一种稳定的振动状态, 或虽存在但不趋于它, 那么会发生什么情况呢? 纯数学地可以说振幅趋于无限, 但这在物理上其实是不可实现的, 实际出现的就是混沌运动. 从这一思想出发, 再加上现有的Melnikov方法, 我们便可作出这样的推测: 那些使Melnikov函数具有简单零点的混沌域, 必将位于共振曲线上某一具有垂直切线的频率邻域之内.

为了证明我们的推测, 我们将对方程(2.2)进行数值模拟. 在本文中, 取定 $\beta=1$, 固定阻尼 δ 和幅值 f , 分别对图1和图2上的 A 、 B 、 C 、 D 四点附近的 ω 进行数值模拟. 结果如下:

对图1上的 B 点($\omega_B=0.263$)和图2上的 D 点($\omega_D=0.055$)附近进行数值模拟, 结果在这两点附近均未发现混沌. 从文[1]中我们知道这两点均不满足Melnikov函数具有简单零点的条件.

图1上的 A 点($\omega_A=-1.88$)附近数值模拟结果见图3和图4. 图3给出了偶阶次谐波分叉的典型例子, 图4(a)为相平面图, 其形状好象一折迭的丝束, 中间疏密不同, 其上可以清楚地看到轨线最后的走向. 换言之, 相轨线永不封闭. 图4(b)为Poincare映射, 这是一个很有趣的奇怪吸引子, 其上象一只张开嘴的鹰的头部, 下部为错位了的身躯. 分折所得的图形, 我们说这是一个混沌运动. 显然对图1所给的条件, 即给定 $\beta=1, \delta=0.3, f=0.79$ 时, 系统通过偶阶次谐波分叉导入混沌. 经过大量的模拟, 我们发现在主共振曲线上混沌域很窄, 见图1中的阴影区.

图2上 C 点($\omega_C=-2.44$)附近数值模拟结果见图5和图6, 图5给出了一倍分叉的情况. 值得指出的是, 当 $\omega=-1.746$ 时仍为周期4解, $\omega=-1.744$ 时立即进入周期8解, 未找到周期6解. 这也说明了对图2所给的条件, 即给定 $\delta=0.4, f=1.15, \beta=1$ 时, 系统将通过倍分叉

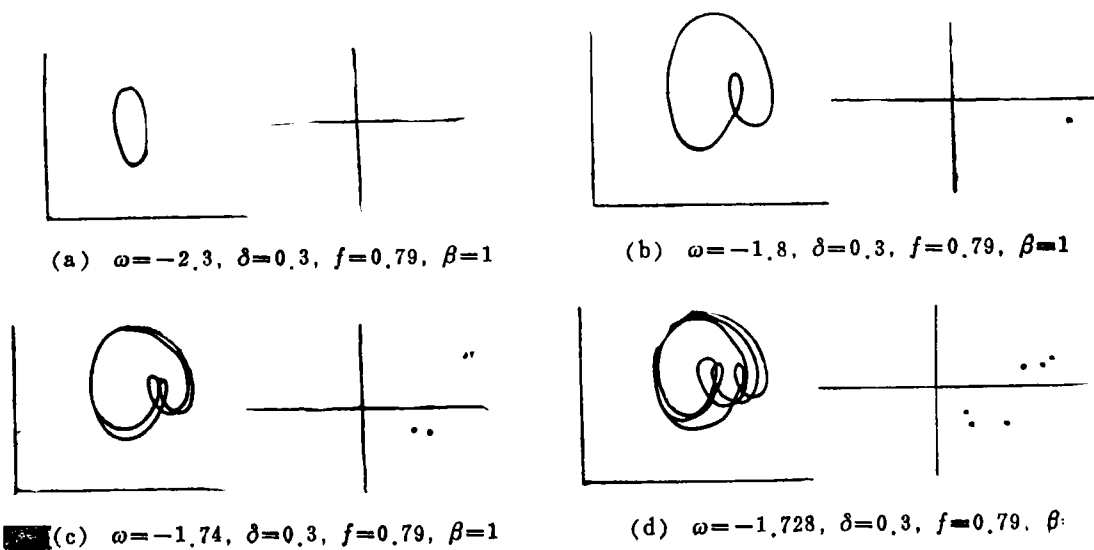


图 3

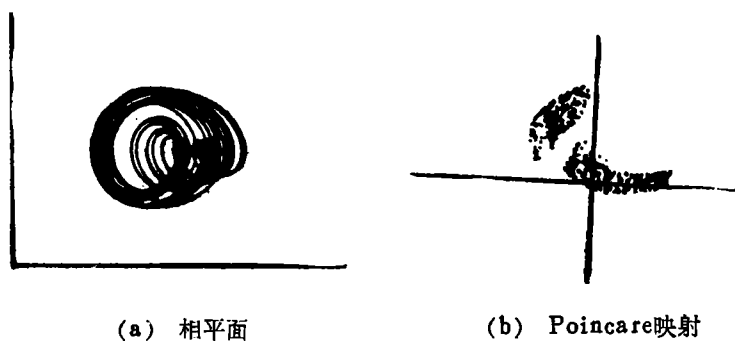


图 4 $\omega = -1.7, \delta = 0.3, f = 0.79, \beta = 1$

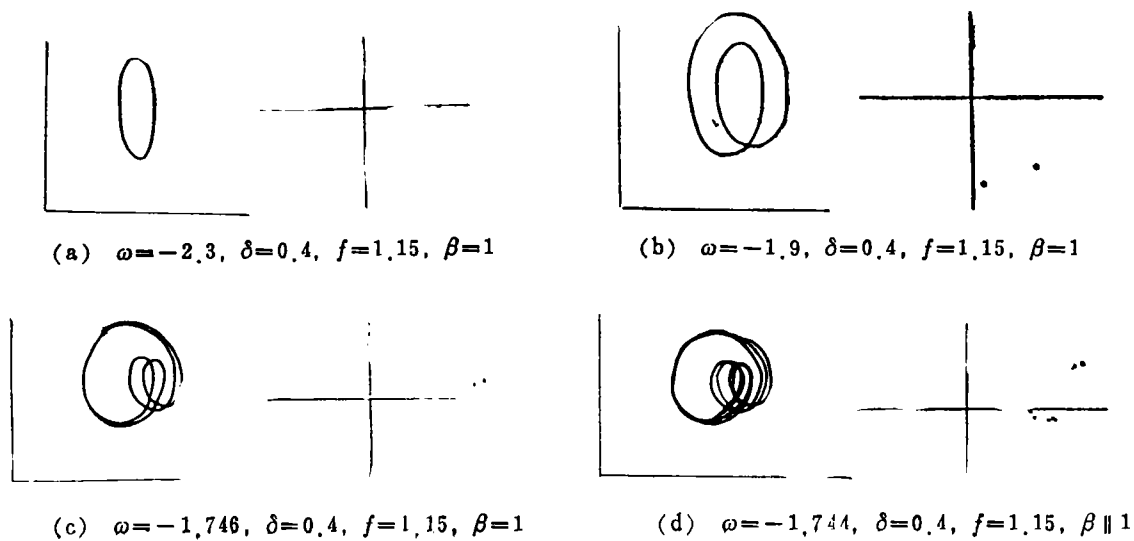


图 5

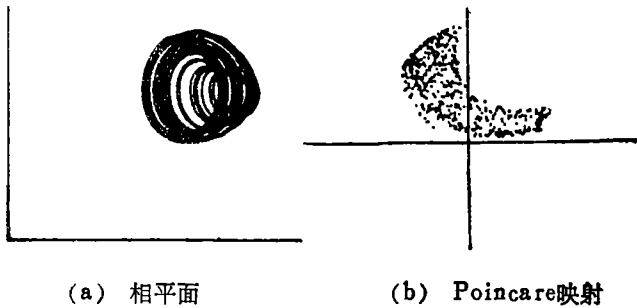


图6 $\omega = -1.71, \delta = 0.4, f = 1.15, \beta = 1$

导入混沌，其典型的混沌运动见图6所示。我们经过多次模拟也发现在这组参数下其混沌域也很窄，见图2中的阴影部分。

从文[1]中我们知道A点和C点均满足Melnikov函数具有简单零点的条件。

四、结 论

我们知道，非线性系统产生混沌运动的混沌域由Melnikov函数的简单零点加以确定，而由本文的研究可知，这样的区域将落在主共振曲线某一具有垂直切线的频率邻域之内。由此可得出确定混沌域的另一方法，即：先求出系统的主共振曲线并得出其具有垂直切线处的频率（一般有两个），然后在此频率的邻域内进行搜索，即可得到系统的一系列周期倍分叉运动并最终导致的混沌运动。对于一般的强非线性系统，其Melnikov函数很难求出，但其主共振曲线却较为容易得到。因此，本文的研究结果，为寻求一般强非线性系统的混沌运动，提供了一个简明有效的处理方法。

参 考 文 献

- [1] 裴钦元、李骊，一个非线性振子的混沌现象，应用数学和力学，14(5)(1993)，377—388.
- [2] Guokenheimer, J. and P. J. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Revised and Corrected, Springer-Verlay (1986).
- [3] 李继彬、刘曾荣，一类二次系数周期扰动的混沌性质，科学通报，7(1985)，491—495.
- [4] 李继彬、刘曾荣，几类非线性受迫振动系统的混沌性质，数学物理学报，5(1986)，195—204.
- [5] 林常，有限个次谐分叉导致混沌的一个例子，科学通报，(1985)，980—982.
- [6] Szemplinska-Stupnicka, W., Bifurcations of harmonic solution leading to chaotic motion in the softening type duffing's oscillator, Int. J. Nonlinear Mechanics, 23(1988)，257—277.
- [7] Szemplinska-Stupnicka, W. and P. Niezgodzki, The approximate approach to chaos phenomena in oscillators having single equilibrium position, J. Sound and Vibration, 14(1990)，181—192.
- [8] Minorsky, N., Introduction to Nonlinear Mechanics, J.W. Edwards, Ann. Arbor, Mich., (1947).
- [9] Nayfeh, A. H. and D. T. Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley, New York, (1979).

Chaotic Behavior of Forced Oscillator Containing a Square Nonlinear Term on Principal Resonance Curves

Pei Qin-yuan

(Changsha Railway University, Changsha)

Li Li

(Beijing Polytechnical University, Beijing 100022)

Abstract

Based on [1], we investigate the route to chaos in forced oscillator containing a square nonlinear term on principal resonance curves. And chaotic motion is observed against the background of classical resonance curves, stability limits and jump phenomena. It is shown that chaotic motion appears in the neighbourhood of the point both meeting condition that Melnikov function has simple zero and having the point of vertical tangent of the resonance curves.

Key words method of multiple scales, principal resonance curve, numerical simulation, chaotic motion