应用数学和力学，第16卷 第3期（1995年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高维动力系统的初值问题*

朱 长 江

（中国科学院武汉数学物理研究所，武汉 430071）

（林宗池推荐，1994年7月24日收到）

摘 要

在这篇文章中，我们证明了一类包含退化情形的高维动力系统初值问题整体古典解的存在性及零解的一致稳定性。

关键词 极值原理 整体古典解 一致稳定性

一、引 言

n维动力系统

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots x_n)\qquad((t,x_1,\cdots,x_n)\in R_+\times R^n,i=1,2,\cdots,n)\tag{1.1}$$

出现于多种应用数学领域中，对它的初值问题的研究是很有意义的。当系统（1.1）是非退化情形的时候，即

$$\det\left(\frac{\partial f_i(t,0,\cdots,0)}{\partial x_j}\right)\neq 0\tag{1.2}$$

关于它的零解的稳定性研究已有许多结果。但直到现在对退化情形，其研究结果却不多。本文将研究系统（1.1）在包含退化情形时解的性态。利用极值原理，在假设（1.1）的流函数f^i $(i=1,2,\cdots,n)$满足第二节的条件 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$时，我们证明了系统（1.1）的初值问题整体古典解的存在性及零解的一致稳定性。在我们的分析中，我们并不要求系统的自治性及初值的小性假设。最后，值得指出的是本文的证明方法是十分简单的。

二、主 要 定 理

这一节我们考虑如下n维动力系统的Canchy问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,\cdots,x_n)\qquad((t,x_1,\cdots,x_n)\in R_+\times R^n) & (2.1)\\ x_i(0)=x_i^0\qquad(i=1,2,\cdots,n) & (2.2)\end{cases}$$

* 国家青年科学基金资助.

遍及这篇文章，我们假设流函数$f_i(i=1,2,\cdots,n)$满足如下条件：

$$(\mathrm{H}_1)\qquad f_i(t,x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(t,x_1,\cdots,x_n)b_{ij}(t,x_1,\cdots,x_n)$$

(H_2) $a_{ij}(t,x_1,\cdots,x_n)\in C^1(R_+\times R^n)$ 且满足

$$a_{ij}(t,x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0\qquad((t,x_1,\cdots,x_n)\in R_+\times R^n)\tag{2.3}$$

(H_3) $b_{ij}(t,x_1,\cdots,x_n)\in C^1(R_+\times R^n)$ 且

$$b_{ij}(t,0,\cdots,0)=0\quad(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)\tag{2.4}$$

此外，进一步假设存在n个非零常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得

$$\lambda_i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}\leqslant 0,\ \lambda_i\lambda_l\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l}\geqslant 0\tag{2.5}$$

其中 $i,l=1,2,\cdots,n,i\neq l;\ j=1,2,\cdots,m$

在上面的假设下，我们有如下主要定理。

定理2.1 假设（2.1）的流函数f_i满足条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$，那么Cauchy问题（2.1），（2.2）在$t\geqslant 0$上存在唯一的整体古典解$x_i=x_i(t)\,(i=1,2,\cdots,n)$，且满足如下估计

$$-M|\lambda_i|\leqslant x_i(t)\leqslant M|\lambda_i|\qquad(t\in R_+)\tag{2.6}$$

且(2.1）的零解是一致稳定的， 其中 $M=\max\limits_i\left|\dfrac{x_i^0}{\lambda_i}\right|$

证明 不失一般性，可设

(H_4) $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p<0,\lambda_{p+1},\lambda_{p+2},\cdots,\lambda_n>0$

且约定当$p=0$时，$\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，当$p=n$时，$\lambda_i<0(i=1,2,\cdots,n)$。

由常微分方程组Cauchy问题解的局部存在性定理可知，Cauchy问题（2.1），(2.2)存在唯一的局部古典解．为了获得整体存在性，我们仅需证明（2.1)，(2.2）的古典解在其存在区间$I=[0,T]$上有一致先验界估计（2.6)即可。

下面我们利用极值原理证明估计(2.6)在区间I上成立。

作函数变换

$$x_i(t)=\lambda_i(y_i(t)+M+\delta\exp[t])\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.7}$$

其中 δ是待定的正常数。

将（2.7）代入到（2.1），得

$$\lambda_i\left(\frac{dy_i}{dt}+\delta\exp[t]\right)=\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}(t,x_1,\cdots,x_n)b_{ij}(t,\lambda_1(y_1+M+\delta\exp[t]),\cdots,\lambda_n(y_n+M+\delta\exp[i])))\tag{2.8}$$

即

$$\lambda_i^2\left(\frac{dy_i}{dt}+\delta\exp[t]\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij}(t,x_1,x,\cdots,x_n)\lambda_i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial b_{ij}(t,\xi,\cdots,\xi_n)}{\partial x_k}y_k\right)+(M+\delta\exp[t])\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij}(t,x_1,\cdots,x_n)\lambda_i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial b_{ij}(t,\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\partial x_k}\right)\tag{2.9}$$

其中点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 位于点 $(0,\cdots,0)$ 和 $(\lambda_1(y_1+M+\delta\exp[t]),\cdots,\lambda_n(y_n+M+\delta\exp[t]))$ 的连线上。

由变换 (2.7) 和始值条件 (2.2) 可知

$$y_i(0)=\frac{x_i^0}{\lambda_i}-M-\delta<0 \tag{2.10}$$

由 (2.9)，(2.10)可以证明

$$y_i(t)<0 \qquad (t\in I, i=1,2,\cdots,n) \tag{2.11}$$

否则，若 (2.11) 不成立，设

$$\bar{t}=\sup_t\{t\,|\,y_i(t)<0, t\in I, i=1,2,\cdots,n\}$$

则$0<\bar{t}\leqslant T$.由$y_i(t))(i=1,2,\cdots,n)$的连续性，不失一般性，可设存在某个i，使得$y_i(\bar{t})=0$，$\dfrac{dy_i(\bar{t})}{dt}\geqslant 0$，$y_j(\bar{t})\leqslant 0\ (j\neq i)$.于是由假设$(H_2)$，$(H_3)$，(2.9) 中的第$i$个方程在$\bar{t}$处导出矛盾.因此 (2.11) 成立。

由等式 (2.7)，不等式 (2.11) 及(H_4)立得

$$\left.\begin{aligned} &x_i(t)>M\lambda_i+\delta\lambda_i\exp[t] \qquad (t\in I, i=1,2,\cdots,p)\\ &x_i(t)<M\lambda_i+\delta\lambda_i\exp[t] \qquad (t\in I, i=p+1,p+2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

在(2.12)中，令$\delta\to 0$取极值，我们有

$$\left.\begin{aligned} &x_i(t)\geqslant M\lambda_i \qquad (t\in I, i=1,2,\cdots,p)\\ &x_i(t)\leqslant M\lambda_i \qquad (t\in I, i=p+1,p+2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

如果我们作函数变换

$$x_i(t)=\lambda_i(y_i(t)-M-\delta\exp[t]) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.14}$$

那么与证明 (2.13) 完全类似地可证

$$\left.\begin{aligned} &x_i(t)\leqslant -M\lambda_i \qquad (t\in I, i=1,2,\cdots,p)\\ &x_i(t)\geqslant -M\lambda_i \qquad (t\in I, i=p+1,p+2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

(2.13)，(2.15) 表明 (2.6)成立，这就完全了定理的存在性证明。

此外，由估计 (2.6) 易知稳定性是显然的。

三、例 子

例1 考虑如下具退化情形的动力系统的初值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=-2x+y-5x^2(3x-y)^3-3(7x-3y)^5y^4\\ &\frac{dy}{dt}=6x-3y+2(3x-4y)^6y^2+(3x-2y)^{15}x^2\exp[3x-y^3]\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

$$x(0)=x_0, y(0)=y_0 \tag{3.2}$$

利用定理2.1，若取$\lambda_1=1,\lambda_2=2$，那么我们有如下定理

定理3.1 初值问题(3.1)，(3.2)在$t\geqslant 0$上存在唯一的整体古典解，且(3.1)的零解是一致稳定的。

例2 考虑如下初值问题

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -3x^3y^2-4x^5y^4-2(x-y)^9\exp[x^2-y^5] \\
\frac{dy}{dt} &= -2x^2y^3-x^6y^7+5(x-y)^{13}x^8y^2
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}
$$

$$
x(0)=x_0, y(0)=y_0 \tag{3.4}
$$

取$\lambda_1=\lambda_2=1$，利用定理2.1，我们立得如下定理

定理3.2 初值问题（3.3），（3.4）在$t\geqslant 0$上存在唯一的整体古典解，且（3.3）的零解是一致稳定的。

参 考 文 献

[1] Lefschetz, S., *Stability of Nonlinear Control Systems*, Academie Press, New York (1965).

[2] Liao Xiao-xin, Absolute stability of general Lurie control systems, *Acta Mathematica Scientia*, 11(1991), 1—12.

Intial Value Problem for High Dimensional Dynamic Systems

Zhu Chang-jiang

(Inst. of Math. Scis., Academia Sinica, Wuhan 430071)

Abstract

In this paper, We prove the existence of the global classical solutions and the uniform stability of the zero solution to the initial value problem for a class of high dimensional dynamic systems which contain the degenerate case.

Key words maximum principle, global classical solution, uniform stability