

强厚度叠层悬臂圆柱壳的精确解*

范家让 丁克伟

(合肥工业大学建筑工程系) (合肥 安徽建筑工业学院建工系)
(唐立民推荐, 1994年5月17日收到)

摘 要

抛弃任何有关位移或应力模式的人为假设, 在柱坐标系下对正交异性体建立其状态方程, 给出强厚度叠层闭口悬臂圆柱壳静力问题的精确解。此解满足所有基本方程, 包含了全部弹性常数, 可得到任意需要的精度。

关键词 正交异性体 叠层悬臂圆柱壳 状态方程 精确解

一、引 言

当今各家板壳理论, 由于人为地引进一些简化假设, 致使基本方程不能全部而只能部分地被满足, 且不能包含所有弹性常数, 由此引起的误差随板壳厚度增大而剧增。特别是层间应力, 无一家理论能精确算出。当厚度超出中厚壁范围时, 各家理论全部失效。

通过状态空间的引入, 文[1]给出四边简支强厚度叠层开口圆柱壳的精确解。文[2]和[3]分别就具有固支边的强厚度叠层板和闭口圆柱壳给出精确解。对具有自由边的强厚度叠层板壳这一难题的精确解问题, 国内、外未见到任何报道。有些学者甚至认为是不可能得到精确解的。本文在上述文献的基础上, 通过一些特殊函数和特殊位移函数的引入, 给出强厚度叠层闭口悬臂圆柱壳静力问题的精确解, 并将数值结果与SAP5有限元解进行了对比。

二、悬臂圆柱壳状态方程的建立

图1(a)所示为一正交异性悬臂圆柱壳, $W^{(1)}(r, \theta)$ 和 $V^{(1)}(r, \theta)$ 分别是自由端沿 r 和 θ 方向的位移。将固支边变成简支边并加原固支边反力 $P(r, \theta)$, 则图1(a)和图1(b)等价。

引入单位脉冲函数 $H(x)$, 其定义见[2], 并令

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x + H(x)P(r, \theta) \quad (2.1)$$

设 U, V, W 分别是壳体沿 x, θ 和 r 方向的位移(图2), 并令

$$W = \bar{W}(x, r, \theta) + \int_0^x W^{(1)}(r, \theta) \quad (2.2)$$

* 国家自然科学基金资助项目

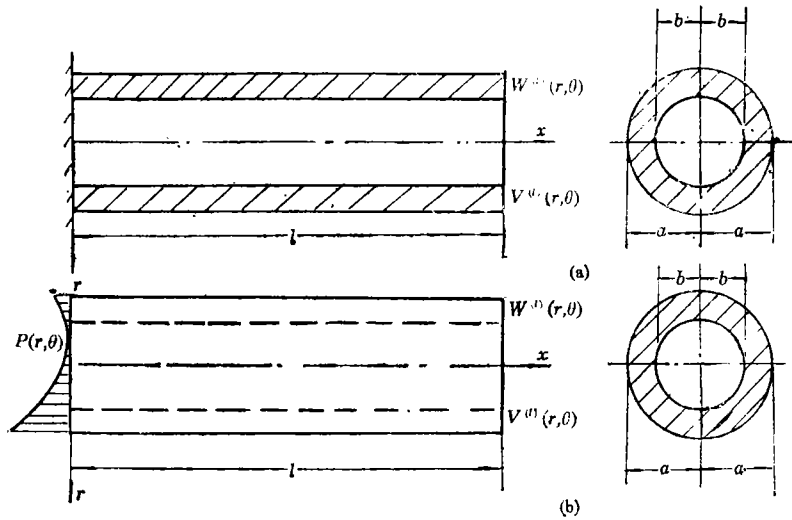


图1 闭口悬臂圆柱壳

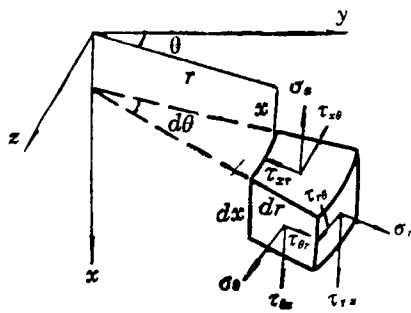


图2 柱坐标系

$$V = \bar{V}(x, r, \theta) + \frac{x}{l} V^{(1)}(r, \theta) \tag{2.3}$$

$$U = \bar{U}(x, r, \theta) - \frac{C_3 x^2}{2C_2 r l} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} V^{(1)}(r, \theta) + W^{(1)}(r, \theta) \right] \tag{2.4}$$

(2.1)~(2.4)式中未解释的符号将在行文过程中逐一说明。稍后会看到(2.4)式之所以取如此形式，是为了使 σ_x 满足在自由端的边界条件 $\sigma_x = 0$ 。

把(2.1)式代入图2所示的柱坐标系下的平衡方程，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} &= \delta(x)P(r, \theta) \\ \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

式中 $\delta(x)$ 为Dirac函数，其定义见[2]或[3]。

将应变—位移关系代入正交导性体的应力—应变关系后，有

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{z\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{r} \\ \frac{\partial W}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

记 $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$, $\beta = \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\sigma = \sigma_r$, $X = \tau_{rz}$, $\Theta = \tau_{r\theta}$

在(2.5)、(2.6)两式中消去薄膜应力 $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_\theta$ 和 $\tau_{z\theta}$, 并考虑(2.2)~(2.4)诸式后, 有

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} U \\ V \\ \sigma \\ X \\ \Theta \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\alpha \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & C_9 & -\frac{\beta}{r} \\ \frac{C_3 \alpha}{r} & \frac{C_4}{r^2} \beta & -\frac{C_5 + 1}{r} & -\alpha & -\frac{\beta}{r} & \frac{C_4}{r^2} \\ -C_2 \alpha^2 - \frac{C_6 \beta^2}{r^2} & -\frac{C_3 + C_6}{r} \alpha \beta & C_1 \alpha & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{C_3 \alpha}{r} \\ -\frac{C_3 + C_6}{r} \alpha \beta & -C_6 \alpha^2 - \frac{C_4 \beta^2}{r^2} & \frac{C_5 \beta}{r} & 0 & -\frac{2}{r} & -\frac{C_4 \beta}{r^2} \\ C_1 \alpha & \frac{C_6}{r} \beta & C_7 & 0 & 0 & \frac{C_5}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ \sigma \\ X \\ \Theta \\ W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{C_3 x^2}{2C_2 r l} \left[\beta \frac{\partial V^{(1)}}{\partial r} - \frac{\beta}{r} V^{(1)} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial r} - \frac{W^{(1)}}{r} \right] - \frac{W^{(1)}}{l} \\ \frac{x}{l} \left[\frac{V^{(1)}}{r} - \frac{\partial V^{(1)}}{\partial r} - \frac{\beta}{r} W^{(1)} \right] \\ \frac{x}{l r^2} \left(C_4 - \frac{C_3^2}{C_2} \right) [\beta V^{(1)} + W^{(1)}] \\ \delta(x) P(r, \theta) + \frac{C_3 C_6 x^2}{2C_2 r^3 l} [\beta^3 V^{(1)} + \beta^2 W^{(1)}] - \frac{C_6}{r l} \beta V^{(1)} \\ \frac{x}{l r^2} \left[\frac{C_3 (C_3 + C_6)}{C_2} - C_4 \right] [\beta^2 V^{(1)} + \beta W^{(1)}] \\ \frac{x}{l} \left[\frac{1}{r} \left(C_5 - \frac{C_1 C_3}{C_2} \right) (\beta V^{(1)} + W^{(1)}) - \frac{\partial W^{(1)}}{\partial r} \right] \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

式中:

$$C_1 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad C_2 = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad C_3 = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, \quad C_4 = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}$$

$$C_5 = -\frac{C_{23}}{C_{33}}, \quad C_6 = C_{66}, \quad C_7 = \frac{1}{C_{33}}, \quad C_8 = \frac{1}{C_{55}}, \quad C_9 = \frac{1}{C_{44}}$$

被消去的薄膜应力可由下式求得

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2\alpha & \frac{C_3}{r}\beta & -C_1 & \frac{C_3}{r} \\ C_3\alpha & \frac{C_4}{r}\beta & -C_5 & \frac{C_4}{r} \\ \frac{C_6}{r}\beta & C_6\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \sigma \\ \bar{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x}{lr} \left(C_4 - \frac{C_3^2}{C_2} \right) [\beta V^{(1)} + W^{(1)}] \\ -\frac{C_3 C_6 x^2}{2C_2 l r^2} [\beta^2 V^{(1)} + \beta W^{(1)}] + \frac{C_6}{l} V^{(1)} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

将 (2.7) 式中各量按下列级数展开

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \sum_m \sum_n \bar{U}_{mn}(r) \cos \frac{m\pi x}{l} \cos(n\theta) \\ \bar{V} &= \sum_m \sum_n \bar{V}_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin(n\theta) \\ \sigma &= \sum_m \sum_n \sigma_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x}{l} \cos(n\theta) \\ X &= \sum_m \sum_n X_{mn}(r) \cos \frac{m\pi x}{l} \cos(n\theta) \\ \Theta &= \sum_m \sum_n \Theta_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin(n\theta) \\ \bar{W} &= \sum_m \sum_n \bar{W}_{mn}(r) \sin \frac{m\pi x}{l} \cos(n\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\delta(x)P(r, \theta) = \left(\frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{l} \right) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r) \cos(n\theta) \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\pi}{m^2} \cos \frac{m\pi x}{l} \\ x &= -\frac{2l}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\pi}{m} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{aligned} W^{(l)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n^{(l)}(r) \cos(n\theta) \\ V^{(l)}(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} V_n^{(l)}(r) \sin(n\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

把(2.9)~(2.12)式代入(2.7)式, 并记 $\xi = m\pi/l$, 对每对 $m-n$ 得

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr} [U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad W_{mn}(r)]^T \\ &= \mathbf{D}(r) [U_{mn}(r) \quad V_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad W_{mn}(r)]^T \\ &\quad + \mathbf{B}_{mn}(r) \end{aligned} \quad (2.13)$$

式中

$$\mathbf{D}(r) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\xi \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & C_9 & \frac{n}{r} \\ -\frac{C_3}{r}\xi & \frac{C_4}{r^2}n & -\frac{C_6+1}{r} & \xi & -\frac{n}{r} & \frac{C_4}{r^2} \\ C_2\xi^2 + \frac{C_6}{r^2}n^2 & -\frac{C_3+C_6}{r}\xi n & C_1\xi & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{C_3}{r}\xi \\ -\frac{C_3+C_6}{r}\xi n & C_6\xi^2 + \frac{C_4}{r^2}n^2 & -\frac{C_5}{r}n & 0 & -\frac{2}{r} & \frac{C_4}{r^2}n \\ -C_1\xi & \frac{C_5}{r}n & C_7 & 0 & 0 & \frac{C_5}{r} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}_{mn}(r) = \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{2C_3 l \cos m\pi}{C_2 m^2 \pi^2 r} \left[n \frac{dV_n^{(l)}(r)}{dr} - \frac{n}{r} V_n^{(l)}(r) + \frac{dW_n^{(l)}(r)}{dr} - \frac{W_n^{(l)}(r)}{r} \right] \\ &\frac{2 \cos m\pi}{m\pi} \left[\frac{dV_n^{(l)}(r)}{dr} - \frac{V_n^{(l)}(r)}{r} - \frac{n}{r} W_n^{(l)}(r) \right] \\ &\frac{2 \cos m\pi}{m\pi r^2} \left(\frac{C_3^2}{C_2} - C_4 \right) [nV_n^{(l)}(r) + W_n^{(l)}(r)] \\ &\frac{2}{l} P_n(r) - \frac{2C_3 C_6 l n^2 \cos m\pi}{C_2 m^2 \pi^2 r^3} [nV_n^{(l)}(r) + W_n^{(l)}(r)] \\ &\frac{2n \cos m\pi}{m\pi r^2} \left[\frac{C_3(C_3+C_6)}{C_2} - C_4 \right] [nV_n^{(l)}(r) + W_n^{(l)}(r)] \\ &\frac{2 \cos m\pi}{m\pi} \left[\frac{dW_n^{(l)}(r)}{dr} - \frac{1}{r} \left(C_5 - \frac{C_1 C_3}{C_2} \right) (nV_n^{(l)}(r) + W_n^{(l)}(r)) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.15) \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_{mn}(r) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{l} + \frac{C_3 l}{6C_2 r^2}\right) W_n^{(l)}(r) + \frac{C_3 l}{6C_2 r} \left[n \frac{dV_n^{(l)}(r)}{dr} - \frac{n}{r} V_n^{(l)}(r) + \frac{dW_n^{(l)}(r)}{dr} \right] \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_n(r)}{l} - \frac{C_3 C_6 l n^2}{6C_2 r^3} [nV_n^{(l)}(r) + W_n^{(l)}(r)] - \frac{C_6 n}{r l} V_n^{(l)}(r) \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

至此, 除变量 r 外, 其余变量全部消除. 方程 (2.13) 称为变系数非齐次状态方程. 在满足边界条件下解此方程, 然后通过 (2.1) ~ (2.4) 式和 (2.8)、(2.9) 两式便可计算一切力学量.

现在考虑边界条件. 因当 $x=0$, l 时, $H(x)$ 分别等于 1 和 0, 综合考虑 (2.1) ~ (2.4) 式和 (2.8)、(2.9) 两式便知: 在固支端 ($x=0$), $\sigma_x = P(r, \theta)$, $W = \bar{W} = 0$, $V = \bar{V} = 0$; 在自由端 ($x=l$), $\sigma_x = \bar{\sigma}_x = 0$, $W = W^{(l)}(r, \theta)$, $V = V^{(l)}(r, \theta)$. 剩下尚需满足的边界条件是:

$$U = \bar{U} = 0, \quad \text{当 } x=0 \text{ 时} \quad (2.17)$$

$$X = 0, \quad \text{当 } x=l \text{ 时} \quad (2.18)$$

$$\tau_{x\theta} = 0, \quad \text{当 } x=l \text{ 时} \quad (2.19)$$

通过以上三式的满足来定解 $P(r, \theta)$, $W^{(l)}(r, \theta)$ 和 $V^{(l)}(r, \theta)$.

三、叠层闭口悬臂圆柱壳的解

图 3(a) 是由 p 层正交异性材料组成的叠层圆柱壳, 厚度 $h = a - b$, 各层厚度为 h_j ($j=1, 2, \dots, p$). 图 3(b) 是其中任一层 j 的放大图. 将 j 层等分成 k_j 个薄层, 薄层厚度为 $d_j = h_j/k_j$, 薄层平均半径分别用 $c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jk_j}$ 表示.

现对 j 层中的第一个薄层建立状态方程. 因 r 在薄层内变化不大, 若以 c_{j1} 代替矩阵 (2.14) 中的变量 r 当不会引起较大的误差. 于是, 由 (2.13) 式知其状态方程是

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} [\bar{U}_{mn}(r) \quad \bar{V}_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad \bar{W}_{mn}(r)]^T_{j1} \\ & = \mathbf{D}_{j1} [\bar{U}_{mn}(r) \quad \bar{V}_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad \bar{W}_{mn}(r)]^T_{j1} \\ & \quad + \mathbf{B}_{j1}(r) \end{aligned} \quad (3.1)$$

下标 $j1$ 表示对 j 层中第一个薄层而言. 矩阵 \mathbf{D}_{j1} 的各元素为常量, 它由矩阵 (2.14) 令其中 $r = c_{j1}$ 而得. 列阵 $\mathbf{B}_{j1}(r)$ 由 (2.15) 和 (2.16) 式求得, 即令 $W_{nj1}^{(l)}(r)$, $V_{nj1}^{(l)}(r)$, $P_{nj1}(r)$ 分别代替 (2.15)、(2.16) 式中的 $W_n^{(l)}(r)$, $V_n^{(l)}(r)$ 和 $P_n(r)$.

若叠层壳每层都很薄, 只需以每层平均半径代替矩阵 (2.14) 中的 r 而不必分割. 若某些层较厚, 可在试算过程中逐次增加 k_j 数目, 直至要求保留的有效数字不变为止. 相应此时的解可以认为是在满足精度要求意义下的精确解. 绝对精确的事物是不存在的, 重要的问题不是误差, 而是误差是否可控. 只要薄层充分薄, 有理由认为 $P_{nj1}(r)$, $W_{nj1}^{(l)}(r)$, $V_{nj1}^{(l)}(r)$ 在薄层内是线性分布的, 即有

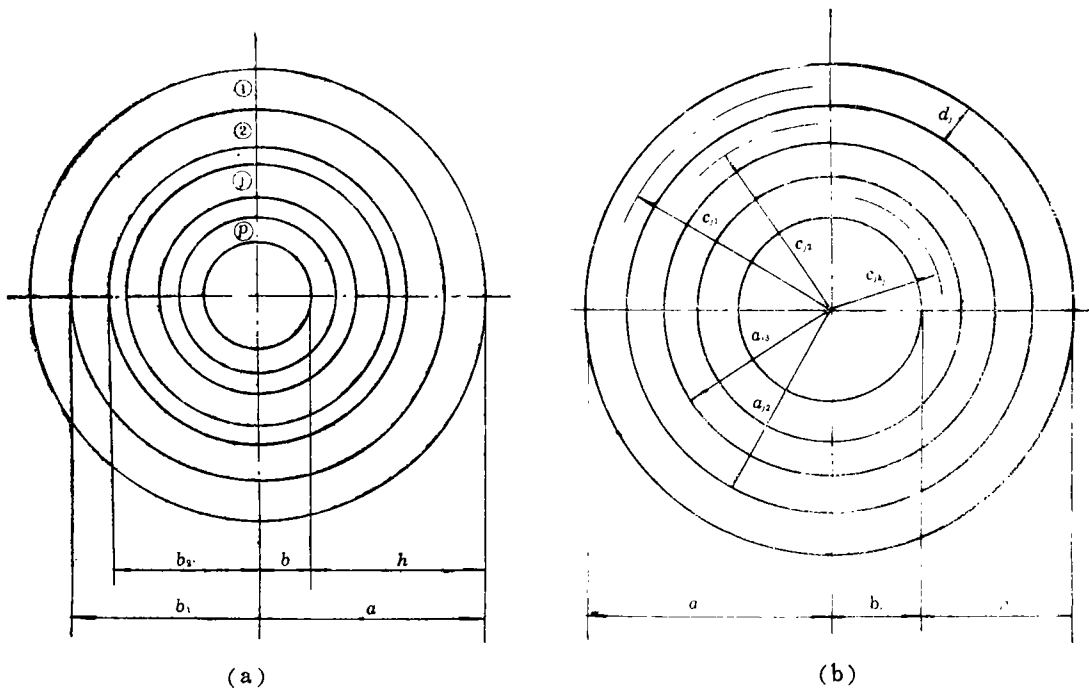


图3 叠层闭口圆柱壳

$$P_{nj1}(r) = A_{nj1} + \frac{A_{nj1} - A_{nj2}}{d_j} (r - a_{j1}) \quad r \in [a_{j1}, a_{j2}] \quad (3.2a)$$

$$W_{nj1}^{(l)}(r) = B_{nj1} + \frac{B_{nj1} - B_{nj2}}{d_j} (r - a_{j1}) \quad r \in [a_{j1}, a_{j2}] \quad (3.2b)$$

$$V_{nj1}^{(l)}(r) = C_{nj1} + \frac{C_{nj1} - C_{nj2}}{d_j} (r - a_{j1}) \quad r \in [a_{j1}, a_{j2}] \quad (3.2c)$$

式中 A_{nj1} , A_{nj2} , B_{nj1} , B_{nj2} , C_{nj1} , C_{nj2} 分别是 $P_{nj1}(r)$, $W_{nj1}^{(l)}(r)$ 和 $V_{nj1}^{(l)}(r)$ 在薄层端点的函数值, 它们应由边界条件来定解。

方程 (3.1) 的解是^[2]

$$\mathbf{R}_{j1}(r) = \mathbf{G}_{j1}(r - a_{j1}) \mathbf{R}_{j1}(a_{j1}) + \mathbf{C}_{j1}(r - a_{j1}) \quad r \in [a_{j1}, a_{j2}] \quad (3.3)$$

式中

$$\mathbf{R}_{j1}(r) = [\mathbf{U}_{mn}(r) \quad \mathbf{V}_{mn}(r) \quad \sigma_{mn}(r) \quad X_{mn}(r) \quad \Theta_{mn}(r) \quad \mathbf{W}_{mn}(r)]_{j1}^T \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{R}_{j1}(a_{j1}) = [\mathbf{U}_{mn}(a_{j1}) \quad \mathbf{V}_{mn}(a_{j1}) \quad \sigma_{mn}(a_{j1}) \quad X_{mn}(a_{j1}) \quad \Theta_{mn}(a_{j1}) \quad \mathbf{W}_{mn}(a_{j1})]_{j1}^T \quad (3.4b)$$

$$\mathbf{G}_{j1}(r - a_{j1}) = \exp[\mathbf{D}_{j1} \cdot (r - a_{j1})] \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C}_{j1}(r - a_{j1}) = \int_{a_{j1}}^r \exp[\mathbf{D}_{j1} \cdot (r - \tau)] \mathbf{B}_{j1}(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

为了计算矩阵函数 $\mathbf{G}_{j1}(r - a_{j1})$ 和 $\mathbf{C}_{j1}(r - a_{j1})$, 需研究矩阵 \mathbf{D}_{j1} 的特征值。设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ 为 \mathbf{D}_{j1} 的特征值, 其相应的特征矢量分别用 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_6$ 表示, 则由线性代数知, 必存在一个矩阵 $\mathbf{P}_{j1} = [\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \dots \quad \mathbf{V}_6]_{j1}$, 及其逆阵 \mathbf{P}_{j1}^{-1} , 能使 \mathbf{D}_{j1} 变换成对角线标准型, 且有

$$\mathbf{G}_{j1}(r - a_{j1}) = \exp[\mathbf{D}_{j1} \cdot (r - a_{j1})]$$

$$= \mathbf{P}_{j1} \cdot \begin{bmatrix} \exp[\lambda_1(r-a_{j1})] & & & 0 \\ & \exp[\lambda_2(r-a_{j1})] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp[\lambda_6(r-a_{j1})] \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}_{j1}^{-1} \quad (3.7)$$

于是有

$$\mathbf{C}_{j1}(r-a_{j1}) = \int_{a_{j1}}^r \mathbf{P}_{j1} \cdot \begin{bmatrix} \exp[\lambda_1(r-\tau)] & & & 0 \\ & \exp[\lambda_2(r-\tau)] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp[\lambda_6(r-\tau)] \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}_{j1}^{-1} \mathbf{B}_{j1}(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

在 (3.3) 式中令 $r=a_{j2}$, 注意到 $a_{j2}-a_{j1}=-d_j$, 于是有

$$\mathbf{R}_{j1}(a_{j2}) = \mathbf{G}_{j1}(-d_j) \mathbf{R}_{j1}(a_{j1}) + \mathbf{C}_{j1}(-d_j) \quad (3.9)$$

对第二个薄层进行类似推导, 可得

$$\mathbf{R}_{j2}(a_{j3}) = \mathbf{G}_{j2}(-d_j) \mathbf{R}_{j2}(a_{j2}) + \mathbf{C}_{j2}(-d_j) \quad (3.10)$$

上面二式中的 $\mathbf{R}_{j1}(a_{j2})$ 和 $\mathbf{R}_{j2}(a_{j2})$ 分别是第一个薄层内表面和第二个薄层外表面的力学量, 此二组量应相等. 因此, 将 (3.9) 式代入 (3.10) 式后, 得

$$\mathbf{R}_{j2}(a_{j3}) = \mathbf{G}_{j2}(-d_j) \mathbf{G}_{j1}(-d_j) \mathbf{R}_{j1}(a_{j1}) + \mathbf{G}_{j2}(-d_j) \mathbf{C}_{j1}(-d_j) + \mathbf{C}_{j2}(-d_j)$$

依次类推, 最后可把第 k_j 个薄层内表面力学量和第一个薄层外表面力学量用下式联结起来:

$$\mathbf{R}_{jk_j}(b_j) = \mathbf{E}_{jk_j} \mathbf{R}_{j1}(a_{j1}) + \mathbf{\bar{E}}_{jk_j} \quad (3.11)$$

式中

$$\mathbf{E}_{jk_j} = \mathbf{G}_{jk_j} \mathbf{G}_{j,k_j-1} \cdots \mathbf{G}_{j2} \mathbf{G}_{j1} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{\bar{E}}_{jk_j} = \mathbf{G}_{jk_j} (\mathbf{G}_{j,k_j-1} \cdots \mathbf{G}_{j2} \mathbf{C}_{j1} + \mathbf{G}_{j,k_j-1} \cdots \mathbf{G}_{j3} \mathbf{C}_{j2} + \cdots + \mathbf{C}_{j,k_j-1}) + \mathbf{C}_{jk_j} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{G}_{js} = \mathbf{G}_{js}(-d_j), \quad \mathbf{C}_{js} = \mathbf{C}_{js}(-d_j) \quad (s=1, 2, \cdots, k_j) \quad (3.14)$$

(3.11) 式对图 3(a) 中任一层都成立. 当 $j=1, 2$ 时, 分别有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{1k_1}(b_1) &= \mathbf{E}_{1k_1} \mathbf{R}_{11}(a_{11}) + \mathbf{\bar{E}}_{1k_1} \\ \mathbf{R}_{2k_2}(b_2) &= \mathbf{E}_{2k_2} \mathbf{R}_{21}(a_{21}) + \mathbf{\bar{E}}_{2k_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

参看图 3(a), 第一层外表面半径 $a_{11}=a$, 第二层外表面半径 $a_{21}=b_1$. 根据该二层层间位移和应力的连续条件, 应有

$$\begin{aligned} & [U_{mn}(b_1) \quad V_{mn}(b_1) \quad \sigma_{mn}(b_1) \quad X_{mn}(b_1) \quad \Theta_{mn}(b_1) \quad W_{mn}(b_1)]_{1k_1}^T \\ & = [U_{mn}(a_{21}) \quad V_{mn}(a_{21}) \quad \sigma_{mn}(a_{21}) \quad X_{mn}(a_{21}) \quad \Theta_{mn}(a_{21}) \quad W_{mn}(a_{21})]_{21}^T \end{aligned} \quad (3.16)$$

由 (2.2)、(2.3) 两式知, 当层间 $W(V)$ 相等时, 必有 $\bar{W}(\bar{V})$ 相等. 但因各层弹性常数不同, (2.4) 式说明当层间 U 相等时, 未必有 \bar{U} 相等. 改写 (3.16) 式:

$$\begin{aligned} & [\bar{U}_{mn}(b_1) + S_{mn}(b_1) \quad \bar{V}_{mn}(b_1) \quad \sigma_{mn}(b_1) \quad X_{mn}(b_1) \quad \Theta_{mn}(b_1) \quad \bar{W}_{mn}(b_1)]_{1k_1}^T \\ & = [\bar{U}_{mn}(a_{21}) + Q_{mn}(a_{21}) \quad \bar{V}_{mn}(a_{21}) \quad \sigma_{mn}(a_{21}) \quad X_{mn}(a_{21}) \quad \Theta_{mn}(a_{21}) \\ & \quad \bar{W}_{mn}(a_{21})]_{21}^T \end{aligned} \quad (3.17)$$

式中 $S_{mn}(b_1)$ 和 $Q_{mn}(a_{21})$ 可由 (2.4) 式、(2.11) 式中第一式和 (2.12) 式求得:

$$\{S_{mn}(b_1)\}_{1k_1} = -\left(\frac{C_3}{C_2}\right)_{1k_1} \cdot \frac{2i \cos m\pi}{b_1 m^2 \pi^2} [nV_n^{(1)}(b_1) + W_n^{(1)}(b_1)]_{1k_1} \quad (m \neq 0) \quad (3.18a)$$

$$\{Q_{mn}(a_{21})\}_{21} = -\left(\frac{C_3}{C_2}\right)_{21} \cdot \frac{2i \cos m\pi}{a_{21} m^2 \pi^2} [nV_n^{(1)}(a_{21}) + W_n^{(1)}(a_{21})]_{21} \quad (m \neq 0) \quad (3.18b)$$

$$\{S_{mn}(b_1)\}_{1k_1} = -\left(\frac{C_3}{C_2}\right)_{1k_1} \cdot \frac{1}{6b_1} [nV_n^{(1)}(b_1) + W_n^{(1)}(b_1)]_{1k_1} \quad (m=0) \quad (3.18c)$$

$$\{Q_{mn}(a_{21})\}_{21} = -\left(\frac{C_3}{C_2}\right)_{21} \cdot \frac{1}{6a_{21}} [nV_n^{(1)}(a_{21}) + W_n^{(1)}(a_{21})]_{21} \quad (m=0) \quad (3.18d)$$

由 (3.17) 式可得

$$\begin{aligned} & [\bar{U}_{mn}(a_{21}) \quad \bar{V}_{mn}(a_{21}) \quad \bar{\sigma}_{mn}(a_{21}) \quad \bar{X}_{mn}(a_{21}) \quad \bar{\Theta}_{mn}(a_{21}) \quad \bar{W}_{mn}(a_{21})]_{21} \\ & = [\bar{U}_{mn}(b_1) \quad \bar{V}_{mn}(b_1) \quad \bar{\sigma}_{mn}(b_1) \quad \bar{X}_{mn}(b_1) \quad \bar{\Theta}_{mn}(b_1) \quad \bar{W}_{mn}(b_1)]_{1k_1}^T + \mathbf{T}_1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

式中

$$\mathbf{T}_1 = [\{S_{mn}(b_1)\}_{1k_1} - \{Q_{mn}(a_{21})\}_{21} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.20)$$

回忆 (3.4) 式, (3.19) 式可写成

$$\mathbf{R}_{21}(a_{21}) = \mathbf{R}_{1k_1}(b_1) + \mathbf{T}_1 \quad (3.21)$$

把上式代入 (3.15) 式后一式, 得

$$\mathbf{R}_{2k_2}(b_2) = \mathbf{E}_{2k_2} \mathbf{R}_{1k_2}(b_1) + \mathbf{E}_{2k_2} \mathbf{T}_1 + \bar{\mathbf{E}}_{2k_2}$$

再将 (3.15) 式前一式代入上式, 并注意到 $a_{11} = a$, 有

$$\mathbf{R}_{2k_2}(b_2) = \mathbf{E}_{2k_2} \mathbf{E}_{1k_1} \mathbf{R}_{11}(a) + \mathbf{E}_{2k_2} (\bar{\mathbf{E}}_{1k_1} + \mathbf{T}_1) + \bar{\mathbf{E}}_{2k_2} \quad (3.22)$$

逐层类推, 最后可把第 p 层内表面力学量和第一层外表面力学量通过下式联系起来:

$$\mathbf{R}_{pk_p}(b) = \mathbf{\Pi} \mathbf{R}_{11}(a) + \bar{\mathbf{\Pi}} \quad (3.23)$$

式中

$$\mathbf{\Pi} = \prod_{j=p}^1 \mathbf{E}_{jk_j} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{\Pi}} = & \mathbf{E}_{pk_p} [\mathbf{E}_{p-1, k_{p-1}} \cdots \mathbf{E}_{2k_2} (\bar{\mathbf{E}}_{1k_1} + \mathbf{T}_1) + \mathbf{E}_{p-1, k_{p-1}} \cdots \mathbf{E}_{3k_3} (\bar{\mathbf{E}}_{2k_2} \\ & + \mathbf{T}_2) + \cdots + (\bar{\mathbf{E}}_{p-1, k_{p-1}} + \mathbf{T}_{p-1})] + \bar{\mathbf{E}}_{pk_p} \end{aligned} \quad (3.25)$$

(3.23) 式中的 $\mathbf{R}_{pk_p}(b)$ 和 $\mathbf{R}_{11}(a)$ 分别是叠层壳内、外表面的力学量, $\mathbf{R}_{11}(a)$ 称为初始值。

$\mathbf{\Pi}$ 为 (6×6) 阶方阵, $\bar{\mathbf{\Pi}}$ 为 (6×1) 阶列阵, 含待定常数 (见 (3.2) 式)。当壳体内表面仅受法向荷载时, 取矩阵方程 (3.23) 中的第 3、4、5 三行, 并注意到 $\sigma_{mn}(a) = X_{mn}(a) = \Theta_{mn}(a) = X_{mn}(b) = \Theta_{mn}(b) = 0$, 得到

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{mn}(a) \\ \bar{V}_{mn}(a) \\ \bar{W}_{mn}(a) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{mn}(b) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\Pi}_3 \\ \bar{\Pi}_4 \\ \bar{\Pi}_5 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

通过边界条件的满足求出 $[\bar{\Pi}_3 \quad \bar{\Pi}_4 \quad \bar{\Pi}_5]^T$ 后, 由上式可求得 $[\bar{U}_{mn}(a) \quad \bar{V}_{mn}(a) \quad \bar{W}_{mn}(a)]^T$, 于是初始值 $\mathbf{R}_{11}(a)$ 为已知。利用 (3.3) 式并令 $j=1$, 可求得第一层中第一个薄层的力学量, 当

第一个薄层内表面力学量求出后, 又可视作第二个薄层初始值, 于是第二个薄层力学量可求。类推下去, 第一层力学量处处可求。同理, 整个叠层壳可解。

剩下的问题是利用边界条件求 (3.2) 式中的待定常数, 亦即求 (3.26) 式中的 $[\Pi, \Pi, \bar{\Pi}_s]^T$ 。为此, 将 (2.9) 式中的第 1、4 二式分别代入 (2.17)、(2.18) 式, 得

$$\sum_m [U_{mn}(r)]_j = 0, \quad \sum_m (-1)^m [X_{mn}(r)]_j = 0 \quad (3.27)$$

当考虑边界条件 (2.19) 时, 先由 (2.8) 式第三行求出 $\tau_{\theta\theta}$ 的表达式, 再将 (2.9)、(2.12) 式代入其中, 得

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta} = & \sum_n \left\{ \sum_m \left[\frac{C_0 m \pi}{l} V_{mn}(r) - \frac{C_0 n}{r} U_{mn}(r) \right] \cos \frac{m \pi x}{l} \right. \\ & \left. + \frac{C_3 C_0 n x^2}{2 C_2 r^2 l} [n V_n^{(1)}(r) + W_n^{(1)}(r)] + \frac{C_0}{l} V_n^{(1)}(r) \right\} \sin(n\theta) \end{aligned}$$

将上式代入 (2.19) 式, 得

$$\begin{aligned} \sum_m (-1)^m \left[\frac{m \pi}{l} V_{mn}(r) - \frac{n}{r} U_{mn}(r) \right]_j + \frac{C_3 n l}{2 C_2 r^2} [n V_n^{(1)}(r) \\ + W_n^{(1)}(r)]_j + \frac{1}{l} [V_n^{(1)}(r)]_j = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

为了写出 (3.27) 和 (3.28) 式中的 $X_{mn}(r)$, $U_{mn}(r)$ 和 $V_{mn}(r)$ 的表达式, 需将第 j 层中任一薄层 k 的力学量用初始值表示。仿照 (3.11) 式的推导过程, 可将第 j 层中第 k 个薄层力学量用第 j 层外表面力学量表示:

$$R_{jk}(r) = E_{jk}(r) R_{j1}(a_{j1}) + \bar{E}_{jk}(r) \quad (3.29)$$

式中

$$E_{jk}(r) = G_{jk}(r - a_{jk}) G_{j, k-1} \cdots G_{j2} G_{j1} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{jk}(r) = & G_{jk}(r - a_{jk}) (G_{j, k-1} \cdots G_{j2} C_{j1} + G_{j, k-1} \cdots G_{j3} C_{j2} \\ & + \cdots + C_{j, k-1}) + C_{jk}(r - a_{jk}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$G_{js} = G_{js}(-d_j), \quad C_{js} = C_{js}(-d_j) \quad (s = 1, 2, \dots, k-1) \quad (3.32)$$

再仿照 (3.23) 式推导过程, 可将第 j 层 ($j > 1$) 外表面力学量用初始值表示:

$$R_{j1}(a_{j1}) = \Pi_{j-1} R_{11}(a) + \bar{\Pi}_{j-1} \quad (j > 1) \quad (3.33)$$

式中

$$\Pi_{j-1} = E_{j-1, k_{j-1}} E_{j-2, k_{j-2}} \cdots E_{2k_2} E_{1k_1} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{j-1} = & E_{j-1, k_{j-1}} [E_{j-2, k_{j-2}} \cdots E_{2k_2} (\bar{E}_{1k_1} + T_1) + E_{j-2, k_{j-2}} \cdots E_{3k_3} (E_{2k_2} \\ & + T_2) + \cdots + (\bar{E}_{j-2, k_{j-2}} + T_{j-2})] + \bar{E}_{j-1, k_{j-1}} \end{aligned} \quad (3.35)$$

为了把第 j 层中第 k 个薄层力学量用初始值表示, 将 (3.33) 式代入 (3.29) 式, 得到

$$R_{jk}(r) = \Pi_{jk}(r) R_{11}(a) + \bar{\Pi}_{jk}(r) \quad (j > 1) \quad (3.36)$$

式中

$$\Pi_{jk}(r) = E_{jk}(r) \Pi_{j-1}, \quad \bar{\Pi}_{jk}(r) = E_{jk}(r) \bar{\Pi}_{j-1} + \bar{E}_{jk}(r) \quad (3.37)$$

当 $j=1$ 时, (3.36) 式应由 (3.29) 代替, 并令 $j=1$ 。

当壳体内部仅受法向荷载作用时, 取矩阵方程 (3.36) 中第 1、2、4 三行, 得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_{mn}(r) \\ V_{mn}(r) \\ X_{mn}(r) \end{Bmatrix}_{jk} &= \begin{Bmatrix} \Pi_{11}(r) & \Pi_{12}(r) & \Pi_{16}(r) \\ \Pi_{21}(r) & \Pi_{22}(r) & \Pi_{26}(r) \\ \Pi_{41}(r) & \Pi_{42}(r) & \Pi_{46}(r) \end{Bmatrix}_{jk} \begin{Bmatrix} U_{mn}(a) \\ V_{mn}(a) \\ W_{mn}(a) \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} \bar{\Pi}_1(r) \\ \bar{\Pi}_2(r) \\ \bar{\Pi}_4(r) \end{Bmatrix}_{jk} \end{aligned} \quad (3.38)$$

再把 (3.26) 式代入上式, 得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U_{mn}(r) \\ V_{mn}(r) \\ X_{mn}(r) \end{Bmatrix}_{jk} &= \begin{Bmatrix} \Pi_{11}(r) & \Pi_{12}(r) & \Pi_{16}(r) \\ \Pi_{21}(r) & \Pi_{22}(r) & \Pi_{26}(r) \\ \Pi_{41}(r) & \Pi_{42}(r) & \Pi_{46}(r) \end{Bmatrix}_{jk} \begin{Bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{mn}(b) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &- \begin{Bmatrix} \bar{\Pi}_3 \\ \bar{\Pi}_4 \\ \bar{\Pi}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Pi}_1(r) \\ \bar{\Pi}_2(r) \\ \bar{\Pi}_4(r) \end{Bmatrix}_{jk} \begin{matrix} (m, n=0, 1, 2, 3, \dots) \\ (j=1, 2, 3, \dots, p) \\ (k=1, 2, 3, \dots, k_j) \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

对于每对 $m-n$, 在 (3.39) 式中令 $r=a_{jk}$ 和 b_j , 然后把它代入 (3.27) 和 (3.28) 式, 便得到关于待定常数 A_{njk} , B_{njk} 和 C_{njk} 的 3 个方程。令 $j=1, 2, \dots, p$; $k=1, 2, \dots, k_j$, 总共得到 $3(k_1+k_2+\dots+k_p+p)$ 个方程以定解相同数目的待定常数。当这些常数求出后, 利用 (3.26) 式求得初始值, 则整个叠层壳可解。

四、数值结果与讨论

下面给出的算例是用四倍精度在计算机 SIEMENS/7570C 上计算的。数表中的 I_1, I_2 和 I_3 分别是第一、第二和第三层被分割的薄层数。

算例 三层闭口悬臂圆柱壳 (图 3, $p=3$), $x=0$ 一端固支, $x=l$ 一端自由 (图 1), 内部受径向静液压力 q 作用 (图 4), 并且

$$\begin{aligned} q &= -\gamma b (\cos\theta - \cos\varphi), & \theta < \varphi \\ q &= 0, & \theta \geq \varphi \end{aligned}$$

γ 为液体密度, $\varphi=2\pi/3$ 。第一和第三层材料相同, 三层都有如下的弹性常数:

$$\begin{aligned} \frac{C_{12}}{C_{11}} &= 0.246269, & \frac{C_{13}}{C_{11}} &= 0.0831715, & \frac{C_{22}}{C_{11}} &= 0.543103 \\ \frac{C_{23}}{C_{11}} &= 0.115017, & \frac{C_{33}}{C_{11}} &= 0.530172, & \frac{C_{44}}{C_{11}} &= 0.266810 \\ \frac{C_{55}}{C_{11}} &= 0.159914, & \frac{C_{66}}{C_{11}} &= 0.262931, & \frac{C_{11}^{(4)}}{C_{11}^{(2)}} &= 5 \end{aligned}$$

$C_{11}^{(1)}$ 和 $C_{11}^{(2)}$ 分别表示第一层和第二层材料的 C_{11} 值。当 $C_{11}^{(1)} = C_{11}^{(2)} = C_{11}$ 时, 该三层壳蜕化为单层壳。几何参数是

$$h_1 = h_3 = 0.1h, \quad h_2 = 0.8h, \quad l = s = 2\pi R_0$$

R_0 是平均半径, S 为中面弧长 (图 4)。

将荷载 q 按 (2.9) 式中 σ -级数形式展开:

$$q = \sum_m \sum_n \sigma_{mn}(b) \sin \frac{m\pi x}{l} \cos(n\theta)$$

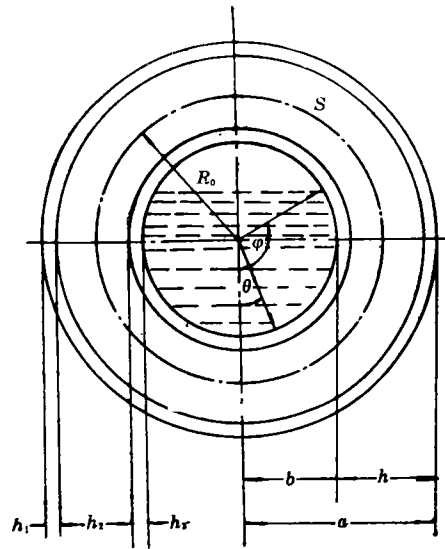


图4 静液压力作用下的三层壳

于是有

$$\sigma_{mn}(b) = -\frac{8\gamma b}{m\pi^2(n^2-1)} (\cos\varphi\sin n\varphi - n\cos n\varphi\sin\varphi) \\ (m=1, 3, 5, \dots; n=2, 3, 4, \dots)$$

$$\sigma_{mn}(b) = -\frac{4\gamma b}{m\pi^2} (\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \quad (n=0)$$

$$\sigma_{mn}(b) = -\frac{2\gamma b}{m\pi^2} (2\varphi - \sin 2\varphi) \quad (n=1)$$

当 $m=0, 2, 4, \dots$ 时, $\sigma_{mn}(b)=0$.

数值结果见表1~表4, 对应的级数项为 $n=0, 1, 2, \dots, 9$; $m=0, 1, 2, \dots, 99$. 在此情况下各力学量基本收敛. 从表1可见, 若取相应于 $I_1=I_3=4$, $I_2=12$ 的结果作为本问题的解, 误差很小. 表2~表4中还列出了SAP5给出的有限元解, 采用的是16个节点64个三维块体等参元(对1/2壳). 两种结果对比可见, 除表4中的边界应力相差很大外, 其余力学量差别不大. 表4中相应于SAP5解得的 τ_{rz} 在壳体内、外表面不为零, 且在层间不满足连续条件, 这些显然是错误的.

表1 不同分层法时三层悬臂壳的应力和挠度

$C_{11}^{(1)} / C_{11}^{(2)}$	h/R_0	I_1	I_2	I_3	$x=l/2, \theta=0, r=a$			$x=l, \theta=0,$
					$WC_{11}^{(2)}/(\gamma bh)$	$\sigma_\theta/(\gamma b)$	$\sigma_r/(\gamma b)$	$r=a$
5	1	3	10	3	22.351	1.2502	-5.6107	47.630
5	1	4	10	4	22.358	1.2513	-5.6082	47.650
5	1	4	11	4	22.351	1.2513	-5.6062	47.633
5	1	4	12	4	22.345	1.2513	-5.6046	47.619
5	1	5	13	5	22.345	1.2521	-5.6011	47.619

有限元的弱点之一是边界应力很难算准, 有时甚至连正负号都颠倒了. 这除了有限元本身因素外, 还与固支边上两种方法固定的点数不同有关. 表4中的SAP5解在固支边沿 r 方向

仅固定5点, 而精确解沿 r 方向的固定点数远远超过5个。此外, 表2中SAP5解的误差比表3中大, 这是因为表2的结果是用三层壳的程序计算的, 即令 $C_{11}^{(1)} = C_{11}^{(2)} = C_{11}$, 表2中的壳较薄, 单元体三个方向尺寸相差较, 在这种情况下, 有限元解的误差也就更大。

表2 不同厚度时单层悬臂壳的位移

h/R_0	0.1		0.2		0.4	
	$I_1=I_3=3, I_2=10$		$I_1=I_3=3, I_2=11$		$I_1=I_3=4, I_2=10$	
	本文	SAP5	本文	SAP5	本文	SAP5
$WC_{11}/(\gamma bh) (x=l/2, \theta=0)$						
$r=a$	12442.3	11086.6	2580.7	2521.51	522.20	524.64
$r=R_0+h_2/2$	12442.9	11086.9	2580.9	2521.62	522.28	524.67
$r=R_0-h_2/2$	12446.7	11088.9	2583.3	2522.69	523.77	525.55
$r=b$	12446.9	11089.1	2583.6	2522.89	524.09	525.78
$WC_{11}/(\gamma bh) (x=l, \theta=0)$						
$r=a$	26684.7	23618.1	5531.0	5424.15	1139.7	1143.93
$r=R_0+h_2/2$	26654.2	23618.9	5529.0	5424.45	1139.6	1144.06
$r=R_0-h_2/2$	26661.3	23623.6	5532.6	5427.02	1141.6	1145.73
$r=b$	26678.7	23624.2	5534.3	5427.38	1142.2	1146.04
$UC_{11}/(\gamma bh) (x=l, \theta=0)$						
$r=a$	-4252.18	-4036.08	-1000.9	-987.90	-231.41	-231.03
$r=R_0+h_2/2$	-4201.14	-3998.61	-981.70	-970.29	-223.65	-223.44
$r=R_0-h_2/2$	-3804.82	-3697.40	-829.48	-828.12	-161.70	-162.11
$r=b$	-3754.37	-3659.90	-810.30	-810.47	-153.93	-154.49
$VC_{11}/(\gamma bh) (x=l, \theta=\pi/2)$						
$r=a$	-22523.7	-22360.2	-5224.7	-5228.1	-1108.7	-1116.1
$r=R_0+h_2/2$	-22532.6	-22363.8	-5226.5	-5229.4	-1109.1	-1116.6
$r=R_0-h_2/2$	-22603.5	-22391.8	-5239.7	-5239.6	-1112.7	-1120.1
$r=b$	-22612.5	-22395.3	-5241.5	-5241.0	-1113.2	-1120.6

表3 不同厚度时三层悬臂壳的位移

h/R_0	0.6		0.8		1.0	
	$I_1=I_3=4, I_2=11$		$I_1=I_3=4, I_2=12$		$I_1=I_3=4, I_2=12$	
	本文	SAP5	本文	SAP5	本文	SAP5
$WC_{11}^{(2)}/(\gamma bh) (x=l/2, \theta=0)$						
$r=a$	101.24	101.424	45.112	45.2272	22.345	22.342
$r=R_0+h_2/2$	101.25	101.423	45.119	45.2239	22.349	22.339
$r=R_0-h_2/2$	102.15	102.079	45.809	45.7606	22.888	22.775
$r=b$	102.22	102.133	45.882	45.8159	22.954	22.828
$WC_{11}^{(2)}/(\gamma bh) (x=l, \theta=0)$						
$r=a$	221.13	221.366	97.644	97.7887	47.619	47.545
$r=R_0+h_2/2$	221.16	221.398	97.662	97.8070	47.631	47.556
$r=R_0-h_2/2$	222.11	222.358	98.376	98.5359	48.190	48.120
$r=b$	222.24	222.430	98.480	98.5990	48.277	48.175

续表 3

h/R_0	0.6		0.8		1.0	
	$I_1=I_3=4, I_2=11$		$I_1=I_3=4, I_2=12$		$I_1=I_3=4, I_2=12$	
	本文	SAP5	本文	SAP5	本文	SAP5
$UC_{II}^{(2)}/(\gamma bh) \quad (x=l, \theta=0)$						
$r=a$	-48.617	-48.485	-22.781	-22.735	-11.600	-11.547
$r=R_0+h_2/2$	-46.398	-46.300	-21.501	-21.470	-10.840	-10.798
$r=R_0-h_2/2$	-28.838	-28.716	-11.493	-11.411	-4.9982	-4.9284
$r=b$	-26.657	-26.536	-10.252	-10.157	-4.2712	-4.1903
$VC_{II}^{(2)}/(\gamma bh) \quad (r=l, \theta=\pi/2)$						
$r=a$	-216.61	-216.99	-95.720	-95.905	-46.654	-46.599
$r=R_0+h_2/2$	-216.73	-217.11	-95.790	-95.977	-46.699	-46.645
$r=R_0-h_2/2$	-217.75	-218.12	-96.553	-96.714	-44.334	-47.245
$r=b$	-217.92	-218.30	-96.670	-96.831	-47.420	-47.328

表4 不同厚度时三层悬臂壳的应力

h/R_0	0.6		0.8		1.0	
	$I_1=I_3=4, I_2=11$		$I_1=I_3=4, I_2=12$		$I_1=I_3=4, I_2=12$	
	本文	SAP5	本文	SAP5	本文	SAP5
$\sigma_\theta/(\gamma b) \quad (x=l/2, \theta=0)$						
外层外表面	3.8251	4.4020	2.0925	2.4340	1.2513	1.4720
外层内表面	3.7441	4.4070	2.0655	2.4550	1.2387	1.4920
中层外表面	0.7187	0.8430	0.3920	0.4620	0.2327	0.2750
中层内表面	0.9662	1.1700	0.6956	0.8370	0.5054	0.6060
内层外表面	5.6390	6.1450	4.1895	4.3950	3.1460	3.1750
内层内表面	5.5361	6.1780	4.2303	4.5800	3.2696	3.4690
$\sigma_\theta/(\gamma b) \quad (x=l, \theta=0)$						
外层外表面	4.2846	4.7420	2.3413	2.6190	1.4014	1.5800
外层内表面	4.2316	4.6650	2.3327	2.5740	1.4026	1.5450
中层外表面	0.8463	0.8830	0.4665	0.4774	0.2805	0.2812
中层内表面	1.0929	1.0750	0.7429	0.7328	0.5149	0.5084
内层外表面	5.4646	5.7160	3.7143	3.9170	2.5747	2.7290
内层内表面	5.5328	5.6290	3.9160	3.9980	2.8591	2.9240
$\sigma_x/(\gamma b) \quad (x=l/2, \theta=0)$						
外层外表面	-13.389	-12.930	-8.6402	-8.3140	-5.6046	-5.3720
外层内表面	-13.408	-12.750	-8.5939	-8.1700	-5.5608	-5.2670
中层外表面	-2.7034	-2.5970	-1.7340	-1.6700	-1.1231	-1.0810
中层内表面	-1.8063	-1.6930	-0.8626	-0.8020	-0.3791	-0.3380
内层外表面	-8.4474	-8.1040	-3.7983	-3.7550	-1.4481	-1.5140
内层内表面	-8.4887	-7.9260	-3.7660	-3.5980	-1.4039	-1.3790

续表 4

h/R_0	0.6		0.8		1.0	
	$I_1=I_3=4, I_2=11$		$I_1=I_3=4, I_2=12$		$I_1=I_3=4, I_2=12$	
	本文	SAP5	本文	SAP5	本文	SAP5
$\sigma_x/(\gamma b) \quad (x=0, \theta=0)$						
外层外表面	-170.90	-72.220	-96.791	-44.650	-58.036	-28.340
外层内表面	-14.644	-60.850	-9.3169	-35.560	-5.8642	-21.250
中层外表面	-2.9287	-12.170	-1.8634	-7.1120	-1.1728	-4.2490
中层内表面	-13.717	-4.6830	-8.8209	-2.8370	-5.9713	-1.8850
内层外表面	-68.587	-23.410	-44.105	-14.180	-29.856	-9.4260
内层内表面	77.417	-12.050	49.550	-5.1210	34.023	-2.3140
$\tau_{xz}/(\gamma b) \quad (x=0, \theta=0)$						
外层外表面	0.0000	12.830	0.0000	7.9990	0.0000	5.1230
外层内表面	3.2872	12.610	1.9331	7.8230	1.2067	4.9880
中层外表面	3.2872	2.5230	1.9331	1.5650	1.2067	0.9976
中层内表面	3.7132	2.4660	2.6161	1.5930	1.9518	1.0750
内层外表面	3.7132	12.330	2.6161	7.9660	1.9518	5.3760
内层内表面	0.0000	12.330	0.0000	8.0010	0.0000	5.4400

参 考 文 献

- [1] 范家让、张巨勇, 叠层开口圆柱壳的静、动态和稳定问题的精确解, 中国科学 (A辑), 6 (1992), 623—632.
- [2] 范家让、盛宏玉, 具有固支边的强厚度叠层板的精确解, 力学学报, 24(5) (1992), 574—583.
- [3] 范家让、丁克伟, 两端固支强厚度叠层闭口柱壳轴对称问题的精确解, 上海力学, 14(1) (1993), 21—33.

The Exact Solution for Thick Laminated Cantilever Cylindrical Shell

Fan Jia-rang

(Department of Architectural Engineering, Hefei University of Technology, Hefei)

Ding Ke-wei

(Department of Architectural Engineering, Anhui Architectural Industry College, Hefei)

Abstract

Discarding any assumption regarding displacement or stress models, the state equation for orthotropy is established in a cylindrical system. The exact solution is presented for the statics of thick closed laminated cantilever cylindrical shells. Every equation of elasticity can be satisfied and all the elastic constants are taken into account. Arbitrary precision of a desired order can be obtained.

Key words orthotropy, thick laminated cantilever cylindrical shell, state equation, exact solution