应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

中厚悬臂板的固有振动和稳定*

张 音 翼

（南昌大学工程力学研究所，1994年4月18日收到）

摘 要

本文由设定两个位移函数，应用最小二乘法和能量法，得到中厚悬臂矩形板固有振动和稳定的Reissner近似解。

关键词 中厚板 Reissner理论 边界效应 位移函数 梁函数 Rayleigh商数

一、前 言

板的振动和稳定是范围广泛的工程课题。Reissner 理论的提出，开始了对中厚板的静动力精化计算[1,2]。胡海昌引入两个位移函数F与f，以表示三广义位移w，ψ_x，ψ_y，并利用f的边界效应对边界条件进行简化，克服了复杂的定解条件导致的微分方程求解的困难，较合理地反映了 Reissner 理论有边界效应的良好特性[5]。文[15]由设定平均挠度和应力函数，得到中厚悬臂矩形板弯曲的 Reissner 精确解。本文选择梁函数构造两个位移函数，应用最小二乘边界放松法满足边界条件，进而由能量法完成了中厚悬臂板固有振动频率和纵向屈曲最小临界荷载的计算。

二、位移函数的选取

设有一矩形悬臂板，沿$y=0$边界固定，沿$y=b$，$x=\pm a/2$边界自由，厚度为h，板材料的三个弹性常数分别为E，G，μ，板的质量密度为ρ。(图1)

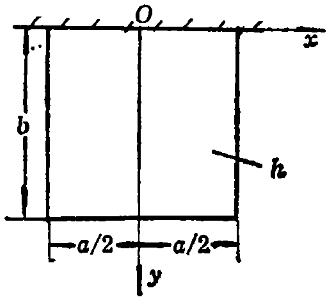

图 1

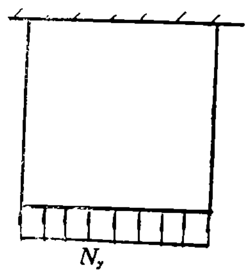

图 2

* 钱伟长推荐.
1989年9月25日第一次收到.

对这平板进行振动分析所依据的 Reissner 运动方程是[5]

$$\left.\begin{aligned}&D\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)\\&\qquad+C\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\right)+\omega^2\rho J\psi_x=0\\&D\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right)\\&\qquad+C\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\right)+\omega^2\rho J\psi_y=0\\&C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)+\omega^2\rho Jw=0\end{aligned}\right\}\tag{2.1a}$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},\quad C=\frac{5}{6}Gh,\quad J=\frac{1}{12}h^3\tag{2.1b}$$

其中，ω为固有频率，w，ψ_x，ψ_y代表广义振型.引进的位移函数F与f表示振动时的幅值.

$$w=F-\frac{D}{C}\nabla^2F,\quad \psi_x=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\quad \psi_y=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\tag{2.2}$$

它们应当满足方程

$$\left.\begin{aligned}&D\nabla^2\nabla^2F-\omega^2\rho h\left(F-\frac{D}{C}\nabla^2F\right)=0\\&\frac{1}{2}(1-\mu)D\nabla^2f-Cf=0\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

和边界条件

固定边C_u：

$$\left.\begin{aligned}&w=0,\quad \partial F/\partial n=0\\&\partial f/\partial n=\partial F/\partial s\end{aligned}\right\}\tag{2.4a}$$

自由边C_v：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2F}{\partial n^2}+\mu\frac{\partial^2F}{\partial s^2}=0,\quad \frac{\partial^3F}{\partial n^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3F}{\partial n\partial s^2}=0\\&f=\frac{1}{C}(1-\mu)D\frac{\partial^2F}{\partial n\partial s}\end{aligned}\right\}\tag{2.4b}$$

对这平板进行稳定分析，以广义位移w，ψ_x，ψ_y表示的控制方程是[5]

$$\left.\begin{aligned}&D\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\right)=0\\&D\left(\frac{\partial^2\psi_y}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\right)=0\\&C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)\\&\qquad+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

其中，　　$N_x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+N_y\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

表示中面力N_n，N_{ns}在板变形后产生的一个相当的横向分布荷载。

引进的位移函数F与f表示屈曲时的挠度。

$$w=F-\frac{D}{C}\nabla^2F,\quad \psi_x=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y},\quad \psi_y=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x} \tag{2.6}$$

它们应当满足方程

$$\left.\begin{aligned}&D\nabla^2\nabla^2F-\left(N_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+N_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(1-\frac{D}{C}\nabla^2\right)F=0\\&\frac{1}{2}(1-\mu)D\nabla^2f-Cf=0\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

和边界条件

在C_u上：

$$w=0,\quad \partial F/\partial n=0,\quad \partial f/\partial n=\partial F/\partial s \tag{2.8a}$$

在C_v上：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2F}{\partial n^2}+\mu\frac{\partial^2F}{\partial s^2}=0\\&-D\left[\frac{\partial^3F}{\partial n^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3F}{\partial n\partial s^2}\right]\\&\quad+N_n\frac{\partial}{\partial n}\left(F-\frac{D}{C}\nabla^2F\right)+N_{ns}\frac{\partial}{\partial s}\left(F-\frac{D}{C}\nabla^2F\right)=0\\&f=\frac{1}{C}(1-\mu)D\frac{\partial^2F}{\partial n\partial s}\end{aligned}\right\} \tag{2.8b}$$

其中，

$$N_n\frac{\partial}{\partial n}\left(F-\frac{D}{C}\nabla^2F\right)+N_{ns}\frac{\partial}{\partial s}\left(F-\frac{D}{C}\nabla^2F\right)$$

代表中面力N_n，N_{ns}的微小的横向投影。

这些基本方程表明，引入的位移函数F相当于薄板挠度，而位移函数f相当于薄膜挠度，f在剪切刚度较大时具有明显的边界效应。

我们选择梁函数来构造函数F与f，经过三组不同形式的试函数的试运算，最后取用使所得结果数值最小，误差最小的一组，它们分别是

$$F(x,y)=\left(16\frac{x^4}{a^4}-24\frac{x^2}{a^2}+5\right)\left(c_1\frac{y^4}{b^4}+c_2\frac{y^3}{b^3}+c_3\frac{y^2}{b^2}+c_4\right)+c_6\frac{y^3}{b^3}+\frac{y^2}{b^2} \tag{2.9a}$$

$$f(x,y)=\left(4\frac{x^3}{a^4}-3\frac{x}{a^2}\right)\left(d_1\frac{y^3}{b^4}+d_2\frac{y^2}{b^3}+d_3\frac{y}{b^2}\right) \tag{2.9b}$$

由于对称，F需满足的边界条件有6个，这里仅满足固定边$(\partial F/\partial y)_{y=0}=0$的条件，$f$需满足的边界条件是3个。设立的8个待定常数$c_1$，$c_2$，$c_3$，$c_4$，$c_6$，$d_1$，$d_2$，$d_3$可以在用加权残值法满足剩余边界条件时确定。

三、最小二乘边界放松法

选取的位移函数作为试函数代入未能初始满足的边界条件，得到边界残值$R(c_j)$，使残值R的平方积分式为最小，便组成以$\partial R/\partial c_j$为权函数的消除残值方程组，足以求出全部待定

系数c_j[7]。

先不考虑(2.8b)式中中面力对横向平衡的影响，振动与稳定边界条件相同。按照最小二乘边界放松法，由函数F的边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\left(F-\frac{D}{C}\nabla^2F\right)_{y=0}=0\\&\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)_{x=\pm a/2}=0,\quad\left[\frac{\partial^3F}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3F}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=\pm a/2}=0\\&\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)_{y=b}=0,\quad\left[\frac{\partial^3F}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3F}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=b}=0\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

设边长$a=b$，$h=0.2a$，$\mu=0.3$，我们形成线性代数方程组

$$\left.\begin{aligned}&[AP]\{c\}=\{BP\}\\&\{c\}=[c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5]^T\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

由此解出

$$\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0663999\\-0.0998151\\0.0235493\\0.00570153\\-0.5\end{Bmatrix}\tag{3.3}$$

再由另一组边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=0}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=0}\\&(f)_{x=\pm a/2}=\left[\frac{1}{C}(1-\mu)D\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\right]_{x=\pm a/2}\\&(f)_{y=b}=\left[\frac{1}{C}(1-\mu)D\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\right]_{y=b}\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

又可得到线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&[AM]\{d\}=\{BM\}\\&\{d\}=[d_1\ d_2\ d_3]^T\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

这组方程的解是

$$\begin{Bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.161790\\-0.251318\\0.0912244\end{Bmatrix}a^2\tag{3.6}$$

于是，位移试函数F与f确定，它们使边界残值为零或是最小，成为满足边界条件的近似解函数。

四、控制方程的解

进一步应用能量法，我们可以在基本振型情况下求得平板振动固有频率[10]。

用广义振型表示的中厚板最大应变能由下式给出

$$\Pi=\frac{1}{2}\iint\Big\{D\Big[\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)^2+2\mu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)^2\Big]$$

$$+C\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\Big)^2+\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\Big)^2\Big]\Big\}dxdy \tag{4.1}$$

振动过程中板的最大动能为

$$\omega^2T=\frac{1}{2}\omega^2\iint[\rho hw^2+\rho J(\psi_x^2+\psi_y^2)]\,dxdy \tag{4.2}$$

从而引出基频分析 Rayleigh 商数[9]

$$\omega^2=\Pi/T \tag{4.3}$$

凡满足边界条件同时又与基本振型非常相近的广义振型函数，将使 Rayleigh 商数取最小值。

对于方板，将(3.3)回代(2.9a)式，(3.6)回代(2.9b)式，再将(2.9)代入(2.2)式，便给出确定的三广义振型函数。这些函数代入方程(4.3)进行积分，最后求得板的固有振动频率

$$\omega_{min}=8.42193\sqrt{D/\rho a^5} \tag{4.4}$$

同样，可以在纵向屈曲情况下计算出平板失稳临界荷载[11]。

稳定问题的中厚板应变能仍然是(4.1)式，式中的w，ψ_x，ψ_y为广义位移。

设沿与固定边相对的自由边$y=b$作用着均布压力N_y（图2），则外力的势能为

$$N_yV=\frac{1}{2}\iint N_y\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2dxdy \tag{4.5}$$

由平板屈曲时系统的总势能为零，也可以给出一个屈曲 Rayleigh 商数[9]

$$N_y=\Pi/V \tag{4.6}$$

显然，满足边界条件且与平板屈曲十分近似的广义位移，将使这个 Rayleigh 商数取最小值。

将由式(3.3)、式(3.6)确定的三广义位移(2.6)代入方程(4.6)进行积分，便得到方板的纵向屈曲最小临界荷载

$$(N_y)_{cr}=3.67143D/a^2 \tag{4.7}$$

考虑中面力对边界横向平衡的影响，将(4.7)回代(2.8b)进行校核，结果表明，正是逼近真实解的解函数使误差为最小。控制方程与边界条件的满足同步完成，本文的计算是合理的。

五、结 论

本文在应用 Reissner 理论对中厚悬臂矩形板的固有振动和稳定进行分析时，解决了几个问题：

悬臂板三条边给出的自然边界条件是三广义位移的耦合，而位移函数的引入将定解条件简化为先后相继的两个函数的问题，方便了函数形式的确定。

2．最小二乘边界放松法用于求解边界条件众多的中厚板问题，试函数选择得当时，既简易又合理，可为工程设计提供可靠的数据。

3．Rayleigh 商数是计算板的基频近似值和屈曲临界荷载的非常有效的方法，求解困难时 Rayleigh 法获得成功甚至更容易。

参 考 文 献

[1] Panc, V., *Theories of Elastic Plates* (1975).

[2] Reissner, E., On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, *Int. J. of Solids and Structures*. 11 (1975), 569—573.

[3] 钱伟长，《变分法及有限元》（上册）》，科学出版社（1980）.

[4] 杨耀乾，《平板理论》，中国铁道出版社（1980）.

[5] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社（1981）.

[6] 张福范，《弹性薄板（第二版）》，科学出版社（1984）.

[7] 徐次达，《固体力学加权残值法》，同济大学出版社（1987）.

[8] 杜庆华、余寿文、姚振汉，《弹性理论》，科学出版社（1986）.

[9] Dym, C. L. and I. H. Shames, 《固体力学变分法》，袁祖贻、姚金山、应达之译，中国铁道出版社（1984）.

[10] Timoshenko, S., D. H. Young and W. Weaver, Jr., 《工程中的振动问题》，胡人礼译，人民铁道出版社（1978）.

[11] Timoshenko,S. and J. M. Gere,《弹性稳定理论》,第二版,张福范译,科学出版社(1965).

[12] 罗恩、雷羽田、吴邦锐，关于弹性地基上厚板的固有振动问题，振动和冲击,6(1)（1987）.

[13] 李龙元，缓变厚度中厚板的自由振动，应用数学和力学，7(7)（1986），655—662.

[14] 成祥生，悬臂矩形板的弯曲稳定和振动，应用数学和力学，8(7)（1987），639—648.

[15] 张音翼，中厚悬臂板的弯曲，江西工业大学学报，10(3)（1988）.

Free Vibration and Stability of Moderate-Thick Cantilever Plates

Zhang Yin-yi

(*Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang*)

Abstract

By means of the constitution of the two displacement functions and the application of the least squares method and the energy method this paper gives the Reissner approximate solutions of the free vibration and the stability for the moderate-thick cantilever rectangular plate.

Key words moderate-thick plate, Reissner theory, boundary effect, displacement function, beam function, Rayleigh quotient