应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半线性抛物型积分—微分方程的谱方法

刘小清　吴声昌

（北京 中国科学院应用数学研究所）

（丁协平推荐，1994年2月7日收到）

摘　要

本文在讨论带有半线性记忆项抛物型方程半离散格式的基础上，构造了空间方向谱离散，时间方向后欧拉方法的全离散格式，并给出了误差估计．对于记忆项的数值积分，采用了梯形公式与矩形公式结合的方法，并估计了数值积分的影响．

关键词　抛物型　积分—微分方程　谱方法　向后欧拉法

一、问题与算法

半线性抛物型积分—微分方程

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}=\int_0^t f(t,\ s,\ u(x,\ s))ds \tag{1.1}$$

不仅是热传导的数学模型，而且它还出现在物理、力学和生物学等诸多应用领域中，例如多孔粘弹性媒质压缩、反应堆动力学、传染现象等等．形如(1.1)的方程解的存在唯一性及渐近性态等，不少文献均有讨论[1]．

为便于应用Fourier逼近，我们假定u_0和$f(t,s,\cdot,\ u)$以2π为周期．考虑(1.1)的弱解形式：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t},\ v\right)+A(u,\ v)=\displaystyle\int_0^t (f(t,\ s,\ u),\ v)dS, & \forall v\in H_p^1(0,\ 2\pi) \quad (1.2\text{a})\\ u(x,\ 0)=u_0(x), & x\in(0,\ 2\pi) \quad (1.2\text{b})\end{cases}$$

其中$H_p^1(0,\ 2\pi)$为$H^1(0,\ 2\pi)$的子空间，包含全体具有各阶周期导数的函数，$A(\cdot,\cdot)$是$H_p^1(0,\ 2\pi)\times H_p^1(0,\ 2\pi)$上的双线性型，定义如下：

$$A(u,\ v)=(d^2u/dx^2,\ v)$$

令

$$F_N=\{e^{ikx},\ x\in(0,\ 2\pi):|k|\leqslant N\}$$

并记P_N为$L^2(0,\ 2\pi)$到F_N上的正交投影算子．我们构造如下半离散格式：求$u_N\in F_N$，使得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial u_N}{\partial t},\ v\right)+A(u_N.v)=\displaystyle\int_0^t (f(t,\ s,\ u_N),\ v)ds \\ \qquad\qquad\equiv(\bar{f}(t,\ u_N),\ v), \qquad \forall v\in F_N & (1.3\text{a})\\ u_N(0)=P_N u_0 & (1.3\text{b})\end{cases}$$

我们引入算子d^2/dx^2的离散化，$A_N: F_N \to F_N$，定义如下，

$$(A_N u,\ v) = A(u,\ v), \qquad \forall u,\ v \in F_N \tag{1.4}$$

则(1.3a)可以改写为

$$\partial u_N/\partial t + A_N u_N = P_N \bar{f}(t,\ u_N)$$

进而我们对时间采用向后欧拉法以构造全离散格式，即求$u_N^n \in F_N$，使得

$$\begin{cases} \partial_\tau u_N^n + A_N u_N^n = P_N \bar{f}^n(u_N) & (1.5a) \\ u_N^0 = P_N u_0 & (1.5b) \end{cases}$$

其中τ为时间步长，∂_τ记向后差分，即

$$\partial_\tau u_N^n = \frac{1}{\tau}(u_N^n - u_N^{n-1})$$

$\bar{f}^n(u_N)$是$\bar{f}(t_n,\ u_N)$的数值积分逼近。最简单的数值积分为矩形公式，但为了计算u_N^i，它要求储存u_N^i在$i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$处的值。

为克服矩形公式的上述缺点，我们考虑使用梯形公式，以使截断误差达到二阶，从而积分步长可以放大，而储存的节点可以减少到$O(\tau^{-1/2})$。

令$h=k\tau$为积分步长，其中$k=[\tau^{-1/2}]$，I_n为满足$I_n h \leqslant t_{n-1}$，$(I_n+1)h > t_{n-1}$的唯一整数，记$S_i = ih$，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ I_n$。我们给出积分区间的一个剖分如下：

$$[0,\ t_n] = \bigcup_{i=0}^{I_n-1}[S_i,\ S_{i+1}] \cup [S_{I_n},\ t_{n-1}] \cup [t_{n-1},\ t_n]$$

为确保(1.5)导出线性的方程组，我们在子区间$[t_{n-1},\ t_n]$上用矩形公式，并以t_{n-1}为节点.在其他子区间上，我们用梯形公式，从而完整的数值积分如下：

$$\begin{aligned} \bar{f}^n(u_N) = {} & \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{I_n-1}[f(t_n,\ S_i,\ u_n^{ik}) + f(t_n,\ S_{i+1},\ u_N^{(i+1)k})] \\ & + \frac{1}{2}(t_{n-1} - S_{I_n})[f(t_n,\ S_{I_n},\ u_N^{I_n k}) + f(t_n,\ t_{n-1},\ u_N^{n-1})] \\ & + \tau f(t_n,\ t_{n-1},\ u_N^{n-1}) \end{aligned}$$

二、半离散化的误差估计

引理2.1[2] 设$v \in H^m(0,\ \pi) \cap H_p^1(0,\ 2\pi)$，则以下误差估计成立：

$$\|v - P_N v\| \leqslant c N^{-m} \|u\|_m$$

$$\|v - P_N v\|_1 \leqslant c N^{1-m} \|u\|_m$$

引理2.2 设w为

$$-\frac{d^2}{dx^2} w = \chi,\quad \chi \in H_p^1(0,\ 2\pi)$$

的解，则我们有

$$\|w\|_2 \leqslant c\|\chi\|$$

证明 由于w是周期函数，由Friedrichs不等式

$$\|u\|_{1,\Omega} \leqslant c\left(|u|_{1,\Omega} + \left\|\int_{\partial\Omega} u ds\right\|\right), \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$$

我们有

$$\|w\|_1 \leqslant c|w|_1$$

另一方面

$$|w|_1^2 = \left(\frac{dw}{dx}, \frac{dw}{dx}\right) = \left(-\frac{d^2w}{dx^2}, w\right) = (\chi, w) \leqslant \|\chi\|\|w\| \leqslant \|\chi\|\|w\|_1$$

从而

$$\|w\|_1 \leqslant c\|\chi\|$$

注意到$|w|_2 = \|\chi\|$，则引理得证。

引理2.3 令$R_N: H_p^1(0, 2\pi) \to F_N$为所谓Ritz投影，即

$$A(R_N u, v) = A(u, v), \qquad \forall v \in F_N \tag{2.1}$$

假定$v \in H^m(0, 2\pi) \cap H_p^1(0, 2\pi)$，则我们有如下估计，

$$\|R_N v - v\| \leqslant cN^{-m}\|v\|_m \tag{2.2}$$

$$\|R_N v - v\|_1 \leqslant cN^{1-m}\|v\|_m \tag{2.3}$$

证明 由(2.1)，我们有

$$A(R_N v - v, R_N v) = A(R_N v - v, P_N v) = 0 \tag{2.4}$$

而

$$|R_N - v|_1^2 = A(R_N v - v, R_N v - v) = A(R_N v - v, P_N v - v)$$
$$\leqslant |R_N v - v|_1 \cdot |P_N v - v|_1$$

由引理2.1，我们有

$$|R_N v - v|_1 \leqslant cN^{1-m}\|v\|_m$$

因为

$$(R_N v - v, \chi) = \left(R_N v - v, -\frac{d^2}{dx^2} w\right) = \left(\frac{d}{dx}(R_N v - v), \frac{d}{dx} w\right)$$
$$= \left(\frac{d}{dx}(R_N v - v), \frac{d}{dx}(w - R_N w)\right)$$
$$= |R_N v - v|_1 \cdot |R_N w - w|_1$$
$$\leqslant cN^{-m}\|v\|_m \|w\|_2$$
$$\leqslant cN^{-m}\|v\|_m \cdot \|\chi\|$$

则取$\chi = R_N v - v$，则引理得证。

定理2.1 设f关于u Lipschitz 连续，常数为L，若$u \in H^m(0, 2\pi) \cap H_0^1(0, 2\pi)$和$u_N$分别为(1.2)和(1.3)的解，则我们有下列误差估计，

$$\|u_N(t) - u(t)\| \leqslant cN^{-m}\left(\|u_0\|_m + \int_0^t \left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|_m ds\right), \qquad t \in [0, T]$$

证明 令$\bar{u} = u_N - R_N u$，$\tilde{u} = R_N u - u$，并注意到(2.4)，我们有

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, v\right) + A(\bar{u}, v) = \left(\int_0^t (f(t, s, u_N(s)) - f(t, s, u(s)))ds, v\right) - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, v\right)$$
$$\forall v \in F_N \tag{2.5}$$

或

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + A_N \bar{u} = P_N(\bar{f}(t, u_N) - \bar{f}(t, u)) - P_N \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}$$

于是

$$\bar{u}(t) = E_N(t)\bar{u}(0) + \int_0^t E(t-s)P_N\left(\bar{f}(s, u_N(s)) - \bar{f}(s, u(s)) - \frac{\partial \tilde{u}(s)}{\partial t}\right)ds$$

其中$E_N(t)$为$-A_N$生成的算子半群．不难看出，$\|E_N(t)\|\leqslant 1$，而由 Bessel 不等式，我们又有$\|P_N\|\leqslant 1$，因此

$$\|\bar{u}(t)\|\leqslant\|\bar{u}(0)\|+\int_0^t\left(\|\bar{f}(s,\ u_N(s))-\bar{f}(s,\ u(s))\|+\left\|\frac{\partial\tilde{u}(s)}{\partial t}\right\|\right)ds$$

$$\leqslant\|\bar{u}(0)\|+L\int_0^t\int_0^s\|u_N(s')-u(s')\|ds'ds+\int_0^t\left\|\frac{\partial\tilde{u}(s)}{\partial t}\right\|ds$$

$$\leqslant\|P_Nu_0-u_0\|+\|\bar{u}(0)\|+LT\int_0^t\|\tilde{u}(s)\|ds$$

$$+\int_0^t\left\|\frac{\partial\tilde{u}(s)}{\partial t}\right\|ds+LT\int_0^t\|\bar{u}(s)\|ds$$

由Gronwall不等式，有

$$\|\bar{u}(t)\|\leqslant\left(\|P_Nu_0-u_0\|+\|\bar{u}(0)\|+LT\int_0^t\|\tilde{u}\|ds\right.$$

$$\left.+\int_0^t\left\|\frac{\partial\tilde{u}(s)}{\partial t}\right\|ds\right)\exp[LT^2],\qquad t\in[0,\ T] \tag{2.6}$$

因为

$$\|\tilde{u}(s)\|\leqslant cN^{-m}\|u(s)\|_m\leqslant cN^{-m}\left(\|u_0\|_m+\int_0^s\left\|\frac{\partial u(s')}{\partial t}\right\|ds'\right)$$

由引理2.1，引理2.3及(2.6)，我们有

$$\|\bar{u}(t)\|\leqslant cN^{-m}\left(\|u_0\|_m+\int_0^t\left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|_m ds\right)$$

且

$$\|u_N(t)-u(t)\|\leqslant\|\bar{u}(t)\|+\|\tilde{u}(t)\|\leqslant cN^{-m}\left(\|u_0\|_m+\int_0^t\left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|_m ds\right)$$

$$t\in[0,\ T]$$

三、全离散格式的误差估计

引理3.1 令$E_{N,\tau}=(I+\tau A_N)^{-1}$为$E_N(t)$的离散化，

则 $$\|E_{N,\tau}\|\leqslant 1$$

证明 若$E_{N,\tau}w=\chi$，或$w=(I+\tau A_N)\chi$，则

$$\|w\|\cdot\|\chi\|\geqslant(w,\ \chi)=((I+\tau A_N)\chi,\ \chi)=\|\chi\|^2+\tau A(\chi,\ \chi)\geqslant\|\chi\|^2$$

故$\|\chi\|\leqslant\|w\|$，或$\|E_{N,\tau}\|\leqslant 1$．

引理3.2[3] 对于满足下列条件的序列$\{v_n\geqslant 0\}_{n=0}^{\infty}$

$$v_n\leqslant b_n+\sum_{i=0}^{n-1}a_iv_i\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

其中a_i，$b_i\geqslant 0$，$b_{i+1}\geqslant b_i$，$i=0$，1，…，我们有

$$v_n\leqslant b_n\exp\left(\sum_{i=0}^{n-1}a_i\right)\qquad(n=0,\ 1,\ \cdots)$$

在分析整体误差之前，我们首先估计数值积分的误差。

引理3.3 令$\bar{f}^n(u)$为$\bar{f}(t_n, u)$的数值逼近，如第一节中所示。我们有如下的截断误差估计。

$$\|\bar{f}^n(u)-\bar{f}(t_n, u)\|\leqslant c(t_n, f)\tau$$

其中 c 是依赖于t_n和f的正数。

证明 因为梯形公式和矩形公式的截断误差分别为二阶和一阶，注意到$h^2=o(\tau)$，则上述估计成立。

定理3.1 设$u\in H^m(0, 2\pi)\cap H_p^1(0, 2\pi)$及$u_N^n$分别为(1.2)和(1.5)的解，则我们有如下误差估计，

$$\|u_N^n-u^n\|\leqslant cN^{-m}\left(\|u_0\|_m+\int_0^{t_n}\|u_t(s)\|_m ds\right)$$
$$+c\tau\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial^2 u(s)}{\partial t^2}\right\|ds+c(t_n, f)\tau$$

证明 令$\bar{u}^n=u_N^n-R_N u^n$，$\tilde{u}^n=R_N u^n-u^n$，则

$$\partial_\tau\bar{u}^n+A_n\bar{u}^n=P_N\left(\frac{\partial u^n}{\partial t}-\partial_\tau u^n\right)+P_N(I-R_N)\partial_\tau u^n$$
$$+P_N(\bar{f}^n(u)-\bar{f}(t_n, u))+P_N(\bar{f}^n(u_n)-\bar{f}^n(u))$$
$$=P_N\left(\sum_{l=1}^4\theta_l^n\right)$$

设$E_{N,\tau}$为引理3.1中定义的算子，则由上可得

$$\bar{u}^n=E_{N,\tau}\bar{u}^{n-1}+\tau E_{N,\tau}\circ P_N\left(\sum_{l=1}^4\theta_l^n\right)$$

从而

$$\|\bar{u}^n\|\leqslant\|\bar{u}^{n-1}\|+\tau\sum_{l=1}^4\|\theta_l^n\|$$

递推可得

$$\|\bar{u}^n\|\leqslant\|\bar{u}_0\|+\tau\sum_{l=1}^4\sum_{i=1}^n\|\theta_l^i\|$$

我们现在对右端进行估计

$$\|\bar{u}_0\|\leqslant\|\tilde{u}^0\|+\|u_N(0)-u_0\|\leqslant cN^{-m}\|u_0\|_m \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=0}^n\|\theta_1^i\|=\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{t_{i-1}}^{t}\frac{\partial^2 u(s)}{\partial t^2}dsdt\right\|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\frac{\partial^2 u(s)}{\partial t^2}\right\|ds=\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial^2 u(s)}{\partial t^2}\right\|ds \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=0}^n\|\theta_2^i\|=\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^n\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}(I-R_N)\frac{\partial u(s)}{\partial t}ds\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|(I-R_N)\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|ds$$

$$\leqslant c\tau^{-1}N^{-m}\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|ds \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\|\theta_3^i\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}c(t_i,\ f)\tau\leqslant c(t_n,\ f)\tau \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\|\theta_4^i\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\omega_{ij}\|f(t_i,\ t_j,\ u_N^j)-f(t_i,\ t_j,\ u^j)\|$$

$$\leqslant L\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\omega_{ij}\|u_N^j-u^j\|$$

其中

$$\omega_{ij}=\begin{cases} h/2 & (j=0)\\ h & (j=k,\ 2k,\ \cdots,\ (J_i-1)k)\\ h/2+(t_{i-1}-J_ih)/2 & (j=J_ik)\\ (t_{i-1}-J_ih)/2+\tau & (j=i-1)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

显然

$$\sum_{i=j+1}^{n}\omega_{ij}\leqslant a_j=\begin{cases} h, & j\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ k)\\ k\tau, & j\equiv 0(\mathrm{mod}\ k)\end{cases}$$

故

$$\tau\sum_{i=1}^{n}\|\theta_4^i\|\leqslant L\sum_{j=0}^{n-1}a_j\|u_N^j-u^j\| \tag{3.5}$$

a_j满足

$$\tau\sum_{j=0}^{n-1}a_j\leqslant t_nk+\tau J_nkT\leqslant c \tag{3.6}$$

由(3.1)～(3.6)可得

$$\|\bar{u}^n\|\leqslant cN^{-m}\|u_0\|_m+cN^{-m}\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|ds+\tau\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial^2u(s)}{\partial t^2}\right\|ds$$

$$+c(t_n,\ f)\tau+LT\sum_{j=0}^{n-1}a_i\|u_N^j-u^j\|$$

另一方面

$$\|\tilde{u}^n\|\leqslant\|\tilde{u}^0\|+\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial\tilde{u}(s)}{\partial t}\right\|ds\leqslant cN^{-m}\|u_0\|+cN^{-m}\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|ds$$

因此

$$\|u_N^n-u^n\|\leqslant\|\bar{u}^n\|+\|\tilde{u}^n\|$$

$$\leqslant cN^{-m}\left(\|u_0\|_m+\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|ds\right)$$

$$+\tau\int_0^{t_n}\left\|\frac{\partial^2 u(s)}{\partial t^2}\right\|ds+c(t_n,\ f)\tau+L\tau\sum_{j=0}^{n-1}a_j\|u_N^j-u^j\|$$

由引理3.2和(3.2)，定理得证。

参 考 文 献

[1] Yanik, E. G. and G. Fairweather, Finite element method for parabolic and hyperbolic partial integro-differential equations, *Nonlinear Anal.*, 12 (1988), 785—809.

[2] Canuto, C., etc., *Spectral Method in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1987).

[3] Sloan, I. H. and V. Thomée, Time discretization for an integro-differential equation of parabolic type, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23 (1986), 1052—1061.

[4] Le Roux, M. N. and V. Thomée, Numerical solution of semilinear integro-differential equations of parabolic type with nonsmooth data, *SIAM.J. Numer. Anal.*, 26 (1989), 1291—1309.

[5] Gottlieb, D., Numerical analysis of spectral method, *CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Math.*, 26 (1977).

Spectral Method for Semilinear Parabolic Integrodifferential Equations

Liu Xiao-qing   Wu Sheng-chang

(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

Based on the discussion of the semidiscretization of a parabolic equation with a semilinear memory term, an error estimate is derived for the fully discreate scheme with spectral method in space and the backward Euler method in time. The trapezoidal rule is adopted for the quadrature of the memory term and the quadrature error is estimated.

Key words parabolic, integrodifferential equation, spectral method, backward Euler method