应用数学和力学，第15卷 第12期（1994年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Navier-Stokes方程稳定性研究(Ⅲ)*

施惟慧

（上海大学，1994年1月20日收到）

摘要

本文给出Navier-Stokes方程某些初值问题存在C^2解的必要条件，并给出其在$\{t=0\}$上的初值问题不适定的例证.

Navier-Stokes方程的初值问题是研究这个方程的基础问题之一. 国内外很多学者在这方面的研究曾取得了不同程度的结果. 法国的 J. Leray教授就曾在某种意义下证明过Navier-Stokes方程某种初边值问题解的存在性[3]. 本文根据 J. Hadamard 的偏微分方程的基础理论[1]，给出某些关键问题的严格定义，叙述一个有关 Navier-Stokes 方程不稳定的基本定理. 最后给出若干例证，其证明可参见[4].

关键词 Ehresmann空间　本方程　Cauchy问题

一、几个基本定义和基本定理

设Σ，Y，V，Z都是实C^∞流形，并假定V的维数$n\geqslant 2$，Σ的维数为$n-1$. 我们以$PL(\Sigma,Y)$代表所有从Σ到Y的C^∞嵌入构成的空间（具有C^∞细拓扑），D是一个k_0阶偏微分方程组，$D\subseteq J^{k_0}(V,\ Z)$（$J^{k_0}(V,\ Z)$为$k_0$阶 Ehresmann 空间），并设$(\sigma,\ \gamma)$是乘积空间$PL(\Sigma,\ V)\times PL(\Sigma,\ J^{k_0-1}(V,Z))$的一个元素，其中$\sigma\in PL(\Sigma,V)$，$\gamma\in PL(\Sigma,J^{k_0-1}(V,Z))$.

我们给出以下几个定义：

定义1 设$(\sigma,\ \gamma)\in PL(\Sigma,\ V)\times PL(\Sigma,\ J^{k_0-1}(V,\ Z))$，并满足如下条件：

（1）　$\alpha^{k_0-1}_{-1}\circ\gamma=\sigma$

（2）　$\gamma^*\omega=0$　　$(\forall\,\omega\in I_{k_0-1}(V,\ Z))$

I_k局部由$J^k(V,\ Z)=\mathbf{R}^N$的Pfaff形式生成：

$$\begin{cases}\omega^i=du_i-(\Sigma_j\beta^i_j dx_j)\\ \omega^i_{;\lambda}=d\beta^i_{;\lambda}-(\beta^i_{;\lambda_1}dx_1+\cdots+\beta^i_{;\lambda_n}dx_n), & |\lambda|\leqslant k-1\end{cases}$$

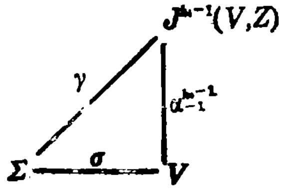
（3）　$\mathrm{Im}\gamma\subseteq D_{k_0-1}$

上述条件中的$\alpha^{k_0-1}_{-1}$是$J^{k_0-1}(V,\ Z)$到V的典则对应；$I_{k_0-1}(V,\ Z)$是(k_0-1)阶 Cartan-

* 钱伟长推荐.

Ehresmann理想子代数；D_{k_0-1}是D的(k_0-1)阶本方程。((k_0-1)-imèm graduè associè ā D)。

我们说，这样的$(\sigma,\ \gamma)$为方程组D的Cauchy问题定义了一组初始条件。



将所有满足以上条件的$(\sigma,\ \gamma)$记为$I(\Sigma,\ D)$，这是一个具有C^∞诱导拓扑的乘积空间$PL(\Sigma,\ V)\times PL(\Sigma,\ J^{k_0-1}(V,\ Z))$的子空间。

设$(\sigma,\ \gamma)\in I(\Sigma,\ D)$，$v$是$\operatorname{Im}\sigma(\Sigma)$的一个管状邻域。

定义2 设对应$f:V\to Z$，$f\in C^\infty$。如果在Σ上它满足以下的条件，我们就说f是方程组D对应于初始条件$(\sigma,\ \gamma)$的一个C^∞解。

$$\operatorname{Im} j^{k_0}f\subseteq D,\quad j^{k_0-1}f\circ\sigma=\gamma$$

$$(j^kf:V\to J^k(V,\ Z),\ f\text{的}k\text{阶截口})$$

定义3 我们说初始条件$(\sigma_0,\ \gamma_0)\in I(\Sigma,\ D)$对方程组$D$的Cauchy问题是适定的，如果它满足以下条件：

（1） 这个问题具有唯一的C^∞解；

（2） 在空间$I(\Sigma,\ D)$中，存在着$(\sigma_0,\ \gamma_0)$的一个邻域O_0，使得任何$(\sigma,\ \gamma)\in O_0$，对应于初始条件$(\sigma,\ \gamma)$，D都存在着唯一的C^∞解。

注1 如果方程的重数$\geqslant 2$[5]，在上述适定性定义中取消唯一性这一条件。

注2 流形Σ的维数q可以小于$(n-1)$，另外，对于γ，$\gamma:\Sigma\to J^q(V,\ Z)$，$q$可以不等于$(k_0-1)$。

现在固定V上一个点P_0，$P_0\in V$，将Σ以q维单形Δ_q取代，于是可得局部Cauchy问题的初始条件及其适定性的定义。

根据以上的定义，可以知道“不适定”的情况有以下几种可能：

（1） 对于初始条件$(\sigma_0,\ \gamma_0)$，方程组不存在C^k解$(k\geqslant k_0)$；

（2） 对应于同一组$(\sigma_0,\ \gamma_0)$，D的$C^k(k\geqslant k_0)$解不唯一；

（3） 不存在$(\sigma_0,\ \gamma_0)$的邻域$O_0\subseteq I(\Sigma,\ D)$，具有定义3中的性质。

定义4 设$x_0\in V$，u^0是D的一个$C^k(k\geqslant k_0)$解。如果对任何C^k超曲面X在x_0点的芽σ，$\sigma:X\to V$，初始条件$(\sigma,\ \gamma)\in I(X,\ D)$ $(\gamma=j^{k_0-1}u^0\circ\sigma)$都是不适定的，我们就说$D$的解$u^0$在点$x_0$是不稳定的。

如果对V上所有的点，u^0都是不稳定的，我们就说u^0是D的一个不稳定解。

如果D的所有$C^k(k\geqslant k_0)$解都是不稳定的，我们称方程组D是不稳定的。

以下我们讨论Navier-Stokes方程，根据L. Landau-E. Lifchitz的理论，对于一种有粘性、不可压（无热交换）流体，其运动状态用以下方程组来描述[2]

$$D:\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}(x,\ t)\\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\end{cases}$$

其中，$(x,\ t)=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}$是点的坐标，

$$\boldsymbol{v}(x,\ t)=(v_1(x,\ t)),\ v_2(x,\ t),\ v_3(x,\ t))$$

是速度矢量，$p(x,\ t)$是压力，$\rho>0$，$\nu>0$分别代表密度及动粘性系数（coefficient de viscosité cinématique)，方程的未知函数组是$U(v_1,\ v_2,\ v_3,\ p)$，而ρ与ν被假定为已知常数。

由于D是一个二阶拟线性方程组，因而我们在研究过程中限定所求的解均属于$C^k, k\geqslant 2$.

以下我们叙述有关的定理：

基本定理 Navier-Stokes方程D是不稳定的。

证明过程可参看[4].

现在考虑Navier-Stokes方程D的如下两类初值问题.

(1)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}(x,\ t)\\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\\ \boldsymbol{v}|_{t=f(x)}=\boldsymbol{\Phi}(x)\end{cases}$$

和

(2)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}(x,\ t)\\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\\ \boldsymbol{v}|_{x=g(x_2,\ x_3,\ t)}=\boldsymbol{\psi}(x_2,\ x_3,\ t)\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=(\phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \phi_3(x))$$

$$\boldsymbol{\psi}(x_2,\ x_3,\ t)=(\psi_1(x_2,\ x_3,\ t),\ \psi_2(x_2,\ x_3,\ t),\ \psi_3(x_2,\ x_3,\ t))$$

而 (S_f): $t=f(x)=f(x_1,\ x_2,\ x_3)$

(S_g): $x_1=g(x_2,\ x_3,\ t)$

都是其变量的$C^k(k\geqslant 2)$函数，即$\mathbf{R}^4$中的两个C^k超曲面．为方便，以下将t改记为x_4，p记为v_4，即：$x_4=t$，$v_4=p$，并引进如下记号：

$$\lambda_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3);\quad \delta_j=\frac{\partial g}{\partial x_j}\quad (j=2,\ 3,\ 4)$$

注意 在上述问题(1)中，我们仅仅给出了在$t=0$上初始值.

那末，为使问题(1)存在C^2解的必要条件是

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0\\ &\lambda_1\hat{\alpha}_1+\lambda_2\hat{\alpha}_2+\lambda_3\hat{\alpha}_3-\nu[\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2]\hat{\alpha}_4=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

或

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=0\\ &\phi_1(1)+\phi_2(2)+\phi_3(3)=0\\ &\sum_{i=1}^{5}(\hat{\alpha}_i)^2=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

式中

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1=&[p_4^1+\phi_1p_1^1+\phi_2p_2^1+\phi_3p_3^1-\tilde{F}_1]+p_1^4/\rho+\nu[\lambda_1p_4^1(1)\\ &+\lambda_2p_4^1(2)+\lambda_3p_4^1(3)-p_1^1(1)-p_2^1(2)-p_3^1(3)]\\ \hat{\alpha}_2=&[p_4^2+\phi_1p_1^2+\phi_2p_2^2+\phi_3p_3^2-\tilde{F}_2]+p_2^4/\rho+\nu[\lambda_1p_4^2(1)\\ &+\lambda_2p_4^2(2)+\lambda_3p_4^2(3)-p_1^2(1)-p_2^2(2)-p_3^2(3)]\\ \hat{\alpha}_3=&[p_4^3+\phi_1p_1^3+\phi_2p_2^3+\phi_3p_3^3-\tilde{F}_3]+p_3^4/\rho+\nu[\lambda_1p_4^3(1)\end{aligned}$$

$$+\lambda_2 p_4^1(2)+\lambda_3 p_4^1(3)-p_1^1(1)-p_2^1(2)-p_3^1(3)]$$

$$\hat{\alpha}_4=p_4^1(1)+p_4^2(2)+p_4^3(3)$$

$$\hat{\alpha}_5=-[(p_1^1)^2+(p_2^2)^2+(p_3^3)^2+2p_2^1p_1^2+2p_3^1p_1^3+2p_3^2p_2^3]$$

$$+\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right]+\frac{1}{\rho}[\lambda_1 p_4^4(1)+\lambda_2 p_4^4(2)+\lambda_3 p_4^4(3)$$

$$-p_1^4(1)-p_2^4(2)-p_3^4(3)]$$

$$p_j^i=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\bigg|_{S_f},\quad p_j^i(k)=\frac{\partial p_j^i}{\partial x_k},\quad \phi_k=\frac{\partial \phi_k}{\partial x_k}\qquad (i,j=1,2,3,4;\ k=1,2,3)$$

而$p_j^i(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$由以下关系确定：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1 p_4^1+\lambda_2 p_4^2+\lambda_3 p_4^3-\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \phi_3}{\partial x_3}\right]=0\\&p_1^i=\partial\phi_i/\partial x_1-\lambda_1 p_4^i\\&p_2^i=\partial\phi_i/\partial x_2-\lambda_2 p_4^i\\&p_3^i=\partial\phi_i/\partial x_3-\lambda_3 p_4^i\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

为使问题(2)存在C^2解的必要条件是：

$$\hat{\beta}_1+(-\delta_2)\hat{\beta}_2+(-\delta_3)\nu\theta\hat{\beta}_3+(-\nu\theta)\hat{\beta}_4=0\tag{1.4}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\theta=1+\delta_2^2+\delta_3^2\\&\hat{\beta}_1=[q_4^1+\psi_1q_1^1+\psi_2q_2^1+\psi_3q_3^1-\bar{F}_1+q_1^4/\rho]\\&\qquad+\nu[\delta_2q_1^1(2)+\delta_3q_1^1(3)-q_2^1(2)-q_3^1(3)]\\&\hat{\beta}_2=[q_4^2+\psi_1q_1^2+\psi_2q_2^2+\psi_3q_3^2-\bar{F}_2+q_2^4/\rho]\\&\qquad+\nu[\delta_2q_1^2(2)+\delta_3q_1^2(3)-q_2^2(2)-q_3^2(3)]\\&\hat{\beta}_3=[q_4^3+\psi_1q_1^3+\psi_2q_2^3+\psi_3q_3^3-\bar{F}_3+q_3^4/\rho]\\&\qquad+\nu[\delta_2q_1^3(2)+\delta_3q_1^3(3)-q_2^3(2)-q_3^3(3)]\\&\hat{\beta}_4=-q_1^2(2)-q_1^3(3)\\&q_j^i=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\bigg|_{S_0},\quad q_j^i(k)=\frac{\partial q_j^i}{\partial x_k},\quad \bar{F}_k=F_k|_{S_0}\\&(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ k=2,\ 3,\ 4)\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

而q_j^i由以下关系式确定：

$$\left.\begin{aligned}&q_1^1+(-\delta_2)q_1^2+(-\delta_3)q_1^3+\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\right]=0\\&q_2^i=\partial\psi_i/\partial x_2-\delta_2q_1^i\\&q_3^i=\partial\psi_i/\partial x_3-\delta_3q_1^i\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)\\&q_4^i=\partial\psi_i/\partial x_4-\delta_4q_1^i\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

在问题(2)中已给定

$$q_1^i=\frac{\partial v_i}{\partial x_1}\bigg|_{S_0}=\omega_i\qquad(i=1,\ 2,\ 3)$$

由以上分析可知，无论问题(1)或问题(2)，在预先给定初始条件之后，并不一定能保证其C^2解的存在性。其次，如果解存在，也不一定唯一，但它永远不稳定。因而我们说，**Navier-Stokes方程是不稳定的。**

二、几 个 例 证

例1 考虑如下的初值问题

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}(x,\ t) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,\ \ \boldsymbol{v}|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$(x,\ t)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}$，$\boldsymbol{v}(x,\ t)=(v_1,\ v_2,\ v_3)$，$p(x,\ t)$是未知函数组，$\boldsymbol{F}=(t^2,\ 0,\ x_1,\ x_2)$。那末下列的函数组$U^{(1)}$和$U^{(2)}$都是(3)的非平凡解：

$$U^{(1)}:\ \begin{cases} v_1^{(1)}=t^3/3,\ v_2^{(1)}=0 \\ v_3^{(1)}=x_1x_2t-x_2t^5/15 \\ p^{(1)}=p_0+t+t^2/2+t^3/6 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$U^{(2)}:\ \begin{cases} v_1^{(2)}=t^3/3,\ v_2^{(2)}=-\nu^2t^3/6\rho \\ v_3^{(2)}=x_1x_2t-\dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3+\dfrac{t^5}{120}\left(\dfrac{4\nu^2}{\rho}\ x_1-8x_2\right)-\dfrac{\nu^2}{405\rho}t^9 \\ p^{(2)}=p_0+t+\dfrac{\nu^2}{2}t^2(x_2+x_3) \end{cases} \tag{2.1$'$}$$

$p_0\in\mathbf{R}$是常数。显然$U^{(1)}-U^{(2)}\neq 0$，因而问题(3)不具有唯一解。

注意，此时还有

$$\left.\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial t}\right|_{t=0}=0\qquad (i=1,\ 2)$$

$$\left.\frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial t}\right|_{t=0}=x_1x_2$$

可验证，此时上节中(1.2)被满足。

现在，问题(3)的初始条件中，$\boldsymbol{v}|_{t=0}=0$不变，并取

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial t}\right|_{t=0}=p_4^1=-2\varepsilon^2x_1,\quad \left.\frac{\partial v_2}{\partial t}\right|_{t=0}=p_4^2=-2\varepsilon^2x_2$$

$$\left.\frac{\partial v_3}{\partial t}\right|_{t=0}=p_4^3=x_1x_2,\quad \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=0}=p_4^4=1\qquad (\varepsilon\in\mathbf{R})$$

这时的问题(3)记为(3)$'$。

根据上节(1.2)式，如果$\varepsilon\neq 0$，(3)$'$不存在C^2解；如果$\varepsilon=0$，我们又回到问题(3)，它具有（至少）两组解析解（在$\mathbf{R}^4$中解析）。

因而，根据 J. Hadamard理论[1]，问题(3)的解是不稳定的。

例2 考虑如下的初值问题：

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\dfrac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}(x,\ t) \\ \mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,\ \ \boldsymbol{v}|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$(x,\ t)=(x_1,\ x_2,\ t)\subseteq\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$，$\boldsymbol{F}(x,\ t)=(t^2,\ x_1^2)$，其中$\boldsymbol{v}(x,\ t)=(v_1,\ v_2)$，和$p(x,\ t)$是未知函数组。我们可以求得以下两组（至少！）解：

$$U^1:\begin{cases} v_1^{(1)}=t^3/3 \\ v_2^{(1)}=\nu t^2+tx_1^2-\dfrac{2}{15}x_1t^5+\dfrac{2}{405}t^9 \\ p^{(1)}=p_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$U^2:\begin{cases} v_1^{(2)}=\dfrac{t^3}{6}\left(2-\dfrac{a}{\rho}\right)-\dfrac{1}{24\rho}t^4 \\ v_2^{(2)}=\nu t^2+tx_1^2-\dfrac{1}{24\rho}t^4+\dfrac{1}{15}\left(\dfrac{a}{\rho}-2\right)x_1t^5 \\ \qquad +\dfrac{1}{728}x_1t^8+\dfrac{1}{810}\left(\dfrac{a}{\rho}-2\right)^2t^9+\dfrac{11}{21600}\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{a}{\rho}-2\right)t^{10} \\ \qquad +\dfrac{1}{19008}\dfrac{1}{\rho^2}t^{11} \\ p^{(2)}=p_0+x_1t^2/2+(x_1+x_2)t^3/6 \end{cases} \tag{2.2$'$}$$

$(a,\ p_0)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$，常数．显然$U^1-U^{(2)}\neq 0$，因而在$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$中Navier-Stokes方程的初值问题(4)也是不适定的．

例3 考虑如下的初值问题：

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\boldsymbol{v}+\boldsymbol{F}(x,\ t) \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\ \ \boldsymbol{v}|_{t=0}=0 \end{cases}$$

即由Navier-Stokes方程的线性部分构成的简化方程组，未知函数组仍为$\boldsymbol{v}(x,\ t)=(v_1,\ v_2,\ v_3)$和$p(x,\ t)$，$(x,\ t)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}$．问题(5)中的$\boldsymbol{F}=(t^2,\ 0,\ x_1x_2)$，由简单的计算可知以下两组函数$U^1$，$U^2$都是(5)的非平凡解．

$$U^1:\begin{cases} v_1^{(1)}=t^3/3,\ v_2^{(1)}=0,\ v_3^{(1)}=x_1x_2t \\ p^{(1)}=p_0+p_1t+t^2/2+t^3/6 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$U^2:\begin{cases} v_1^{(2)}=t^3/3,\ v_2^{(2)}=-\nu^2t^3/6\rho \\ v_3^{(2)}=x_1x_2t-\nu^2t^3/6\rho,\ p^{(2)}=p_2+p_1t+\dfrac{\nu^2}{2}(x_2+x_3)t^3 \end{cases} \tag{2.3}$$

显然$U^{(1)}-U^{(2)}\neq 0$，因而这一类初值问题也是不适定的．

参 考 文 献

[1] Hadamard, J., *Le Problème de Cauchy et les Épeation aux Derivées Partielles Linéaires Hyperboliques*, Hermann, Paris (1939). *La Théorie des Équations aux Dérivées Partielles*, Editions Scientifiques, Pekin (1964).

[2] Landau, L. and E. Lifcuitz, *Physique Théorique*, Tome 6, Edition Mir Moscou (1971).

[3] Leray, J., Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux que limitent des parois, *Journal Mathématique* (1934).

[4] Shih, W. H. *Solutions Analytiques de Quelques Equations aux Dérivees Partielles en Mécanique des Fluides*, Hermann, Paris (1992).

[5] Shih, W. S., Une méthode élémentaire pour l'etude des équations aux dérivées partielles, Diagrammes 16, Paris (1986). *C. R. Acad. Sc. Paris*, **303**, Série I. (1986), 439—441, **304** Série I (1987), 103—106, 187—190, 535—538.

A Stability Study of Navier-Stokes Equations (Ⅲ)

Shi Wei-hui

(Shanghai University, Shanghai)

Abstract

In this paper, the necessary conditions of the existence of C^2 solutions in some initial problems of Navier-Stokes equations are given, and examples of instability of initial value (at $t=0$) problems are also given. The initial value problem of Navier-Stokes equation is one of the most fundamental problem for this equation and various authors studies this problem and contributed a number of results. J. Leray, a French professor, proved the existence of Navier-Stokes equation under certain defined initial and boundary value conditions. In this paper, with certain rigorously defined key concepts, based upon the basic theory of J. Hadamard partial deferential equations[1], gives a fundamental theory of instability of Navier-Stokes equations. Finally, many examples are given, proofs referring to reference[4].

Key words Ehresmann space, basic equation, Cauchy problem