应用数学和力学，第15卷 第12期（1994年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

锥形血管入口区域内管壁应力分析*

岑人经 谭哲东 陈正宗

（广州 华南理工大学，1993年10月29日收到）

摘　要

本文对锥形血管入口区域的流动进行了探讨，导出了压力分布、轴向和径向的速度分布以及流场的切应力分布、管壁应力分布等公式，进行了相应的数值算例的研究和分析，还着重讨论了血管锥度角对管壁应力、压力分布等的影响。

关键词　锥度角　切应力　入口流动

一、前　　言

众所周知，心血管循环系统的心肌梗塞、脑梗塞等疾患的形成和发展，都和血液动力学相关联，因此血管中血液流动的流场分析，包括速度分布、压力分布、剪切应力分布等等，向来都是心血管流体动力学的重要研究问题。有关速度分布等问题，我们已在一些文章中作了讨论，本文着重研究弹性血管管壁的应力分布问题，这包括压力分布和管壁切应力分布。和以往大多数学者进行过的研究不同的是，本文着重于研究血管入口区域内的流场应力和血管的锥度角对管壁应力的影响。迄今为止，有关这方面的研究结果，尚未见有公开的报导。动脉血管中的血液流动都是入口流动，已经由Schultz的实验[1]以及岑人经等人[2]的理论分析作了充分的论证。因此，从入口流动这一基点出发来研究管壁应力问题，对认识心血管流动的规律是更为现实的。但是这种处理方法显然是比较复杂的。其主要表现于：1.与形成流动不同，入口流动中的速度分布是随轴向而变化的，因而这种流动的迁移加速度不能忽略，从而使表征这种流动的运动方程呈非线性，这就导致求解的困难；2.由于弹性管的管壁是可变形的，因而血液流动和血管壁运动互相影响，产生耦合作用；3.血管锥度角的存在，使得上述耦合运动的边界条件更加复杂化。在求解时，我们首先应用文[3]的线化分析方法对这一耦合运动的非线性方程组进行线化，然后在小锥度角的假定下建立血管的管壁运动和血液流动之间的耦合关系。对弹性血管中的血液流动问题导得了一组压力分布、径向速度分布和切应力分布等公式，并进行了相应的数值算例计算，分析讨论了流场压力分布、切应力分布以及管壁切应力问题，还着重分析了锥度角对流场及管壁应力的影响，得到一些重要的结论。

* 叶开沅推荐。
国家自然科学基金资助项目

二、血液与管壁耦合运动方程组及边界条件

例定血液是均匀的、不可压缩的牛顿流体，它在一根足够长的、薄壁的、虎克弹性的圆锥形的直血管中作轴对称的层流流动．当采用圆柱坐标系 (x,r,θ)，坐标原点取在血管入口处的截面中心处，x轴沿管的轴向，r轴沿管的径向时，对上述血液流动可直接应用Navier-Stokes方程写出

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_x}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r}\right) \tag{2.1}$$

$$\partial p/\partial r=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) \tag{2.3}$$

而对弹性管壁运动，则可采用我们在文献[3]中的方法，由弹性薄膜理论导得

$$\rho_w h\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=p-2\mu\frac{\partial V_r}{\partial r}\bigg|_{r=R_0-\beta x}-\frac{E\eta}{(R_0-\beta x)^2(1-\sigma^2)}-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\left[\frac{\eta}{(R_0-\beta x)^4}+\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}\right] \tag{2.4}$$

$$S_o(x,t)=\frac{1}{1+h/(R_0-\beta x)}\left\{\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial x}\right)_{r=R_0-\beta x}-\frac{Eh\sigma}{(1-\sigma^2)(R_0-\beta x)}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)(R_0-\beta x)}\cdot\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right\} \tag{2.5}$$

上两式中，$V_x=V_x(r,x,t)$，$V_r=V_r(r,x,t)$ 分别是血液流动的轴向、径向速度，$p=p(r,x,t)$是流动血液的压力，ρ是血液的密度，ν是血液的运动粘性系数，ρ_w是管壁材料的密度，$\eta=\eta(x,t)$，$S_o=S_o(x,t)$分别是管壁运动的径向位移、轴向位移，μ是血液动力粘性系数，β是血管的锥度角，R_0是血管入口处截面半径，$r=R_0-\beta x$ 是圆锥形血管的壁面方程，σ 是泊桑比，E是杨氏弹性模量，h是血管壁的厚度．

可见，方程(2.1)、(2.2)、(2.3)和方程(2.4)、(2.5) 的组合便是表征血液和血管两者的耦合运动的支配方程组．此方程组中，式 (2.1) 是一个复杂的非线性二阶偏微分方程，通常是难以精确求解的．为了求出相应的近似解，我们采用文献[3]的线化方法，令

$$U_0\frac{\partial V_x}{\partial x}\approx V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_r\frac{\partial V_x}{\partial r} \tag{2.6}$$

式中，U_0 是血管入口处的特征血流速度．考虑到管壁运动时受到外周组织的纵向约束[4]，存在$\xi\ll\eta$，并根据量级分析方法，在忽略管壁运动方程式(2.4)、(2.5)中的二阶小量后，可把上述耦合运动的支配方程组改写成

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial V_x}{\partial t}+U_0\dfrac{\partial V_x}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\dfrac{\partial^2 V_x}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V_x}{\partial r}\right) & (2.7)\\ \partial p/\partial r=0 & (2.8)\\ \dfrac{\partial V_x}{\partial x}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rV_r) & (2.9)\\ \rho_w h\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=p-\dfrac{Eh\eta}{(R_0-\beta x)^2(1-\sigma^2)}-\dfrac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\dfrac{\partial^4\eta}{\partial x^4} & (2.10)\end{cases}$$

$$S_c(x,t)=\frac{1}{1+h/(R_0-\beta x)}\left\{\mu\frac{\partial V_x}{\partial r}\bigg|_{r=R_0-\beta x}-\frac{Eh\sigma}{(1-\sigma^2)(R_0-\beta x)}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)(R_0-\beta x)}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right\} \tag{2.11}$$

相应的边界条件如下确定．假设血管具有喇叭形入口，入口处血液流速是均匀的，则其入口端的血流速度、压力及管壁位移均可写成时间的周期函数的形式：

$$V_x|_{x=0}=U_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t)\right] \tag{2.12}$$

$$p|_{x=0}=p_0\left[1+\sum_{k=1}^{n}(g_k\cos k\omega t+h_k\sin k\omega t)\right] \tag{2.13}$$

$$\eta|_{x=0}=\eta_0\left[1+\sum_{k=1}^{n}(c_k\cos k\omega t+d_k\sin k\omega t)\right] \tag{2.14}$$

$$\partial\eta/\partial x|_{x=0}=0 \tag{2.15}$$

根据血液在血管内壁面无滑移、无渗透的要求可得

$$V_x|_{r=R_0-\beta x}=0 \tag{2.16}$$

$$V_r|_{r=R_0-\beta x}=\partial\eta/\partial t \tag{2.17}$$

式中，p_0是血管入口处流动血液的特征压力，η_0是是血管入口处的特征径向位移，ω 是振荡角频率，t是时间，a_k,b_k,c_k,d_k,g_k及h_k均是待定常数．

三、运动方程组的定常解

为使问题简便起见，下面限于定常血液流动情况来讨论．此时，耦合运动方程组变为

(Ⅱ)

$$U_0\frac{\partial V_x}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r}\right) \tag{3.1}$$

$$\partial p/\partial r=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) \tag{3.3}$$

$$\frac{d^4\eta}{dx^4}+\frac{12\eta}{h^2R_0^2(1-\beta x/R_0)^2}=\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}p \tag{3.4}$$

$$(R_0-\beta x+h)S_c(x)=(R_0-\beta x)\mu\frac{\partial V_x}{\partial r}\bigg|_{r=R_0-\beta x}-\frac{Eh\sigma}{(1-\sigma^2)}\frac{d\eta}{dx}-\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\frac{d^3\eta}{dx^3} \tag{3.5}$$

相应的边界条件变为

$$V_x|_{x=0}=U_0 \tag{3.6}$$

$$p|_{x=0}=p_0 \tag{3.7}$$

$$\eta|_{x=0}=\eta_0 \tag{3.8}$$

$$\partial\eta/\partial x|_{x=0}=0 \tag{3.9}$$

$$V_x|_{r=R_0-\beta x}=0 \tag{3.10}$$

$$V_r|_{r=R_0-\beta x}=\partial\eta/\partial t \tag{3.11}$$

求解时，首先引入无量纲量，令

$$\left.\begin{array}{l} m=x/R_0,\ \ n=r/R_0 \\ u=\dfrac{V_x-U_0}{U_0},\quad v=\dfrac{V_r}{U_0},\quad F=\dfrac{p-p_0}{\rho U_0^2} \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

则方程组(Ⅰ)中的式(3.1)、(3.3)变为无量纲形式

$$(\text{Ⅱ})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\partial u}{\partial n}=R_n\left(\dfrac{\partial u}{\partial m}+\dfrac{\partial F}{\partial m}\right) & (3.13) \\ \dfrac{\partial u}{\partial m}=-\dfrac{1}{n}\,\dfrac{\partial}{\partial n}(nv) & (3.14) \end{cases}$$

式中，$u=u(n,m)$，$v=v(n,m)$，$F=F(m)$，$R_n=U_0R_0/\nu$. 方程组(Ⅱ)相应的边界条件为

$$u|_{n=1-\beta m}=1 \tag{3.15}$$

$$v|_{n=1-\beta m}=0 \tag{3.16}$$

$$u|_{m=0}=0 \tag{3.17}$$

$$v|_{n=0}=0 \tag{3.18}$$

$$F|_{m=0}=0 \tag{3.19}$$

应用虚宗量Bessel函数方法，求得满足上述边界条件的方程组(Ⅱ)的解为

$$F(m)=-\left[\frac{1}{3}+\frac{8m}{R_n(1-\beta m)^2}+4\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q^2}\exp[-my_q^2/R_n(1-\beta m)^2]\right] \tag{3.20}$$

$$u(n,m)=1-\frac{2n^2}{(1-\beta m)^2}-4\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q^2}\left(1-\frac{J_0(y_qn/(1-\beta m))}{J_0(y_q)}\right)\cdot\exp[-my_q^2/R_n(1-\beta m)^2] \tag{3.21}$$

$$v(n,m)=\frac{4}{R_n(1-\beta m)}\left(1-\frac{2\beta m}{1-\beta m}\right)\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q}\cdot\frac{J_1(y_qn/(1-\beta m))-(n/(1-\beta m))J_1(y_q)}{J_0(y_q)}\cdot\exp[-my_q^2/R_n(1-\beta m)^2] \tag{3.22}$$

应用式(3.12)，可求得压力和速度分布公式为

$$p=-\frac{\rho U_0^2}{3}-\frac{8\rho U_0^2}{(1-\beta x/R_0)}\,\frac{x}{R_nR_0}+4\rho U_0^2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q}\exp[-y_q^2x/R_nR_0(1-\beta x/R_0)^2] \tag{3.23}$$

$$V_x=2U_0\left[1-\frac{r^2}{R_0^2(1-\beta x/R_0)^2}\right]-4U_0\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q^2}\left[1-\frac{J_0(y_qr/R_0(1-\beta x/R_0))}{J_0(y_q)}\right]\cdot\exp[-y_q^2x/R_nR_0(1-\beta x/R_0)^2] \tag{3.24}$$

$$V_r=\frac{4U_0}{R_n(1-\beta x/R_0)}\left[1-\frac{2\beta x}{R_0(1-\beta x/R_0)}\right]\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q}\cdot\frac{J_1(y_qr/R_0(1-\beta x/R_0))-(r/R_0(1-\beta x/R_0))J_1(y_q)}{J_0(y_q)}\exp[-y_q^2x/R_nR_0(1-\beta x)^2] \tag{3.25}$$

再对方程式(3.4)和(3.5)进行求解，得管壁位移公式为

$$\eta(x)=e^{-Tx}\left\{\left(\eta_0-\frac{T_1}{Eh}\left[p_0-\rho U_0^2\left(\frac{1}{3}-4T_2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q^2T_q}\right)\right]\right)\cos Tx\right.$$

$$+\left(\eta_0-\frac{T_1}{Eh}\left[p_0-\rho U_0^2\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{R_nR_0T(1-\beta x/R_0)^2}-4T_2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q^2T_q}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{4T_2}{R_nR_0T(1-\beta x/R_0)^2}\right)\right]\right)\sin Tx\right\}+\frac{T_1}{Eh}\left\{p_0-\rho U_0^2\left[\frac{1}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{8x}{R_nR_0(1-\beta x/R_0)}-4T_2\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{y_q^2T_q}\exp[-y_q^2x/R_nR_0(1-\beta x)^2]\right]\right\}$$

(3.26)

式中，

$T=[\sqrt{3}/hR_0(1-\beta x/R_0)]^{1/2}$，$T_1=(1-\sigma^2)(1-\beta x/R_0)^2R_0^2$

$T_2=12R_n^4R_0^6(1-\beta x/R_0)^6$，$T_q=y_q^4h^2R_0^4+12R_n^4R_0^6(1-\beta x/R_0)^6$

由粘性流体动力学可知，流动流体剪切应力为

$$\tau_{xr}=\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial x}\right)\tag{3.27}$$

把式(3.24)，(3.25)代入式(3.27)，整理后便得

$$\tau_{xr}=-\frac{4\mu U_0}{R_0}\left\{\frac{r}{R_0T_\beta^2}+\frac{1}{T_\beta}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{J_1(y_qr/R_0T_\beta)}{y_qJ_0(y_q)}\exp[-y_q^2x/R_nR_0T_\beta^2]\right.$$

$$-\frac{\beta}{R_nT_\beta^2}+\frac{2\beta(1+\beta x/R_0)}{R_nT_\beta^3}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{J_1(y_qr/R_0T_\beta)-(r/R_0T_\beta)J_1(y_q)}{y_qJ_0(y_q)}$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{y_q^2x}{R_nR_0T_\beta^2}\right]+\left[\frac{1}{R_nT_\beta}+\frac{2\beta x}{R_nR_0T_\beta}\right]\left[\frac{\beta r}{2R_0T_\beta^2}\right.$$

$$\cdot\sum_{q=1}^{\infty}\frac{y_q[J_0(y_qr/R_0T_\beta)-J_2(y_qr/R_0T_\beta)]+J_1(y_q)}{y_qJ_0(y_q)}\exp\left[\frac{-y_q^2x}{R_nR_0T_\beta^2}\right]+\frac{2(1+\beta x/R_0)}{R_nT_\beta^3}$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{q=1}^{\infty}\frac{y_qJ_1(y_qr/R_0T_\beta)-(r/R_0T_\beta)J_0(y_q)}{J_0(y_q)}\exp\left[\frac{-y_q^2x}{R_nR_0T_\beta^2}\right]\right]\right\}\tag{3.28}$$

式中，$T_\beta=1-\beta x/R_0$。式(3.28)便是锥形血管入口区域内流动血液的剪切应力分布公式。显然，由此式很容易求得管壁切应力分布公式为

$$\tau_w=-\frac{4\mu U_0}{R_0}\left\{\frac{1}{T_\beta}+\frac{1}{T_\beta}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{J_1(y_q)}{y_qJ_0(y_q)}\exp\left[\frac{-y_q^2x}{R_nR_0T_\beta^2}\right]-\frac{\beta}{R_nT_\beta}\right.$$

$$+\left[\frac{1}{R_nT_\beta}+\frac{2\beta x}{R_nR_0T_\beta}\right]\left[\frac{\beta}{2}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{y_qJ_0(y_q)+J_1(y_q)}{y_qJ_0(y_q)}\exp\left[\frac{-y_q^2x}{R_nR_0T_\beta^2}\right]\right.$$

$$+\frac{2(1+\beta x/R_0)}{R_n T_\beta}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{y_q J_1(y_q)-J_1(y_q)}{J_0(y_q)}\exp\left[\frac{-y_q^2 x}{R_n R_0 T_\beta^2}\right]\Bigg]\Bigg\} \tag{3.29}$$

四、分析和讨论

为了便于分析，我们取一根狗的冠状动脉进行相应的数值计算。狗的相应的心血管参数取为：血管入口处的半径$R_0=0.23$cm，$U_0=23.6$cm/s，$R_n=142.8$，$\mu=0.04$。

1． 图1是根据压力分布公式(3.23)进行数值计算得到的锥形血管入口区域内压力分布图。由图看出：(1) 入口区域内的压力是沿着管轴正向呈指数形式逐渐减小的；(2) 锥度角对压力分布是有影响的，β越大，压力变化的幅值也越大。

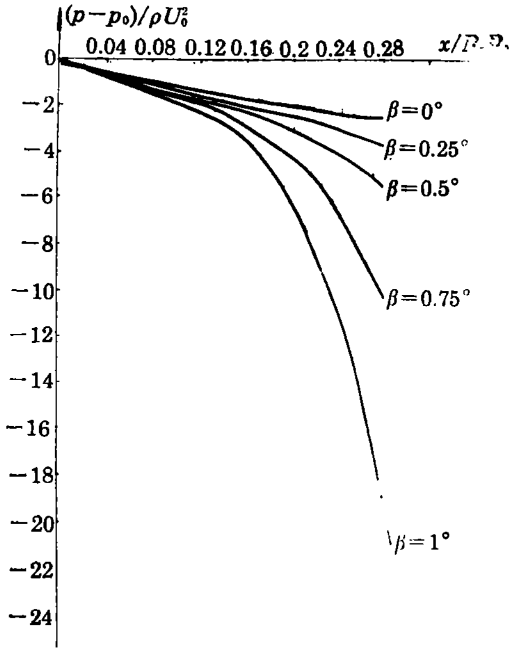

图1 入口区域内压力分布

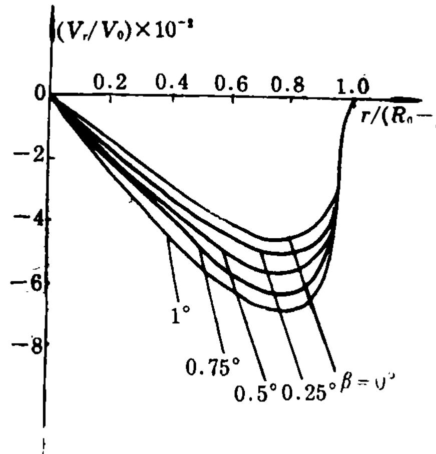

图2 $x/R_nR_0=0.004$时的径向速度分布

2． 根据径向速度分布公式(3.25)进行数值计算，得到不同横截面上圆锥形血管入口区域内径向速度分布如图2、图3、图4、图5所示。由这些图看出：(1) 各横截面的径向速度分

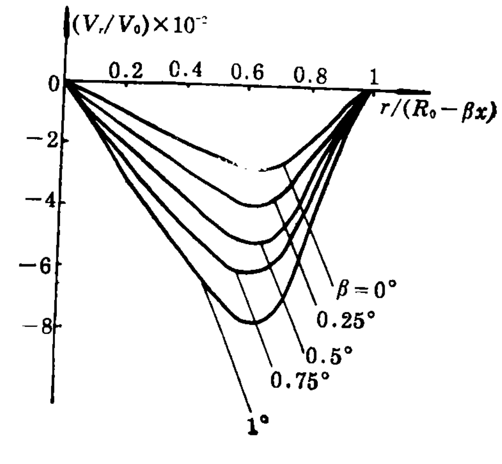

图3 $x/R_nR_0=0.012$时径向速度分布

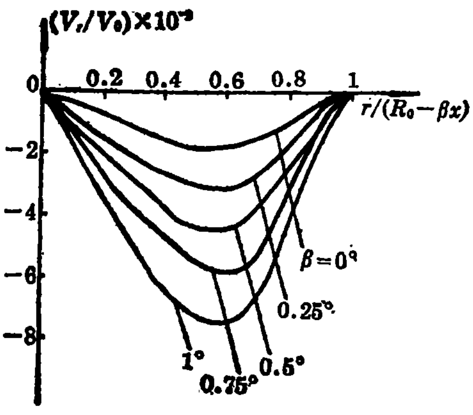

图4 $x/R_nR_0=0.02$时径向速度分布

布是不同的，其最大值的位置沿管轴正向而变化，从周边逐渐趋向管心。(2) β 越大，对径向速度的影响越显著，如图3中，$|V_{r\,\max}|_{\beta=1^\circ}\approx3|V_{r\,\max}|_{\beta=0^\circ}$。(3)$\beta$ 角只影响径向速度的幅值，而不影响径向速度分布的最大值位置。如图4中，当锥度角β由$0^\circ\rightarrow1^\circ$时，径向速度的最大值位置始终保持在$r/(R_0-\beta x)=0.6$的位置上。

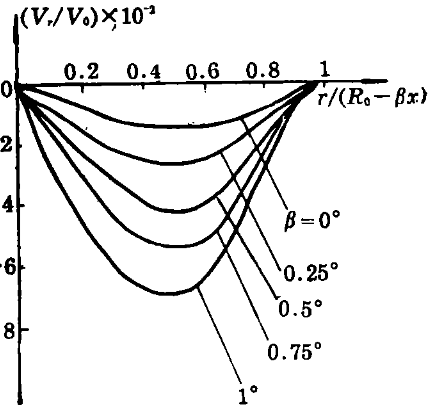

图5 $x/R_nR_0=0.028$时径向速度分布

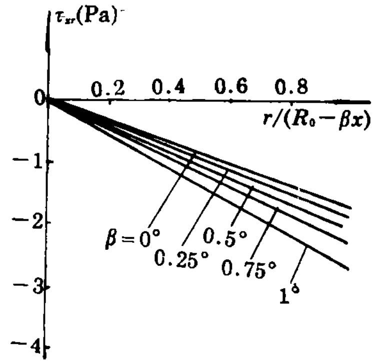

图6 $x/R_nR_0=0.16$时流场切应力分布

3. 图6、图7、图8和图9是在锥度角取值不同的情况下，锥形血管入口区域内流场切应力分布图。由这些图看到：(1) 流场中的切应力沿径向变化，血管中心处切应力为零，管壁处为最大值，分布是接近直线形的。(2) 锥度角β取任意值时，上述流场切应力特征均保持不变（见图 6），这表明锥度角只对切应力大小产生影响。(3) 锥度角越大，则切应力越大。

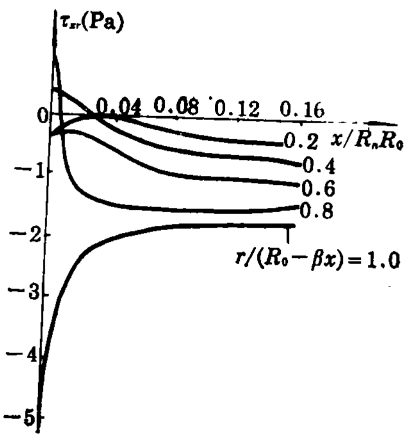

图7 $\beta=0^\circ$时流场切应力分布

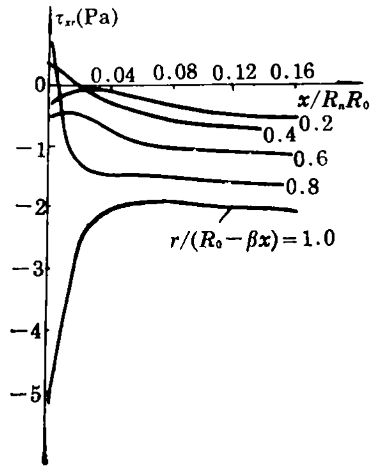

图8 $\beta=0.5^\circ$时流场切应力分布

4. 根据式（3.29），由数值计算可得到图10所示的锥形血管入口区域内管壁切应力分布。由图10看到：（1）管壁切应力也是随锥度角β的增大而增大的。（2）锥度角对管壁切应力的影响沿管轴的正向而逐渐增大。

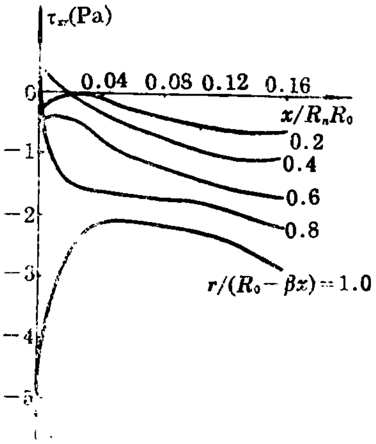

图9 $\beta=1°$时流场切应力分布

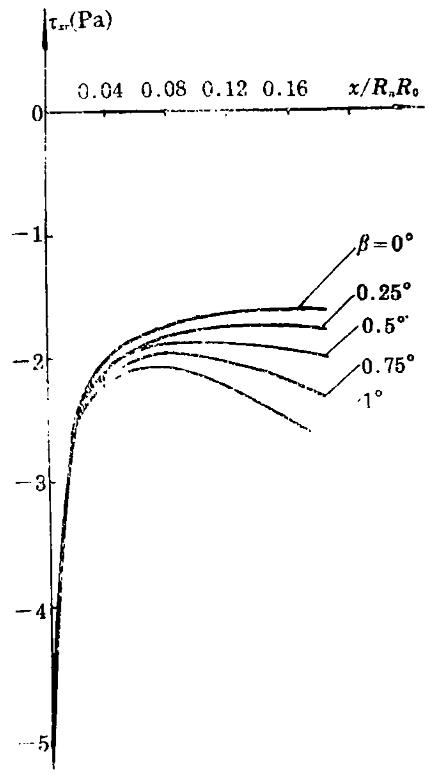

图10 管壁切应力分布（$r/(R_0-\beta x)=1$）

参考文献

[1] Schultz, D. L., Pressure and flow in large arteries, in *Cardio Vascular Fluid Dynamics*, ed. Bergel, Vol. I, Academic Press, New York (1972), 213—215.
[2] 岑人经、秦婵，圆锥形血管中的振荡发展流动，应用数学和力学，14(4) (1993), 301—308.
[3] Cen, Ren-jing, Liu Bao-sen and N. H. C. Hwang, Developing oscillatory flow in a circular pipe: A new solution, *J. Biomech. Eng., Trans. ASME*, 109 (1987), 340—345.
[4] McDonald, D. A., *Blood Flow in Arteries*, Edward Arnold Ltd., London (1974), 370—373.

The Stress Analysis of Vessel Wall in the Entrance Region of a Tapered Vessel

Cen Ren-jing Tan Zhe-dong Chen Zheng-zong
(South China University of Technology, Guangzhou)

Abstract

The present paper deals with the flow in an entrance region of a tapered vessel. Pressure distribution formula, axial and radial distribution formulas, shear stress distribution formula of flow field and shear stress distribution formula of vessel wall are derived. Relative numerical computations are made and analyzed. Discussion of the effects of tapered angle on the pressure distribution and vessel wall stress distribution are emphasized.

Key words tapered angle, shear stress, entrance flow