应用数学和力学，第15卷 第12期（1994年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

有限元和直接积分法瞬态动力计算的时空离散协调问题*

王 怀 忠

（上海市应用数学和力学研究所，上海大学，1994年2月7日收到）

摘　　要

本文对有限元和直接积分法瞬态动力计算的时空离散协调问题进行了研究．本文分别分析了空间离散和时间离散所引起的数值误差，提出了均衡空间离散引起的能量误差和时间离散引起的能量误差的原则，并给出时空离散协调的前处理方案和自适应方案．

关键词　有限元法　直接积分法　时空离散　协调

一、引　　言

对数值解误差的估计和控制一直是有限元法理论与应用中的重要问题．对静力学问题，误差主要是由空间离散引起的，在这方面的研究已经有了丰硕的成果[4]．而对结合使用直接积分法的动力学问题，不仅要考虑空间离散引起的误差，而且要考虑时间离散对误差的贡献，并通过协调时间和空间离散减小误差提高计算精度，这是有限元动力计算理论研究的一个重要方向，但至今尚未引起足够的重视[5]．许多有限元动力计算完全忽略了这一点；或者经过大量计算实践，根据经验考虑了时空离散协调问题[2]．本文通过数值误差的理论分析，导出时空离散协调的前处理方案和自适应方案．

二、空间离散和时间离散

对边界Γ包围的线弹性介质Ω，不计材料阻尼，考虑惯性力影响，可得平衡微分方程：

$$-(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t))-\mu\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)+\rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{f}(\mathbf{x},\ t)\quad 在\Omega\times(0,\ T)中 \tag{2.1a}$$

边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)=\bar{\mathbf{u}}, && 在\Gamma_1\times(0,\ T)中\\ &\mathbf{Hu}(\mathbf{x},\ t)\bar{\sigma}, && 在\Gamma_2\times(0,\ T)中\end{aligned}\right\} \tag{2.1b}$$

$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$．初值条件为：

* 潘立宙推荐．

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)=\mathbf{u}_0,\quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)=\dot{\mathbf{u}}_0 \tag{2.1c}$$

其中λ和μ为Lame常数；$\mathbf{H}$为边界应力微分算子.

首先，通过空间的有限元离散将$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$，$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$和$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$分别近似表达为$\mathbf{Nd}(t)$，$\mathbf{Nv}(t)$和$\mathbf{Na}(t)$。其中$\mathbf{N}$为总体形函数；$\mathbf{d}(t)$，$\mathbf{v}(t)$和$\mathbf{a}(t)$分别为总体节点位移矢量，总体节点速度矢量和总体节点加速度矢量．这样由偏微分方程(2.1)可得常微分方程(2.2).

$$\mathbf{Ma}(t)+\mathbf{Kd}(t)=\mathbf{F}(t) \tag{2.2a}$$

$$\mathbf{d}(0)=\mathbf{d}_0,\quad \mathbf{v}(0)=\mathbf{v}_0 \tag{2.2b}$$

其中
$$\mathbf{K}=\sum\mathbf{Q}_i^T\mathbf{K}_i\mathbf{Q}_i,\quad \mathbf{M}=\sum\mathbf{Q}_i^T\mathbf{M}_i\mathbf{Q}_i,\quad \mathbf{F}(t)=\sum\mathbf{Q}_i^T\mathbf{F}_i(t)$$

$$\mathbf{K}_i=\int_{e(i)}(\mathbf{SN}_i)^T\mathbf{DSN}_i dx,\quad \mathbf{M}_i=\int_{e(i)}\mathbf{N}_i^T\rho\mathbf{N}_i dx$$

$$\mathbf{F}(t)=\int_{e(i)}\mathbf{N}_i^T\mathbf{f}_i dx+\int_{b(i)}\mathbf{N}_i^T\bar{\sigma}_i d\Gamma\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ ne)$$

$\mathbf{S}$为应变算子，$\mathbf{D}$为弹性矩阵；$b(i)=\Gamma(i)\cap\Gamma_2$，$\Gamma(i)$为单元$i$的边界，$e(i)$为单元$i$所覆盖的区域；$\mathbf{d}^i(t)$，$\mathbf{v}^i(t)$和$\mathbf{a}^i(t)$分别为单元节点位移矢量，单元节点速度矢量和单元节点加速度矢量．$d^i(t)=\mathbf{Q}_i\mathbf{d}(t)$，$\mathbf{v}^i(t)=\mathbf{Q}_i\mathbf{v}(t)$，$\mathbf{a}^i(t)=\mathbf{Q}_i\mathbf{a}(t)$．在本文中$\sum$代表$\sum\limits_{i=1}^{ne}$．当$\mathbf{x}\in e(i)$时，$\mathbf{u}_i(\mathbf{x},t)=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$，$\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},t)=\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$，$\ddot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},t)=\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$(参见[7]).

由空间离散所导致$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$，$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$和$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$的数值误差为：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)&=\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t)-\mathbf{Nd}(t)\\ \Delta\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)&=\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)-\mathbf{Nv}(t)\\ \Delta\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)&=\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t)-\mathbf{Na}(t)\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

其次，在直接积分法的时间离散中，令(2.2a)在一系列时步$t=t_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$得到满足并将$\mathbf{d}(t_n)$，$\mathbf{v}(t_n)$和$\mathbf{a}(t_n)$近似表达为$\mathbf{d}_n$，$\mathbf{v}_n$和$\mathbf{a}_n$。这样，(2.2a)可化为代数方程组：

$$\mathbf{Ma}_n+\mathbf{Kd}_n=\mathbf{F}_n \tag{2.4}$$

在不同的积分格式中，可假定位移、速度和加速度在时间段内有不同的变化规律．本文采用较常用的Newmark积分格式(2.5)为例进行研究

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{d}_{n+1}&=\mathbf{d}_n+\mathbf{v}_n\Delta t+[(0.5-\alpha)\mathbf{a}_n+\alpha\mathbf{a}_{n+1}]\Delta t^2\\ \mathbf{v}_{n+1}&=\mathbf{v}_n+[(1-\gamma)\mathbf{a}_n+\gamma\mathbf{a}_{n+1}]\Delta t\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

由时间离散所导致$\mathbf{d}(t_n)$，$\mathbf{v}(t_n)$和$\mathbf{a}(t_n)$的数值误差为：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mathbf{d}_n&=\mathbf{d}(t_n)-\mathbf{d}_n\\ \Delta\mathbf{v}_n&=\mathbf{v}(t_n)-\mathbf{v}_n\\ \Delta\mathbf{a}_n&=\mathbf{a}(t_n)-\mathbf{a}_n\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

由(2.3)和(2.6)可以得到由空间离散和时间离散所共同引起的$\mathbf{u}(\mathbf{x},t_n)$，$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t_n)$和$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t_n)$的误差.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}_n&=\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t_n)-\mathbf{Nd}_n=\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x},\ t_n)+\mathbf{N}\Delta\mathbf{d}_n\\ \dot{\mathbf{e}}_n&=\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t_n)-\mathbf{Nv}_n=\Delta\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t_n)+\mathbf{N}\Delta\mathbf{v}_n\\ \ddot{\mathbf{e}}_n&=\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t_n)-\mathbf{Na}_n=\Delta\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ t_n)+\mathbf{N}\Delta\mathbf{a}_n\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

在$t=t_n$时刻，系统的能量误差为：

$$\Delta E_n=\frac{1}{2}\Big\{\sum\int_{e(i)}(\mathbf{S}\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n))^T\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$+\sum\int_{e(i)}\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)^T\rho\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$-\sum(\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_i\mathbf{d}_n^i-\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\mathbf{v}_n^i\Big\}$$

$$=\sum\int_{e(i)}(\mathbf{S}\mathbf{N}_i\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{D}\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$+\sum\int_{e(i)}(\mathbf{N}_i\mathbf{v}_n^i)^T\rho\Delta\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}+\sum(\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_i\Delta\mathbf{d}_n^i+\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\Delta\mathbf{v}_n^i$$

$$+\frac{1}{2}\sum\int_{e(i)}(\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n))^T\mathbf{D}\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$+\frac{1}{2}\sum\int_{e(i)}\Delta\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)^T\rho\Delta\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$+\frac{1}{2}\sum(\Delta\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_i\Delta\mathbf{d}_n^i+\frac{1}{2}\sum(\Delta\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\Delta\mathbf{v}_n^i \tag{2.8}$$

其中最后四项为数值误差的能量，是可以忽略的小量，记ΔE_n^{sp}为空间离散所引起的能量误差，ΔE_n^{te}为时间离散所引起的能量误差，可以得出：

$$\Delta E_n^{sp}=\sum\int_{e(i)}(\mathbf{S}\mathbf{N}_i\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{D}\mathbf{S}\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$+\sum\int_{e(i)}(\mathbf{N}_i\mathbf{v}_n^i)^T\rho\Delta\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)\mathbf{dx} \tag{2.9}$$

$$\Delta E_n^{te}=\sum(\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_i\Delta\mathbf{d}_n^i+\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\Delta\mathbf{v}_n^i \tag{2.10}$$

$$\Delta E_n=\Delta E_n^{sp}+\Delta E_n^{te} \tag{2.11}$$

三、空间离散所引起的运动量和能量误差的先验估计

记$\mathbf{w}_i(\mathbf{x},\ t_n)$为$\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)$的内插，$h_i$为单元$i$的直径．由参考文献[1]可得空间离散所引起的位移和应变的误差估计如下：

$$\varepsilon_i(\mathbf{x},\ t_n)=\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)-\mathbf{w}_i(\mathbf{x},\ t_n)=C_i^dO(h_i^p) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{S}\varepsilon_i(\mathbf{x},\ t_n)=\mathbf{S}\{\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)-\mathbf{w}_i(\mathbf{x},\ t_n)\}=C_i^sO_1(h_i^{p-1}) \tag{3.2}$$

同样可得速度和加速度的误差估计：

$$\dot{\varepsilon}_i(\mathbf{x},\ t_n)=\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)-\dot{\mathbf{w}}_i(\mathbf{x},\ t_n)=C_i^vO(h_i^p) \tag{3.3}$$

$$\ddot{\varepsilon}_i(\mathbf{x},\ t_n)=\ddot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)-\ddot{\mathbf{w}}_i(\mathbf{x},\ t_n)=C_i^aO(h_i^p) \tag{3.4}$$

对于线性元，取$p=2$；对于二次元，取$p=3$．其中C_i^d，C_i^v，C_i^a分别为取决于位移，速度和加速度的空间二阶偏导数的系数；C_i^s为取决于位移的空间二阶偏导数的系数．

为了估计空间离散所引起的能量误差，不妨令$\varepsilon_i(\mathbf{x},\ t_n)\approx\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)$，$\dot{\varepsilon}_i(\mathbf{x},\ t_n)\approx\Delta\dot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},\ t_n)$，由此可得：

$$\Delta E_n^{sp}\approx\sum\int_{e(i)}(\mathbf{S}\mathbf{N}_i\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{D}\mathbf{S}\varepsilon_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$+\sum\int_{e(i)}(\mathbf{N}_i\mathbf{v}_n^i)^T\rho\dot{\varepsilon}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x}$$

$$=\sum\left\{C_i^d h_i^{p-1}(\mathbf{d}_n^i)^T\int_{e(i)}(\mathbf{S}\mathbf{N}_i)^T\mathbf{D}\mathbf{I}_1 d\mathbf{x}\right\}$$

$$+\sum\left\{C_i^v h_i^p(\mathbf{v}_n^i)^T\int_{e(i)}(\mathbf{N}_i)^T\rho\mathbf{I}d\mathbf{x}\right\} \tag{3.5}$$

其中$\mathbf{I}_1$和$\mathbf{I}$为所有元素都取1的矢量。

四、时间离散所引起的运动量和能量误差的先验估计

在$t=t_{n+1}$时刻，位移、速度和加速度的局部误差分别为：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\bar{\mathbf{d}}_{n+1}&=\bar{\mathbf{d}}(t_{n+1})-\mathbf{d}_{n+1}\\ \Delta\bar{\mathbf{v}}_{n+1}&=\bar{\mathbf{v}}(t_{n+1})-\mathbf{v}_{n+1}\\ \Delta\bar{\mathbf{a}}_{n+1}&=\bar{\mathbf{a}}(t_{n+1})-\mathbf{a}_{n+1}\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

其中，$\bar{\mathbf{d}}(t_{n+1})$，$(\bar{\mathbf{v}}t_{n+1})$，$\bar{\mathbf{a}}(t_{n+1})$为求(2.2a)和(4.2)所得到的精确解。

$$\mathbf{d}(t_n)=\mathbf{d}_n,\qquad \mathbf{v}(t_n)=\mathbf{v}_n \tag{4.2}$$

若$\bar{\mathbf{d}}(t_{n+1})$和$\bar{\mathbf{v}}(t_{n+1})$足够光滑，其Taylor级数可表示为：

$$\bar{\mathbf{d}}(t_{n+1})=\mathbf{d}_n+\mathbf{v}_n\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{a}_n\Delta t^2+\frac{1}{6}\dot{\mathbf{a}}_n\Delta t^3+\frac{1}{24}\ddot{\mathbf{a}}_n\Delta t^4+o(\Delta t^5) \tag{4.3}$$

$$\bar{\mathbf{v}}(t_{n+1})=\mathbf{v}_n+\mathbf{a}_n\Delta t+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}_n\Delta t^2+\frac{1}{6}\ddot{\mathbf{a}}_n\Delta t^3+o(\Delta t^4) \tag{4.4}$$

将(2.5)、(4.3)、(4.4)代入(4.1)可得：

$$\Delta\bar{\mathbf{d}}_{n+1}=-\alpha\bar{\mathbf{a}}_{n+1}\Delta t^2-\alpha\dot{\mathbf{a}}_{n+1/2}\Delta t^3+\frac{1}{6}\dot{\mathbf{a}}_n\Delta t^3+\frac{1}{24}\ddot{\mathbf{a}}_n\Delta t^4+o(\Delta t^5) \tag{4.5}$$

$$\Delta\bar{\mathbf{v}}_{n+1}=-\gamma\bar{\mathbf{a}}_{n+1}\Delta t-\gamma\dot{\mathbf{a}}_{n+1/2}\Delta t^2+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}_n\Delta t^2+\frac{1}{6}\ddot{\mathbf{a}}_n\Delta t^3+o(\Delta t^4) \tag{4.6}$$

这里运用了估计式$\dot{\mathbf{a}}_{n+1/2}=(\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{a}_n)/\Delta t+o(\Delta t^2)$。

当取$\alpha=1/6$，$\gamma=1/2$时，有：

$$\Delta\bar{\mathbf{d}}_{n+1}=-\frac{1}{6}\bar{\mathbf{a}}_{n+1}\Delta t^2-\frac{1}{6}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1/2}\Delta t^4+\frac{1}{24}\ddot{\mathbf{a}}_n\Delta t^4+o(\Delta t^5) \tag{4.7}$$

$$\Delta\bar{\mathbf{v}}_{n+1}=-\frac{1}{2}\bar{\mathbf{a}}_{n+1}\Delta t-\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{a}}_{n+1/2}\Delta t^3+\frac{1}{6}\ddot{\mathbf{a}}_n\Delta t^3+o(\Delta t^4) \tag{4.8}$$

这里运用了估计式$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1/2}=(\dot{\mathbf{a}}_{n+1/2}-\dot{\mathbf{a}}_n)/\Delta t+o(\Delta t)$。

由(2.4)可得：

$$(\mathbf{M}+\alpha\Delta t^2\mathbf{K})\Delta\bar{\mathbf{a}}_{n+1}=\mathbf{K}O(\Delta t^q) \tag{4.9}$$

当$\alpha=1/6$，$\gamma=1/2$时，取$q=4$；其他情况下，取$q=3$，由(4.5)～(4.9)可得：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\bar{\mathbf{d}}_{n+1}=O(\Delta t^q)\\ &\Delta\bar{\mathbf{v}}_{n+1}=O(\Delta t^{q-1})\\ &\Delta\bar{\mathbf{a}}_{n+1}=O(\Delta t^r)\qquad r\leqslant q-2\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

对(2.4)进行正交解耦，可估计每个自由度的总体误差：

$$\mathbf{R}_{n+1}=\mathbf{A}\mathbf{R}_n+\overline{\mathbf{R}}_n \tag{4.11}$$

其中总体误差$\mathbf{R}_n=\{\Delta d_n,\ \Delta v_n,\ \Delta a_n\}$，局部误差$\overline{\mathbf{R}}_n=\{\Delta\bar{d}_n,\ \Delta\bar{v}_n,\ \Delta\bar{a}_n\}$。对稳定的积分格式总有$\rho(\mathbf{A})\leqslant 1.0$[2]，由此可推出位移，速度和加速度的总体误差分别为：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\mathbf{d}_{n+1}=O(\Delta t^{q-1})\\&\Delta\mathbf{v}_{n+1}=O(\Delta t^{q-2})\\&\Delta\mathbf{a}_{n+1}=O(\Delta t^{r-1}),\qquad r\leqslant q-2\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

时间离散所引起的能量误差为：

$$\begin{aligned}\Delta E_n^{te}&=\sum(\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_i\Delta\mathbf{d}_n^i+\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\Delta\mathbf{v}_n^i\\&=\sum(\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_iO(\Delta t^{q-1})+\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_iO(\Delta t^{q-2})\end{aligned} \tag{4.13}$$

五、时空离散的协调

为使空间离散引起的能量误差在每一单元都比较平均地分布和使时间离散引起的能量误差在每一时步长都比较平均地分布，本文提出均衡ΔE_n^{se}和ΔE_n^{te}的原则，给出时空离散协调的前处理方案和自适应方案。

1. 前处理方案

对于非病态方程(2.4)所描述的系统，忽略(3.5)、(4.13)中含h_i^p和Δt^{q-1}的相对较小的项，可得近似估计式：

$$\Delta E_n^{sp}\approx\sum\left\{C_i^s h_i^{p-1}(\mathbf{d}_n^i)^T\int_{e(i)}(\mathbf{SN}_i)^T\mathbf{D}\mathbf{I}_1 d\mathbf{x}\right\} \tag{5.1}$$

$$\Delta E_n^{te}\approx\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_iO(\Delta t^{q-2}) \tag{5.2}$$

令$\Delta E_n^{sp}\propto\Delta E_n^{te}$即：

$$\sum\left\{C_i^s h_i^{p-1}(\mathbf{d}_n^i)^T\int_{e(i)}(\mathbf{SN}_i)^T\mathbf{D}\mathbf{I}_1 d\mathbf{x}\right\}\propto\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_iO(\Delta t^{q-2}) \tag{5.3}$$

化简(5.3)，可得前处理中协调时空离散的准则：

$$C_1h_i^{p-1}\propto\Delta t^{q-2} \tag{5.4}$$

其中C_1为取决于位移和速度的空间二阶偏导数及介质弹性波速的系数。

2 自适应方案

由(3.5)、(4.13)可知，通过忽略较高阶的小量，(2.9)和(2.10)可重写为：

$$\Delta E_n^{sp}=\sum\int_{e(i)}(\mathbf{SN}_i\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{DS}\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)d\mathbf{x} \tag{5.5}$$

$$\Delta E_n^{te}=\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\Delta\mathbf{v}_n^i \tag{5.6}$$

根据均衡ΔE_n^{sp}和ΔE_n^{te}的原则，本文给出时空离散协调自适应方案的计算格式如下：

1) 时步循环

a) 给定初始Δt，令$t_n=t_{n-1}+\Delta t$，如$t_n>t_{\text{end}}$则结束计算；

b) 给定初始有限元网络；

c) 解方程(2.4)。

2) 有限元网格自动调整

d) 有限元计算结果后处理，计算系统的应变能$E_n^{s,t}$

$$E_n^{s,t}=\sum(\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_i\mathbf{d}_n^i \tag{5.7}$$

e) 运用超收敛重现技术估计$\Delta E_{n(i)}^{s,p}$

$$\Delta E_{n(i)}^{s,p}=\int_{e(i)}(\mathbf{SN}_i\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{DS}\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)\mathbf{dx} \tag{5.8}$$

f) 计算

$$\zeta_i=\Delta E_{n(i)}^{s,p}/(E_n^{s,t}+\Delta E_n^{s,p}) \tag{5.9}$$

g) 如果对所有单元i有

$$|\zeta_i|\leqslant[\zeta] \tag{5.10}$$

([ζ]为容许相对误差)则接第h)步，否则细分所有不满足（5.10）的单元，接第c)步重新计算.

3) 时间步长自动调整

h) 计算系统的动能$E_n^{k,t}$

$$E_n^{k,t}=\sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\mathbf{v}_n^i \tag{5.11}$$

i) 运用式（5.6）估计局部误差$\Delta E_n^{t,e}$

j) 计算

$$\eta_n=\Delta E_n^{t,e}/(E_n^{k,t}+\Delta E_n^{t,e}) \tag{5.12}$$

k) 如果

$$|\eta_n|\leqslant[\eta] \tag{5.13}$$

([η]为容许相对误差)则开始下一时步循环，否则调整时间步长Δt，接第b)步重新计算.

六、结 论

本文根据对有限元和直接积分法瞬态动力计算中时空离散所引起的数值误差分析，为使空间离散引起的能量误差在每个单元都较平均地分布，和使时间离散引起的能量误差在每一时步长都较平均地分布，提出均衡$\Delta E_n^{s,p}$和$\Delta E_n^{t,e}$的原则，并给出时空离散协调的前处理方案和自适应方案. 本文的数值误差分析还表明，对于非病态方程(2.4)所描述的系统有：

1) 与系统能量的误差相比，数值误差的能量是可以忽略的小量，因而不宜用作误差估计的指标；

2) 在由

$$\sum\int_{e(i)}(\mathbf{SN}_i\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{DS}\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)\mathbf{dx}\ 与\ \sum\int_{e(i)}(\mathbf{N}_i\mathbf{v}_n^i)^T\rho\Delta\mathbf{u}_i(\mathbf{x},\ t_n)\mathbf{dx}$$

之和所构成的空间离散引起的能量误差中，后者为较高阶的小量通常可以忽略不计；

3) 在由

$$\sum(\mathbf{d}_n^i)^T\mathbf{K}_i\Delta\mathbf{d}_n^i\ 与\ \sum(\mathbf{v}_n^i)^T\mathbf{M}_i\Delta\mathbf{v}_n^i$$

之和所构成的时间离散引起的能量误差中，前者为较高阶的小量通常可以忽略不计.

参 考 文 献

[1] Strong, G. and G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall (1973).

[2] Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall (1982).

[3] Zienkiewicz, O. C. and Y. M. Xie, A simple local error estimator and adaptive time-stepping for dynamic analysis, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 21 (1991), 871—887.

[4] Zienkiewicz, O. C., Computational mechanics today, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **34** (1992), 9—33.

[5] Zeng, L. F., N. E. Wiberg and L. Bernspang, An adaptive finite element procedure for 2-D dynamic transient analysis using direction integration, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **34** (1992), 997—1014.

[6] Zienkiewicz, O. C. and J. Z. Zhu, The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates Part Ⅰ: The recovery technique, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33 (1992), 1331—1364.

Spatial-Temporal Discrete Coordination of FEM and Direct Integral Method for Transient Dynamic Problems

Wang Huai-zhong

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Shanghai University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the coordination of spatial-temporal discrete of FEM and direct integral method is investigated. By analyzing the numerical error induced by spatial-temporal discrete, the principle of balancing the energy error induced by spatial discrete and the energy error induced by temporal discrete is presented, and the priori process and adaptive method for the coordination of spatial discrete and temporal discrete is obtained.

Key words FEM, direct integration, spatial-temporal discrete, coordination