应用数学和力学，第15卷 第11期（1994年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

复向量空间的分解与复线性变换的 Jordan 标准形*

肖 衡 $\boxed{\text{郭仲衡}}$

（北京大学数学系，1993年9月27日收到）

摘 要

本文引入表征复线性变换结构的新对象．这些新对象给出复向量空间关于复线性变换分解的新结果且给出构造Jordan标准形的所有Jordan基．因而，它们能够直接导致著名的Jordan定理及空间的第三分解定理，且能给出对Jordan形精致微妙结构的新的深刻洞察．后者表明，复线性变换的Jordan标准形是一种在双重任意选择下具有不变性的结构．

关键词 复向量空间 复线性变换 分解定理 Jordan 标准形

一、引 言

复线性变换与复方阵的 Jorcan标准形，复向量空间关于复线性变换的结构是线性变换论与矩阵论的中心内容之一，其中主要的结果是著名的 Jordan定理以及复向量空间关于复线性变换的分解定理[1～3]．

在几乎每一本线性代数或矩阵论的教科书中均可找到这些经典结果，特别是 Jordan定理的论述与证明（例如［1～5］在中）．几何方法[1～3]与分析法[1]是标准的．［4～5］给出了Jordan定理的简化证明．

然而，由于它们的复杂微妙，明确完整地阐述这些结果是不易的．事实上，现有的阐述与证明或涉及复杂概念与冗繁过程或未能清楚完全地揭示Jardan形与空间的精致结构．我们将看到，存在这样的状况是由于尚未找到能够表征复线性变换结构特征的更为本质的适当对象．本文将引入这样的新对象．它们是关于每一特征值的子空间方程组以及由该方程组决定的 Jordan生成空间列（参见第三节）．这些新对象给出复向量空间关于线性变换分解的新结果且给出构造Jordan标准形的所有Jordan基．因而，它们能够导致Jordan定理与空间的第三分解定理[1～3]且能给出对 Jordan形精致微妙结构的新的深刻洞察．后者表明，复线性变换的 Jordan标准形是一种在双重任意选择下，即在子空间列的任意选择及每一子空间的基的任意选择下的不变性结构．

在本文中，V_n是一n-维复向量空间，0 是其零元．V_n上所有线性变换的集记为$\mathscr{L}(V_n)$，

* 国家教委博士点基金和自然科学基金资助项目．

I是恒同变换．此外，⊕表示空间的直和．特别，子空间D_1，$D_2,\cdots,D_r\subset V_n$称为无关的如果它们的和是直和，即有

$$D_1+\cdots+D_2=D_1\oplus\cdots\oplus D_r=\bigoplus_{\alpha=1}^{r}D_\alpha \tag{1.1}$$

最后，对任何$u_1,\cdots,u_r\in V_n$及$A\in\mathscr{L}(V_n)$记

$$A(u_1\cdots u_r)=(Au_1\cdots Au_r) \tag{1.2}$$

第二节引入一些必要的概念并给出空间第一分解定理的简明证明．第三节和第四节是本文的主要内容．

二、空间的第一分解定理

$A\in\mathscr{L}(V_n)$ 的行列式，记为$\det A$，是适合下式的唯一数（可能是复的）：对任给$u_1,\cdots,u_n\in V_n$，

$$(Au_1)\wedge\cdots\wedge(Au_n)=(\det A)u_1\wedge\cdots\wedge u_n \tag{2.1}$$

其中$\wedge$是外积．设λ是$A\in\mathscr{L}(V_n)$的特征值，即是特征方程$\det(A-\lambda I)=0$的根．又设α是一非负整数．$(A-\lambda I)^\alpha$ 的核记为 $N_\alpha(\lambda)$，后者的维数记为 $n_\alpha(\lambda)$．约定$B^0=I$，$B\in\mathscr{L}(V_n)$．我们有$N_0(\lambda)=\{0\}$及$n_0(\lambda)=0$．下述结果显然：

$$N_0(\lambda)\subset N_1(\lambda)\subseteq N_2(\lambda)\subseteq\cdots\subseteq V_n \tag{2.2}$$

$$n_0(\lambda)<n_1(\lambda)\leqslant n_2(\lambda)\leqslant\cdots\leqslant n \tag{2.3}$$

因为无穷整数列$\{n_1(\lambda),\ n_2(\lambda),\cdots\}$是一单调有界列，因而存在唯一正整数$c=c(\lambda)$使得

$$N_0(\lambda)\subset N_1(\lambda)\subset\cdots\subset N_c(\lambda)=N_{c+1}(\lambda)=\cdots \tag{2.4}$$

$$n_0(\lambda)<n_1(\lambda)<\cdots<n_c(\lambda)=n_{c+1}(\lambda)=\cdots \tag{2.5}$$

定义1 具有上述性质的数$c=c(\lambda)$ 称为A的λ-临界指标．子空间列 $\{N_1(\lambda),N_2(\lambda),\cdots,N_c(\lambda)\}$称为A的$\lambda$-根空间列，其中$N_\alpha(\lambda)$称为A的$\alpha$阶$\lambda$-根空间．

我们将看到，$A\in\mathscr{L}(V_n)$的λ-临界指标正是A的Jordan形中Jordan块的最大阶数，A 的根空间列决定A的Jordan形的结构．

下述定理是基本的．

定理1 设$a(\lambda)$是$A\in\mathscr{L}(V_n)$的特征值λ的代数重数且$c=c(\lambda)$是其λ-临界指标，那么

$$n_c(\lambda)=a(\lambda)\ \text{且}\ 1\leqslant c(\lambda)\leqslant a(\lambda) \tag{2.6}$$

定理2 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$是$A\in\mathscr{L}(V_n)$的所有不同特征根且$c_\alpha$是$\lambda_\alpha$-临界指标，那么

$$V_n=\bigoplus_{\alpha=1}^{s}N_{c_\alpha}(\lambda_\alpha) \tag{2.7}$$

定理2即通常所称的空间第一（或基本）分解定理[1,2]．它可由最小多项式予以证明．在下面，我们用(2.1)给出新的简明证明．为此，需要下述两个引理：

引理1 设λ是$A\in\mathscr{L}(V_n)$的特征值且$a=a(\lambda)$是其代数重数．那么有无关向量 $u_1,\cdots,u_a\in V_n$使得

$$\left.\begin{aligned}&(A-\lambda I)u_1=0,\\&(A-\lambda I)u_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\alpha-1}c_\beta^\alpha u_\beta\quad(\alpha=2,3,\cdots,a)\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

证明 对$\mathscr{L}(V_1)$，结论显然．设对$\mathscr{L}(V_{n-1})$ 结论成立．考虑$A\in\mathscr{L}(V_n)$并让 u_1 是代数重

数为a的特征值λ的特征向量．u_1张成的一维子空间记为V^1．取 $V^2\subset V_n(n-1维)$使 $V^1\oplus V^2=V_n$．u在子空间V^1与V^2中的直和分量分别记为u_1与u_2.线性变换$u\mapsto(Au)_2$记为 $A_2\in\mathscr{L}(V_n)$．我们有$A_2u=(Au)_2$，$u\in V_n$．记$A_2'=A_2|_{V^2}$，我们有

$$Au=(Au)_2+(Au)_1=A_2'u+\xi u_1\quad(\forall u\in V^2)\tag{2.9}$$

让$u_1\in V^1,u_2,\cdots,u_n\in V^2$是$V_n$的一组基．从(2.1,9)及外积的性质，易推出 $\det(A-\rho I)=(\lambda-\rho)\det(A_2'-\rho I')$，其中$I'$是$V^2$上恒同变换．这表明$\lambda$是$A_2'$的重数为$a-1$的特征值．于是，由归纳假设与(2.9)可知引理对$\mathscr{L}(V_n)$亦成立．

引理2 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$是$A\in\mathscr{L}(V_n)$的所有不同特征值．那么对任给正整数$m_1,\cdots,m_s$，子空间$N_{m_1}(\lambda),\cdots,N_{m_s}(\lambda_s)\subseteq V_n$是无关的，即

$$N_{m_1}(\lambda_1)+\cdots+N_{m_s}(\lambda_s)=\bigoplus_{a=1}^{s}N_{m_a}(\lambda_a)\subseteq V_n\tag{2.10}$$

证明 (2.10)等价于对适合$1\leqslant\alpha<s$与$\alpha<\beta<s$的任意α与β下式成立：

$$(N_{m_1}(\lambda)+\cdots+N_{m_\alpha}(\lambda_\alpha))\cap N_{m_\beta}(\lambda_\beta)=\{0\}.$$

若非零$x\in V_n$属于上式左边，那么 $x=x_1+\cdots+x_\alpha$，$x_1\in N_{m_1}(\lambda_1),\cdots,x_\alpha\in N_{m_\alpha}(\lambda_\alpha)$，且$(A-\lambda_\beta I)^{m_\beta}x=0$．后一条件表明存在 $0\leqslant\rho<m_\beta$ 使得 $0\neq y=(A-\lambda_\beta I)^\rho x$且$(A-\lambda_\beta I)y=0$．由此及$(A-\xi I)^\sigma$与$(A-\eta I)^\tau$可换，可推出 $(A-\lambda_1 I)^{m_1}\cdots(A-\lambda_\alpha I)^{m_\alpha}y=(A-\lambda_\beta I)^\rho(A-\lambda_1 I)^{m_1}\cdots(A-\lambda_\alpha I)^{m_\alpha}x=0$.另方面，由$Ay=\lambda_\beta y$我们有$(A-I\lambda_1)^{m_1}\cdots(A-\lambda_\alpha I)^{m_\alpha}y=(\lambda_\beta-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda_\beta-\lambda_\alpha)^{m_\alpha}y\neq0$，这与上面刚表明的事实矛盾． Q.E.D.

现在我们可证明定理1与2.由引理1可推出有无关向量$u_1,\cdots,u_a\in V_n$使得$(A-\lambda I)^a u_a=0$，因而对任给$m\geqslant a$有$n_m(\lambda)\geqslant n_a(\lambda)\geqslant a$.此外，引理2表明对任给正整数$m_1,\cdots,m_s$，$\sum_{a=1}^{s}n_{m_a}(\lambda_a)\leqslant n$．因而，由$\sum_{a=1}^{s}a_a=n$及对$m_a\geqslant a_a$，$n_{m_a}(\lambda_a)\geqslant a_a$，其中$a_a$是$\lambda_a$的代数重数，可推出对$m_a\geqslant a_a$有$n_{m_a}(\lambda_a)=a_a$并且$c_a\leqslant a_a$．

三、子空间方程组与 Jordan 生成空间列

对任给$B\in\mathscr{L}(T_n)$及任一子空间$G\subset T_n$，我们记

$$BG=\{Bx:x\in G\},\tag{3.1}$$

它是V_n的子空间．下面是本文的关键结果．

定理3 设λ是$A\in\mathscr{L}(V_n)$的特征值且c是临界指标．那么存在子空间列$\{G_1^\lambda,\cdots,G_c^\lambda\}$ 适合下述子空间方程组：

$$N_\alpha(\lambda)=N_{\alpha-1}(\lambda)\oplus\left(\bigoplus_{\beta=\alpha}^{c}(A-\lambda I)^{\beta-\alpha}G_\beta^\lambda\right)\tag{3,2}$$

$$(\alpha=c,c-1,\cdots,2,1)$$

证明 对$\alpha=c$，方程$N_c(\lambda)=N_{c-1}(\lambda)\oplus G_c^\lambda$有解$G_c^\lambda$．只需证明若有子空间 $G_\beta^\lambda(\beta=\alpha,\alpha+1,\cdots,c)$，适合(3.2)，那么有子空间$G_{\alpha-1}^\lambda$适合

$$N_{\alpha-1}(\lambda)=N_{\alpha-2}(\lambda)\oplus\left(\bigoplus_{\beta=\alpha}^{c}(A-\lambda I)^{\beta-\alpha+1}G_\beta^\lambda\right)\oplus G_{\alpha-1}^\lambda,$$

或等价地，子空间 $N_{\alpha-2}(\lambda)$，$(A-\lambda I)^{\beta-\alpha+1}G_\beta^\lambda(\beta=\alpha,\alpha+1,\cdots,c)$，是无关的且它们的和属于

$\mathbf{N}_{a-1}(\lambda)$。

事实上，对任给 $\mathbf{x}\in\mathbf{N}_a(\lambda)$ 我们有 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}\in\mathbf{N}_{a-1}(\lambda)$。而且，(3.2)表明 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a}\mathbf{G}^\lambda_\beta\subset\mathbf{N}_a(\lambda)$。这些事实说明 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a+1}\mathbf{G}^\lambda_\beta\,(\beta=a,a+1,\cdots,c)$，是 $\mathbf{N}_{a-1}(\lambda)$ 的子空间因而它们的和是 $\mathbf{N}_{a-1}(\lambda)$ 的子空间。另方面，考虑

$$\mathbf{u}_{a-2}+\sum_{\beta=a}^{c}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a+1}\mathbf{x}_\beta=0,\ \mathbf{u}_{a-2}\in\mathbf{N}_{a-2}(\lambda),\mathbf{x}_\beta\in\mathbf{G}^\lambda_\beta\qquad(\beta=a,\cdots,c)\tag{3.3}$$

注意到 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{a-2}\mathbf{u}_{a-2}=0$，从(3.3)我们得出 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{a-1}\sum\limits_{\beta=a}^{c}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a}\mathbf{x}_\beta=0$，因而 $\sum\limits_{\beta=a}^{c}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a}\mathbf{x}_\beta\in(\oplus^c_{\beta=a}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a}\mathbf{G}^\lambda_\beta)\cap\mathbf{N}_{a-1}(\lambda)=\{0\}$ (参见 (3.2))。因此，$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a}\mathbf{x}_\beta=0$，$\beta=a,a+1,\cdots,c$，因而(3.3)意味着 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a+1}\mathbf{x}_\beta=\mathbf{u}_{a-2}=0\,(\beta=a,\ a+1,\cdots,c)$。这表明子空间 $\mathbf{N}_{a-2}(\lambda)$，$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-a+1}\mathbf{G}^\lambda_\beta$ $(\beta=a,a+1,\cdots,c)$ 是无关的。 Q. E. D.

一般而言，子空间方程组(3.2)可有无穷多组解。

定义2 由子空间方程组(3.2)决定的每一列子空间称为A的一个 λ-Jordan 生成空间列，其中 $\mathbf{G}^\lambda_a$ 称为A的 a 阶 λ-Jordan生成空间。(3.2)的所有解的集，即 λ-Jordan 生成空间列的集，记为 $\mathbf{G}(\lambda)$。

定理3导致下述结果。

推论1 对每一 λ-Jordan生成空间 $\mathbf{G}^\lambda_a$ 及每一 $\beta<a$，

$$\dim\mathbf{G}^\lambda_a=\dim((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^\beta\mathbf{G}^\lambda_a)=2n_a(\lambda)-n_{a+1}(\lambda)-n_{a-1}(\lambda)\tag{3.4}$$

证明 对任给 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{G}^\lambda_a$ 与 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq0$，设 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^\beta\mathbf{x}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^\beta\mathbf{y}$。则 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in\mathbf{G}^\lambda_a\cap\mathbf{N}_\beta(\lambda)\subseteq\mathbf{G}^\lambda_a\cap\mathbf{N}_{a-1}(\lambda)=\{0\}$ (参见(3.2))，即 $\mathbf{x}-\mathbf{y}=0$，与假设 $\mathbf{x}-\mathbf{y}\neq0$ 矛盾。这断言(3.4)的第一个等式成立。其次，由刚证明的结论及(3.2)，可推出

$$\sum_{\beta=a}^{c}\dim\mathbf{G}^\lambda_\beta=n_a(\lambda)-n_{a-1}(\lambda)\qquad(a=1,2,\cdots,c)\tag{3.5}$$

由此即可推出(3.4)的第二个等式。

定义3 $g_a(\lambda)=\dim\mathbf{G}^\lambda_a$，它是A的所有 a 阶 λ-Jordan生成空间的共同维数，称为A的 a 阶 λ-Jordan指标。

我们将看到，Jordan指标 $g_a(\lambda)$ 正是A的Jordan形中阶为 a 的 λ-Jordan块的个数。

从(3.5)及 $g_a(\lambda)\geqslant0$，$1\leqslant a\leqslant c$，可推出

推论2 $n_1(\lambda)-n_0(\lambda)\geqslant n_2(\lambda)-n_1(\lambda)\geqslant\cdots\geqslant n_c(\lambda)-n_{c-1}(\lambda)$ (3.6)

$$\sum_{a=1}^{c}g_a(\lambda)=n_1(\lambda)\tag{3.7}$$

$$\sum_{a=1}^{c}ag_a(\lambda)=n_c(\lambda)=a(\lambda)\tag{3.8}$$

推论3 对任给 $0\neq\mathbf{u}^a\in\mathbf{G}^\lambda_a$ 与 $\beta=1,2,\cdots,a$，

$$0\neq\mathbf{u}^a_\beta=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-1}\mathbf{u}^a=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}^a_{\beta-1}\in\mathbf{N}_{a-\beta+1}(\lambda)\tag{3.9}$$

证明 因为 $\mathbf{u}^a\in\mathbf{G}^\lambda_a\subset\mathbf{N}_a(\lambda)$ (参见(3.2))，$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-1}\mathbf{u}_a\in\mathbf{N}_{a-(\beta-1)}(\lambda)$ 显然。余下的要证 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-1}\mathbf{u}_a\neq0$。事实上，若 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\beta-1}\mathbf{u}^a=0$，那么由(2.2)与(3.2)我们可推出 $\mathbf{u}^a\in$

$G_\alpha^\lambda \cap N_{\beta-1}(\lambda) \subseteq G_\alpha^\lambda \cap N_{\alpha-1}(\lambda)=\{0\}$，即$u^\alpha=0$，与$u^\alpha\neq 0$矛盾. Q. E. D.

我们将看到，推论1断言Jordan标准形的唯一性，而推论3表明G_α^λ中的每一非零向量可生成一个λ-Jordao链（长度为α），参见下节.

四、新分解定理与 Jordan 基

反复应用(3.2)，将 $N_1(\lambda)$ 的表示式代入到 $N_2(\lambda)$的表示式，然后将所得表示式代入到$N_3(\lambda)$的表示式. 继续此代入过程直至$N_c(\lambda)$的表示式可得

定理4 设λ是$A\in\mathscr{L}(V_n)$的一个特征值. 那么对任一λ-Jordan生成空间列$\{G_1^\lambda,\cdots,G_c^\lambda\}\in G(\lambda)$,

$$N_c(\lambda)=\bigoplus_{\alpha=1}^{c}\bigoplus_{\beta=\alpha}^{c}(A-\lambda I)^{\beta-\alpha}G_\alpha^\lambda \tag{4.1}$$

该定理与定理2给出复向量空间分解的下述新结果：

定理5 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_\sigma,\cdots,\lambda_s$是$A\in\mathscr{L}(V_n)$ 的所有不同特征值且c_σ是A的λ_σ-临界指标. 那么对任给 λ_σ-Jordan 生成空间列$\{G_1^{\lambda_\sigma},\cdots, G_{c_\sigma}^{\lambda_\sigma}\}\in G(\lambda_\sigma)$ $(\sigma=1,2,\cdots,s,)$

$$V_n=\bigoplus_{\sigma=1}^{s}\bigoplus_{\alpha=1}^{c_\sigma}\bigoplus_{\beta=\alpha}^{c_\sigma}(A-\lambda_\sigma I)^{\beta-\alpha}G_\beta^{\lambda_\sigma} \tag{4.2}$$

推论3与定理5导致Jordan定理. 为说明此事实，我们回忆关于Jordan基与 Jordan 标准形的一些必要概念.

$\alpha\times\alpha$矩阵

$$j_\alpha(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$

称为λ-Jordan块. Jordan矩阵是指对角元素为Jordan 块的分块对角阵. 特别，对角元素全部为λ-Jordan块的分块对角阵称为λ-Jordan矩阵. 下面是著名的Jordan定理.

定理6(Jordan) 设$A\in\mathscr{L}(V_n)$且$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$是A的所有不同特征值. 那么存在$V_n$的一组基使得

$$A(u_1\ \cdots\ u_n)=(u_1\ \cdots\ u_n)J(A) \tag{4.3}$$

$$J(A)=(J(\lambda_1)\ \ \cdots\ \ J(\lambda_s)) \tag{4.4}$$

其中 $J(\lambda_\alpha)$是一个λ_α-Jordan矩阵而$J(A)$是对角元素为$J(\lambda_\alpha)$ $(\alpha=1,2,\cdots,s)$的 Jordan 矩阵. 基$u_1,\cdots,u_n$称为A的Jordan基，$J(A)$称为A的Jordan标准形. $J(A)$除 Jordan 块的排列顺序外本质上是唯一的.

几何方法[1~3]的主要任务是表明Jordan基的存在且说明如何构造它们.

向量u_β^α $(\beta=1,2,\cdots,\alpha)$称为A的长度为$\alpha$的$\lambda$-Jordan链，如果

$$A(u_1^\alpha\ \cdots\ u_\alpha^\alpha)=(u_1^\alpha\ \cdots\ u_\alpha^\alpha)j_\alpha(\lambda) \tag{4.5}$$

易证u_β^α, $\beta=1,2,\cdots,\alpha$ 是A的λ-Jordan链，即(4.5)成立当且仅当(3.9)成立，其中$u_1^\alpha=u^\alpha$称为A的α阶λ-生成向量并且已用到$(A-\lambda I)u_\alpha^\alpha=(A-\lambda I)^\alpha u^\alpha=0$. 推论3表明$G_\alpha^\lambda$中的每一非零向量是一个$\alpha$阶$\lambda$-生成向量.

从(4.3)与(4.4)可看到，A的Jordan基由Jordan链构成，因为$J(\mathbf{A})$由Jordan块构成。为了获得A的Jordan基，需要找到一组生成向量使得由它们生成的各个Jordan链构成$\mathbf{V}_n$的一组基。

这是困难的课题。有许多努力阐明构造Jordan基的途径[1~3]，但较冗繁。

上节引入的Jordan生成空间列可容易地提供所有要求的Jordan基。构造过程是直接的：在每个$\mathbf{G}(\lambda_\sigma)$中取一Jordan生成空间列$\{\mathbf{G}_1^{\lambda_\sigma},\cdots,\mathbf{G}_{c_\sigma}^{\lambda_\sigma}\}$然后在每个$\mathbf{G}_\alpha^{\lambda_\sigma}$中取一组基。对A的所有不同特征值所选取的基生成$\sum_{\sigma=1}^{s} n_1(\lambda_\sigma)$条Jordan链（参见(3.7,0)）且这些Jordan链构成A的Jordan基（参见定理5）。

上述过程表明，Jordan基关联两个选择过程：在每个$\mathbf{G}(\lambda_\sigma)$中选取Jordan生成空间列及在每个Jordan生成空间中选取基。对这两个选择过程未施加任何限制。因此，一般而言，上述双重选择过程可提供无穷多Jordan基。推论1表明所有Jordan基对应于一个共同的Jordan标准形(Jordan块的排列顺序除外)。因此，上述过程自动表明了Jordan标准形的唯一性并且给出下述深刻新洞察：复线性变换的Jordan标准形是一种关联双重任意选择的不变性结构，即是关联Jordan生成空间列的选择及每个Jordan生成空间的基的选择的不变性结构。

最后，通常的空间第三分解定理[1~3]，它表明复向量空间可分解为一些循环子空间的直和，是定理的直接推论。因为每个循环子空间可由Jordan链张成[1~3]，从上述构成Jordan基的过程与(3.9)以及定理5，该事实显然。

参 考 文 献

[1] Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, Vol. I, Chelsea Publ., New York (1959).

[2] Hoffmann, K. and R. Kunze, *Linear Algebra, Prentice-Hall*, New Jersey(1971).

[3] Greub, W., *Linear Algebra*, 4th ed. Springer, Berlin(1986).

[4] Stang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, New York (1976).

[5] Horn, R. A. and C. R. Johnson, *Masrix Analysis*, Cambridge Uni. Press, London(1990).

[6] Guo Zhong-heng, Exterior-algebraic method in tensor calculus, *Adv. in Math.*, 20(1991), 335—343.

On the Decomposition of Complex Vector Spaces and Jordan Canonical Form of Complex Linear Transfomations

Xiao Heng Guo Zhong-heng

(Department of Mathematics, Peking University, Beijing)

Abstract

New objects characterizing the structure of complex linear transformations are introduced. These new objects yield a new result for the decomposition of complex vector spaces relative to complex linear transformations and provide all Jordan bases by which the Jordan canonical form is constructed. Accordingly, they can result in the celebrated Jordan theorem and the third decomposition theorem of space directly and, moreover, they can give a new deep insight into the exquisite and subtle structure of the Jordan form. The latter indicates that the Jordan canonical form of a complex linear transformation is an invariant structure associated with double arbitrary choices.

Key words complex vector space, complex linear transformation, decomposition theorems, Jordan canonical form