应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

4维种群互斥系统的有界性绝灭性和稳定性*

侯赣生

（江西师范大学，1994年1月5日收到）

摘　　要

本文探讨了一种较为典型的4维种群互斥系统的有界性绝灭性和稳定性，并给出了它们存在的充要条件，与之同时还阐述了它们的生态意义.

关键词　互斥系统　有界性　绝灭性　平衡点　稳定性

一、引　　言

在自然界中由多种生物群体共存而构成生态系统[1]，他们之间通过生存竞争而趋于生态平衡。在数学上就是要刻划与探讨系统的有界性、绝灭性以及在正卦象内稳定性的特点和充要条件，以便于人们在实践中应用。本文所要探讨的生态系统，是生活在稻田中由稻作害虫（如蝗、螟等，群量为X），青蛙(Y_1)、鸟(Y_2)和蛇所组成的。这是一种较为典型的4维种群互斥系统，显然是由两端融合的两条食物链构成。其数学模式为

$$\left.\begin{aligned}\dot{X}&=X(a-e_0X-b_1Y_1-b_2Y_2)\\ \dot{Y}_1&=Y_1(c_1X-e_1Y_1-f_1Y_2-d_1Z-h_1)\\ \dot{Y}_2&=Y_2(c_2X-f_2Y_1-e_2Y_2-d_2Z-h_2)\\ \dot{Z}&=Z(g_1Y_1+g_2Y_2-e_3Z-h_3)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中黑点·表记为时间导数$\frac{d}{dt}$。纯增长率$a=\alpha-\beta$；α，c_1，c_2和g_1，g_2分别为X，Y_1，Y_2和Z的增长速率系数；β，h_1，h_2和h_3分别为X，Y_1，Y_2和Z的死亡率；e_0，e_1，e_2和e_3分别反映X，Y_1，Y_2和Z的自排斥效应；f_1为Y_2对Y_1，f_2为Y_1对Y_2的互斥效应；b_1，b_2分别为Y_1，Y_2对X的天敌效应；而d_1，d_2则分别为Z对Y_1、Y_2的天敌效应。以上各项速率系数皆为正的常数。$e_0=a/K_0$，K_0为环境容量[2]。

根据该系统的生态学特点[3,4]，可有以下不等式：

$b_1>b_2$，$c_1>c_2$，$d_1>d_2$，$g_1>g_2$，$h_3>h_1>h_2$，$e_2>e_1>e_0>e_3$，

---

* 吴家龙推荐。国家自然科学基金资助。

$$\frac{c_1}{c_2}>\frac{d_1}{d_2}>\frac{e_1}{f_2}、\frac{e_2}{f_1}>\frac{h_1}{h_2}，\frac{b_1}{b_2}>\frac{g_1}{g_2}>\frac{e_1}{f_1}，\frac{e_2}{f_1}>\frac{g_1}{g_2}.$$

二、有界性与绝灭性

定理2.1 如果系统（1.1）中的$a>0$，则对应于一切非负初始条件的解皆有界。

证明 若初始条件是非负的，则对所有的$t\geqslant 0$，诸变量皆在正卦象内变化。

由式（1.1）中第一方程

$$\dot{X}\leqslant(a-e_0X)X$$

对时间取积分

$$X(t)\leqslant K_0/\left[1+\frac{K_0-X(0)}{X(0)}\exp(-at)\right] \tag{2.1}$$

尤其是

$$\lim_{t\to\infty}X(t)=K_0$$

说明当$a>0$时，$X(t)$的一切解有界，其解显然为$X(t)\leqslant\max[K_0,\ X(0)]$。因而环境容量$K_0$的生态学意义，就是指在稻田中不存在天敌时，受稻作食饵量的限制，所能养活害虫群量的最大值。

由式（1.1）中第一、二方程

$$c_1\dot{X}+b_1\dot{Y}_1\leqslant c_1(a-e_0X)X-b_1(e_1Y_1+h_1)Y_1$$
$$\leqslant -m_1(c_1X+b_1Y_1-2c_1q_1K_0/m_1)$$

其中 $q_1=a-e_0X(0)=a[K_0-X(0)]K_0$，

$q_2=e_1Y_1(0)+h_1$，$m_1=\max(q_1,\ q_2)$。

对时间取积分

$$c_1X(t)+b_1Y_1(t)\leqslant[c_1X(0)+b_1Y_1(0)-2c_1q_1K_0/m_1]\exp(-m_1t)+2c_1q_1K_0/m_1 \tag{2.2}$$

尤其是

$$\lim_{t\to\infty}[c_1X(t)+b_1Y_1(t)]=2c_1q_1K_0/m_1$$

其中 $X(t)$有界，因而$Y_1(t)$必定有界，否则存在矛盾。

由式（1.1）中第一、三方程

$$c_2\dot{X}+b_2\dot{Y}_2\leqslant c_2(a-e_0X)X-b_2(e_2Y_2+h_2)Y_2$$
$$\leqslant -m_2(c_2X+b_2Y_2-2c_2q_1K_0/m_2)$$

其中 $q_3=e_2Y_2(0)+h_2$，$m_2=\max(q_1,\ q_3)$。

对时间取积分

$$c_2X(t)+b_2Y_2(t)\leqslant[c_2X(0)+b_2Y_2(0)-2c_2q_1K_0/m_2]\exp(-m_2t)+2c_2q_1K_0/m_2 \tag{2.3}$$

同理可说明$Y_1(t)$是有界的。

由式（1.1）中第二、三和四方程

$$g_1\dot{Y}_1+g_2\dot{Y}_2+(d_1+d_2)\dot{Z}$$
$$\leqslant -m_3[g_1Y_1+g_2Y_2+(d_1+d_2)Z-2(g_1q_4Y_1^*+g_2q_5Y_2^*)/m_3]$$

其中 $q_4=c_1X(0)-e_1Y_1(0)-f_1Y_2(0)-h_1$，$q_5=c_2X(0)-f_2Y_1(0)-e_2Y_2(0)-h_2$，

$q_6=e_3Z(0)+h_3$，$m_3=\max(q_4,\ q_5,\ q_6)$

$Y_1^* = \max[Y_1(0),\ Y_1(\infty)]$，$Y_2^* = \max[Y_2(0),\ Y_2(\infty)]$。

今令$K = g_1q_4Y_1^* + g_2q_6Y_2^*$。对时间取积分

$$g_1Y_1(t) + g_2Y_2(t) + (d_1+d_2)Z(t) \leqslant \Big[g_1Y_1(0) + g_2Y_2(0) + (d_1+d_2)Z(0)$$

$$-\frac{2K}{m_3}\Big]\exp(-m_3t) + \frac{2K}{m_3} \tag{2.4}$$

可知$Z(t)$也是有界的．证毕．从生态学角度来看，式（1.1）解的有界性，反映了生态系统诸种群的增长不会是无限制的，而是受到食饵量和被猎者群量所制约的．

令$H_0 = h_3(b_1e_2 - b_2e_1)/(e_2g_1 - e_1g_2)$．

定理2.2 如果$a < H_0$，则系统（1.1）是具绝灭性的．

证明 考虑到系统（1.1）是由两条食物链构成的，因而作绝灭性函数

$$\varepsilon = \varepsilon(X,\ Y_1,\ Y_2,\ Z,\ t) = X^{r_1}(Y_1+Y_2)^{r_2}Z^{r_1}$$

其中 r_i为待定正参数．将ε沿着式（1.1）取导数

$$\dot\varepsilon = \varepsilon\left(r_1\frac{\dot X}{X} + r_2\frac{\dot Y_1 + \dot Y_2}{Y_1+Y_2} + r_3\dot Z\right)$$

$$= r_1\varepsilon\left\{(a - R_3h_3) - R_3e_3Z - R_2\Big[\Big(h_1 - \Big(c_1 - \frac{e_0}{R_2}\Big)X\right.$$

$$-(e_1 - f_1)Y_2 + d_1Z\Big)Y_1 - \Big(\Big(c_2 - \frac{e_0}{R_2}\Big)X$$

$$\left. + (e_2 - f_2)Y_1 - d_2Z - h_2\Big)Y_2\Big]\Big/(Y_1+Y_2)\right\} \tag{2.5}$$

其中任取$r_1 > 0$值，比值$R_2 = \frac{r_2}{r_1}$和$R_3 = \frac{r_3}{r_1}$，由联立方程$R_3g_1 - R_2e_1 = b_1$与$R_3g_2 - R_2e_1 = b_2$求出，得$R_2 = (b_1g_1 - b_2g_2)/(e_2g_1 - e_1g_2)$、$R_3 = (b_1e_2 - b_2e_1)/(e_2g_1 - e_1g_2)$．因初始条件是非负的，如果生存竞争进行到$t \geqslant T$时，诸变量仍保持非负的话，则可令式(2.5)中的$h_1 - \left(c_1 - \frac{e_0}{R_2}\right)X - (e_1 - f_1)Y_2 + d_1Z = 0$和$\left(c_2 - \frac{e_0}{R_2}\right)X - (e_2 - f_2)Y_1 - d_2Z - h_2 = 0$，并由此得$X = [d_1(e_2 - f_2)Y_1 - d_2(e_1 - f_1)Y_2 - (d_1h_2 - d_2h_1)]/[(c_1d_2 - c_2d_1) + e_0(d_1 - d_2)/R_2]$，仍然是非负的，说明我们对式（2.5）的上述处理是正确的，则由式（2.5）得

$$\dot\varepsilon = r_1\varepsilon[(a - R_3h_3) - R_3e_3Z]$$

考虑到稻田中的现实是$Z < Y_2 < Y_1 < X$，故可近似地取

$$\dot\varepsilon \leqslant r_1\varepsilon(a - R_3h_3) = r_1\varepsilon\mu$$

其中 $\mu = a - R_3h_3 = a - \dfrac{h_3(b_1e_2 - b_2e_1)}{e_2g_1 - e_1g_2} = a - H_0$

对时间取积分

$$\varepsilon(t) \leqslant \varepsilon(0)\exp(Y_1\mu t) \tag{2.6}$$

当$a < H_0$时，$\mu < 0$，对应于非负初始条件$\varepsilon(0) > 0$，则$\varepsilon(t)$是随时间的延继而递降的．尤其是

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t) = 0$$

说明了系统（1.1）在$a < H_0$条件下，是绝灭性的．证毕．系统的绝灭性，反映了随着时间的推移，生存竞争使生态系统最终将趋于消失．

推论2.1 具绝灭性的系统，对应于一切非负初始条件的解皆有界.

证明 在$\mu<0$条件下，由式（2.6）可知，对应于$\varepsilon(0)>0$，绝灭性函数$\varepsilon(t)$是不增的，因此它的解有界. 否则存在矛盾，这是明显的. 证毕.

推论2.2 定理2.1成立的充要条件是系统（1.1）具非绝灭性.

证明 结合生态学来分析，可知定理2.1揭示了生态系统的增长存在着上确界，而定理2.2则指出了它所存在的下确界. 现将该两定理联系起来分析，定理2.1的有界条件是$a>0$，而定理2.2的绝灭条件是$a<H_0$. 由于$H_0>0$，故一旦当现实的a值落入区间（0，H_0）内，则由该两定理分别作出的判断，其结论将发生矛盾. 因此严格地说，定理2.1成立的充要条件应是$a\geqslant H_0$，也就是说应是非绝灭性的. 证毕.

三、平 衡 点

因系统（1.1）是由4种群组成，故当其处于平衡态时，应有2^4个平衡点. 其中内部平衡点$(X_0, Y_{10}, Y_{20}, Z_0)$，由以下联立方程求出.

$$\begin{bmatrix} e_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & -e_1 & -f_1 & -d_1 \\ c_2 & -f_2 & -e_2 & -d_2 \\ 0 & g_1 & g_2 & -e_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_{10} \\ Y_{20} \\ Z_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

简记为$BX=A$. 将系数矩阵行列式$|B|$展开，作为各变量的分母值

$$\begin{aligned}|B|=&-e_0[e_3(e_1e_2-f_1f_2)+d_1(e_2g_1-f_2g_2)-d_2(f_1g_1-e_1g_2)]\\&-e_3[c_1(b_1e_2-b_2f_2)-c_2(b_1f_1-b_2e_1)]\\&-(c_1d_2-c_2d_1)(b_1g_2-b_2g_1)<0\end{aligned}$$

而各变量的分子值，则由式（3.1）展开后，分别为

$$\begin{aligned}I_X=&-a[e_3(e_1e_2-f_1f_2)+d_1(e_2g_1-f_2g_2)-d_2(f_1g_1-e_1g_2)]\\&-e_3[b_1(e_2h_1-f_1h_2)+b_2(e_1h_2-f_1h_1)]\\&+h_3[b_1(d_1e_2-d_2f_1)-b_2(d_1f_2-d_2e_1)]\\&+(d_1h_2-d_2h_1)(b_1g_2-b_2g_1)>0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{Y_1}=&-a[g_2(c_1d_2-c_2d_1)+e_3(c_1e_2-c_2f_1)]\\&-b_2[e_3(c_1h_2-c_2h_1)-h_3(c_1d_2-c_2d_1)]\\&-e_0[e_2(d_1h_3-d_2h_1)+g_2(d_1h_2-d_2h_1)-f_1(d_2h_3-e_3h_2)]<0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{Y_2}=&a[g_1(c_1d_2-c_2d_1)+e_3(c_1f_2-c_2e_1)]\\&+e_0[g_1(d_1h_2-d_2h_1)+h_3(d_1f_2-d_2e_1)-e_1(d_2h_3-e_3h_2)]\\&-b_1[h_3(c_1d_2-c_2d_1)-e_3(c_1h_2-c_2h_1)]>0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_Z=&e_0[g_1(e_2h_1-f_1h_2)+g_2(e_1h_2-f_2h_1)]\\&+h_3[b_1(c_1e_2-c_2f_1)+b_2(c_1f_2-c_2e_1)]\\&+c_1h_1(b_1g_2-b_2g_1)-a[g_1(c_1e_2-c_2f_1)-g_2(c_1f_2-c_2e_1)]\\&-c_2g_1h_1(b_1-b_2)>0.\end{aligned}$$

由此可得内部平衡点，为

$$(X_0, Y_{10}, Y_{20}, Z_0)=\{-I_X, I_{Y_1}, -I_{Y_2}, -I_Z\}/|B|$$

是一个负平衡点. 显然该类平衡点，不符合生态学要求. 其他各个平衡点，经分别计算得出，

详见表3.1

表3.1 平衡态解

编号	存活数	$E_{XY}Y_{1ZZ}$	X_0, Y_{10}, Y_2Y_{20}, Z_0	备注
1	0	0000	0, 0, 0, 0	零态点
2	1	1000	K_0, 0, 0, 0	不符合灭虫要求
3		0100	0, $-h_1/e_1$, 0, 0	负平衡点，不符合生态学要求
4		0010	0, 0, $-h_2/e_2$, 0	
5		0001	0, 0, 0, $-h_3/e_3$	
6	2	1100	$(ae_1+b_1h_1,\ ac_1-e_0h_1)/(b_1c_1+e_0e_1)$, 0, 0	非负平衡点
7		1010	$(ae_2+b_2h_2,\ q,\ ac_2-e_0h_2)/(b_2c_2+e_0e_2)$, 0	
8		1001	K_0, 0, 0, $-h_3/e_3$	负平衡点
9		0101	0, h_3/g_1, 0, $-(g_1h_1+e_1h_3)/(d_1g_1+e_1e_3)$	
10		0011	0, 0, h_3/g_2, $-(g_2h_2+e_2h_3)/(d_2g_2+e_2e_3)$	
11		0110	0, $-(e_2h_1-f_1h_2,\ e_1h_2-f_2h_1)/(e_1e_2-f_1f_2)$, 0	
12	3	0111	0, $\{[g_2(d_1h_2-d_2h_1)+h_3(d_1e_2-d_2f_1)-e_3(e_2h_1-f_1h_2)],-[g_1(d_1h_2-d_2h_1)+h_3(d_{122}-d_2e_1)+e_3(e_1h_2-f_2h_1)],\ -[g_1(e_2h_1-f_1h_2)+g_2(e_1h_2-f_2h_1)+h_3(e_1e_2-f_1f_2)]\}/[e_3(e_1e_2-f_1f_2)+d_1(e_2g_1-f_2g_2)-d_2(f_1g_1-e_1g_2)]$	
13		1110	$\{a(e_1e_2-f_1f_2)+b_1(e_2h_1-f_1h_2)+b_2(e_1h_2-f_2h_1),\ a(c_1e_1-c_2f_1)+b_2(c_1h_2-c_2h_1)-e_0(e_2h_1-h_1h_2),\ [a(c_1f_2-c_2e_1)+b_1(c_1h_2-c_2h_1)+e_0(e_1h_2-f_2h_1)]\}/[e_0(e_1e_2-f_1f_2)+b_1(c_1e_2-c_2f_1)-b_2(c_1f_2-c_2e_1)]$, 0	
14		1101	$\{e_3(ae_1+b_1h_1)+d_1(ag_1-b_1h_3),ac_1e_3+e_0(d_1h_3-e_3h_1),\ 0,\ c_1(ag_1-b_1h_3)-e_0(g_1h_1+e_1h_3)\}/[e_3(b_1c_1+e_0e_1)-d_1e_0g]$	非负平衡点
15		1011	$\{e_3(ae_2+b_2h_2)+d_2(ag_2-b_2h_3),\ 0,ac_2e_3+e_0(d_2h_3-e_3h_2),\ c_2(ag_2-b_2h_3)-e_0(g_2h_2+e_2h_3)\}/[e_3(b_2c_2+e_0e_2)-d_2e_0g_2)]$	
16	4	1111	$\{-I_X,\ I_{Y1},-I_{Y2},\ -I_Z\}/\|B\|$	负平衡点

由表3.1可知，既要能符合生态学意义，又要能达到治虫实 践 要求的，显然只有零态点（E_1）和非负平衡点(E_j, $j=6$, 7, 14和15)，共计5个。零态平衡位置（E_2）标志着4种群全部死亡，体现了该系统的绝灭性质。而非负平衡位置则有两类，即存活两种 群（E_6, E_7）和三种群(E_{14}, E_{15})。它们的共同特点是，害虫的两种天敌即Y_1与Y_2不能并存于同一个平衡位置上。

四、稳 定 性

按局部稳定性和全局稳定性，分别进行讨论。且令H_{j1}, H_{j2}, H_{j3}, $j=1$, 6, 7, 14和15，分别为

$H_{12}=0$，无H_{11}和H_{13};

$$H_{61}=-[e_0(e_1h_2-f_2h_1)+b_1(c_1h_2-c_2h_1)]/(c_1f_2-c_2e_1),$$
$$H_{62}=[e_0g_1h_1+h_3(b_1c_1+e_0e_1)]/c_1g_1,$$

无H_{63}；

$$H_{72}=-[b_2(c_1h_2-c_2h_1)-e_0(e_2h_1-f_1h_2)]/(c_1e_2-c_2f_1),$$
$$H_{73}=[e_0g_2h_2+h_3(b_2c^2+e_0e_2)]/c_2g_2,$$

无H_{71}；

$$\begin{aligned}H_{141}=&\{b_1[h_3(c_1d_2-c_2d_1)-e_3(c_1h_2-c_2h_1)]\\&+e_0[d_2(g_1h_1+e_1h_3)+d_1(g_1h_2-f_2h_1)-e_3(e_1h_2-f_2h_1)]\}\\&\cdot[g_1(c_1d_2-c_2d_1)+e_3(c_1e_2-c_2f_1)]^{-1},\end{aligned}$$

无H_{142}与H_{143}；

$$\begin{aligned}H_{152}=&-\{e_0[d_1(g_2h_2+e_3h_3)+d_2(g_2h_1-f_1h_3)-e_3(e_2h_1-f_1h_2)]\\&-b_2[h_3(c_1d_2-c_2d_1)-e_3(c_1h_2-c_2h_1)]\}\\&\cdot[g_2(c_1d_2-c_2d_1)+e_3(c_1e_2-c_2f_1)]^{-1},\end{aligned}$$

无H_{151}与H_{153}。

4.1 局部稳定性

设系统（1.1）在平衡位置E_j附近有微扰动，则相应的一次近似变分矩阵，为

$$\begin{bmatrix}(a-2e_0X_0-b_1Y_{10}-b_2Y_{20}) & -b_1X_0 & -b_2X_0 & 0\\ c_1Y_{10} & (c_1X_0-2e_1Y_{10}-f_1Y_{20}-d_1Z_0-h_1) & -f_1Y_{10} & -d_1Y_{10}\\ c_2Y_{20} & -f_2Y_{20} & (c_2X_0-f_2Y_{10}-2e_2Y_{20}-d_2Z_0-h_2) & -d_2Y_{20}\\ 0 & g_1Z_0 & g_2Z_0 & (g_1Y_{10}+g_2Y_{20}-2e_3Z_0-h_3)\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

将表3.1中该5个平衡态解分别代入式（4.1）以后，可得对应的变分矩阵和特征方程。

定理4.1 若满足条件$H_{j2}>a>H_{j1}$，则系统（1.1）平衡位置E_j是局部稳定的；若$a>H_{j2}$或$a<H_{j1}$，则是不稳定的；$a=H_{j1}$或$a=H_{j2}$，是临界稳定。

证明 按平衡点E_j的类型，分别进行。

4.1.1 零态点E_1

由表3.1中的E_1代入式（4.1）后，易得特征方程

$$(a-\lambda)(h_1+\lambda)(h_2+\lambda)(h_3+\lambda)=0 \tag{4.2}$$

可见若$a<0$，亦即$a<H_{12}$(无H_{11}和H_{13})，所有特征值λ皆为负，系统（1.1）平衡位置E_1是局部稳定的；若$a>H_{12}$，则有一个特征值为正，系统是不稳定的；$a=H_{12}$,是在Laypunov意义下稳定的，亦即临界稳定[5]。

4.1.2 非负平衡点E_6和E_7

由式（4.1）得对应于E_6的变分矩阵，为

$$\begin{bmatrix}-e_0X_0 & -b_1X_0 & -b_2X_0 & 0\\ c_1Y_{10} & -e_1Y_{10} & -f_1Y_{10} & -d_1Y_{10}\\ 0 & 0 & (c_2X_0-f_2Y_{10}-h_2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & (g_1Y_{10}-h_3)\end{bmatrix}$$

和特征方程

$$\begin{aligned}&(c_2X_0-f_2Y_{10}-h_2-\lambda)(g_1Y_{10}-h_3-\lambda)[\lambda^2+(e_0X_0+e_1Y_{10})\lambda\\&+(e_0e_1+b_1c_1)X_0Y_{10}]=0\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中等号左端顺序第三个因子内，二个特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(e_0X_0+e_1Y_{10})\pm\sqrt{(e_0X_0-e_1Y_{10})^2-4b_1c_1X_0Y_{10}}}{2}$$

由于 $e_0X_0+e_1Y_{10}>\sqrt{(e_0X_0-e_1Y_{10})^2-4b_1c_1X_0Y_{10}}$，故$\lambda_{1,2}$皆为负值或者皆有负实部。因而符号左端顺序第一、二个因子内，二个特征值$\lambda_{3,4}$分别满足条件

$$\left.\begin{array}{l}c_2X_0-f_2Y_{10}-h_2<0\\ g_1Y_{10}-h_3<0\end{array}\right\}\tag{4.4}$$

则皆为负值。将E_6的解代入式(4.4)，得

$$\frac{e_0g_1h_1+h_3(b_1c_1+e_0e_1)}{c_1g_1}>a>-\frac{b_1(c_1h_2-c_2h_1)+e_0(e_1h_2-f_2h_1)}{c_1f_2-c_2e_1}$$

简记为$H_{62}>a>H_{61}$(无H_{63})，此即为局部稳定的充要条件，显然当$a>H_{62}$或$a<H_{61}$是不稳定的；而$a=H_{62}$或$a=H_{61}$则是临界稳定的。

同理对E_7进行分析，得局部稳定的充要条件，因计算得

$$\frac{e_0g_2h_2+h_3(b_2c_2+e_0e_2)}{c_2g_2}>-\frac{b_2(c_1h_2-c_2h_1)+e_0(c_2h_1-f_1h_2)}{c_1e_2-c_2f_1}>a$$

简记为$H_{73}>H_{72}>a$(无H_{71})，也就说$a<H_{72}$，是局部稳定的；$a>H_{72}$，不稳定；$a=H_{72}$，临界稳定。

4.1.3 非负平衡点E_{14}和E_{15} 对应于E_{14}的变分矩阵，为

$$\begin{bmatrix}-e_0X_0 & -b_1X_0 & -b_2X_0 & 0\\ c_1Y_{10} & -e_1Y_{10} & -f_1Y_{10} & -d_1Y_{10}\\ 0 & 0 & (c_2X_0-f_2Y_{10}-d_2Z_0-h_2) & 0\\ 0 & g_1Z_0 & g_2Z_0 & -e_3Z_0\end{bmatrix}$$

和特征方程

$$\begin{aligned}&(c_2X_0-f_2Y_{10}-d_2Z_0-h_2-\lambda)\{\lambda^3+(e_0X_0+e_1Y_{10}+e_3Z_0)\lambda^2\\&\quad+[e_0e_3X_0Z_0+(b_1c_1+e_0e_1)X_0Y_{10}+(d_1g_1+e_1e_3)Y_{10}Z_0]\lambda\\&\quad+(b_1c_1e_3+d_1e_0g_1+e_0e_1e_3)X_0Y_{10}Z_0\}=0\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中等号左端第二个因子内，$P_1=e_0X_0+e_1Y_{10}+e_3Z_0>0$，

$P_3=b_1c_1e_3+d_1e_0g_1+e_0e_1e_3)X_0\cdot Y_{10}Z_0>0$，

$P_2=e_0e_3X_0Z_0+(b_1c_1+e_0e_1)X_0Y_{10}+(d_1g_1+e_1e_3)\ Y_{10})Z_0$，

且有 $P_1P_2-P_3=(e_0X_0^2[(b_1c_1+e_0e_1)Y_{10}+e_0e_3Z_0]+e_1Y_{10}^2[(b_1c_1+e_0e_1)X_0+(d_1g_1+e_1e_3)Z_0]+e_3Z_0^2[e_0e_3X_0+(d_1g_1+e_1e_3)Y_{10}]+2e_0e_1e_3X_0Y_{10}Z_0>0$，

按照Routh-Hurwitz准则，该三个特征根皆有负实部。因而满足条件

$$c_2X_0-f_2Y_{10}-d_2Z_0-h_2<0\tag{4.6}$$

则第四个特征值为负，即得

$$\begin{aligned}a>&\{b_1[h_3(c_1d_2-c_2d_1)-e_3(c_1h_2-c_2h_1)]\\&+e_0[d_2(g_1h_1+e_1e_2)+d_1(g_1h_2-f_2h_3)-e_3(e_1h_2-f_2h_1)]\}\\&\cdot[g_1(c_1d_2-c_2d_1)+e_3(c_1f_2-c_2e_1)]^{-1}\end{aligned}$$

简记为$a>H_{141}$(无H_{142}与H_{143})，是局部稳定的；$a<H_{141}$为不稳定；$a=H_{141}$为临界稳定。

同理对E_{15}进行分析，得局部稳定的充要条件，为

$$a<-\{e_0[d_1(g_2h_2+e_2h_3)+d_2(g_2h_1-f_1h_3)-e_3(e_2h_1-f_1h_2)]$$

$$-b_2[h_3(c_1d_2-c_2d_1)-e_3(c_1h_2-c_2h_1)]\}$$
$$\cdot[g_2(c_1d_2-c_2d_1)+e_3(c_1e_2-c_2f_1)]^{-1}$$

简记为$a<H_{152}$(无H_{151}与H_{153})是局部稳定的；$a>H_{152}$，不稳定；$a=H_{152}$，临界稳定。

至此，定理4.1证毕。

4.2 全局稳定性

设待定正参数r_i，作Laypunov函数

$$V=\sum_i r_i\left(\phi_i-\phi_{i0}-\phi_{i0}\ln\frac{\phi_i}{\phi_{i0}}\right)$$

其中ϕ_{i0}为ϕ_i的平衡态解．将V函数沿着式（1.1）对时间取导数

$$\dot{V}=\sum_i r_i\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\dot{\phi}_i \tag{4.7}$$

定理4.2 若满足条件$H_{j2}\geqslant aH_{j1}$，则系统（1.1）平衡位置E_j是全局稳定的．

证明 按平衡点E_j的类型，分别进行．

4.2.1 零态点E_1

由式（1.1）与(4.7)，得

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-(r_1e_0X^2+r_2e_1Y_1^2+r_3e_2Y_2^2+r_4e_3Z^2)-(r_1b_1-r_2c_1)XY_1\\&-(r_1b_2-r_3c_2)XY_2-(r_2f_1+r_3f_2)Y_1Y_2-(r_2d_1-r_4g_1)Y_1Z\\&-(r_3d_2-r_4g_2)Y_2Z-(r_2h_1Y_1+r_3h_2Y_2+r_4h_3Z-r_1aX)\end{aligned}$$

任取$r_1>0$，为尽可能使交叉项为零，则取比值

$$R_2=\frac{r_2}{r_1}=\frac{b_1}{c_1},\ R_3=\frac{r_3}{r_1}=\frac{b_2}{c_2},\ R_4=\frac{r_4}{r_1}=\frac{b_1d_1}{c_1g_1}=\frac{b_2d_2}{c_2g_2}.$$

得

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-r_1[(e_0X^2+R_2e_1Y_1^2+R_3e_2Y_2^2+R_4e_3Z^2)\\&+(R_2f_1+R_3f_2)Y_1Y_2+(R_2h_1Y_1+R_3h_2Y_2+R_4h_3Z-aX)]\end{aligned} \tag{4.8}$$

可见，当$a\leqslant 0$，即$a\leqslant H_{12}$，并在正卦象内，有$\dot{V}<0$，也就是系统E_1是全局稳定的．

4.2.2 非负平衡点E_6与E_7

对应于E_6，由式(1.1)与(4.7)得

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-[r_1e_0(X-X_0)^2+r_2e_1(Y_1-Y_{10})^2+r_3e_2Y_2^2+r_4e_3Z^2]\\&-(r_1b_1-r_2c_1)(X-X_0)(Y_1-Y_{10})-(r_1b_2-r_3c_2)(X-X_0)Y_2\\&-(r_2f_1+r_3f_2)(Y_1-Y_{10})Y_2-(r_2d_1-r_4g_1)(Y_1-Y_{10})Z\\&-(r_3d_2-r_4g_2)Y_2Z+r_3(c_2X_0-f_2Y_{10}-h_2)Y_2+r_4(g_1Y_{10}-h_3)Z.\end{aligned}$$

任取 $r_1>0$，取比值为 $R_2=\frac{r_2}{r_1}=\frac{b_1}{c_1}$ ，$R_3=\frac{r_3}{r_1}=\frac{b_2}{c_2}$ ，$R_4=\frac{r_4}{r_1}=\frac{b_1d_1}{c_1g_1}=\frac{b_2d_2}{c_2g_2}$．得

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-r_1\{[e_0(X-X_0)^2+R_2e_1(Y_1-Y_{10})^2+R_3e_2Y_2^2+R_4e_3Z^2]\\&+(R_2f_1+R_3f_2)(Y_1-Y_{10})Y_2-R_3(c_2X_0-f_2Y_{10}-h_2)Y_2\\&-R_4(g_1Y_{10}-h_3)Z\}\end{aligned} \tag{4.9}$$

因而当满足条件

$$\left.\begin{aligned}&c_2X_0-f_2Y_{10}-h_2\leqslant 0\\&g_1Y_{10}-h_3\leqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

将表3.1中E_6的解代入式（4.10）后，为$H_{62} \geqslant a \geqslant H_{61}$，得$\dot{V}<0$。可更系统（1.1）$E_6$在正卦象的$Y_1(t)>Y_{10}$扇形区内，是全局稳定的，也即全局扇形稳定。

同理对E_7进行分析，可得若满足条件$a \leqslant H_{72}$是在正卦象的$Y_2(t)>Y_{20}$扇形区内全局稳定。

4.2.3 非负平衡点E_{14}与E_{15}

对应于E_{14}，由式（1.1）与（4.7）且任取$r_1>0$和取$R_2=\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{b_1}{c_1}$，$R_3=\dfrac{r_3}{r_1}=\dfrac{b_2}{c_2}$，$R_4=\dfrac{r_4}{r_1}=\dfrac{b_1 d_1}{c_1 g_1}=\dfrac{b_2 d_2}{c_2 g_2}$，最后得

$$\begin{aligned}\dot{V}=&-r_1\{[e_0(X-X_0)^2+R_2 e_1(Y_1-Y_{10})^2+R_3 e_2 Y_2^2+R_4 e_3(Z-Z_0)^2]\\&+(R_2 f_1+R_3 f_2)(Y_1-Y_{10})Y_2-R_3(c_2 X_0-f_2 Y_{10}-d_2 Z_0-h_2)Y_2\}\end{aligned} \tag{4.11}$$

因而当满足条件

$$c_2 X_0-f_2 Y_{10}-d_2 Z_0-h_2 \leqslant 0 \tag{4.12}$$

将表3.1中E_{14}的解代入式（4.12）后，为$a \geqslant H_{141}$，得$\dot{V}<0$。可见系统（1.1）E_{14}在正卦象的$Y_1(t)>Y_{10}$扇形区内，是全局稳定的。

同理对E_{15}进行分析，可得若满足条件$a \leqslant H_{152}$是在正卦象的$Y_2(t)>Y_{20}$扇形区内全局稳定。

至此，定理4.2证毕。

推论4.1 系统（1.1）全局稳定的充要条件是它的局部稳定。

证明 可采用反证法。以对平衡位置E_7为例。假设$a'>H_{72}$，即落在系统E_7的局部不稳定区内；另有$a<H_{72}$，落在E_7的全局稳定区内。今有特定正参数u，取$a'=H_{72}-u$，使a'值降低并逐渐左移到局部不稳区边界点即临界稳定点上；同时取$a=H_{72}+u$，使a值升高并右移到全局稳定区的边界点上。按定理4.1与4.2，应有$a=a'$，因而待定正参数只能取值为$u=0$，从而有$a=a'=H_{72}$。这就使得原假设不能成立，亦即系统（1.1）E_7既是局部不稳定的，同时又是全局稳定的，这是不可能的。证毕。

推论4.1是本系统的一个特点，具体表现在局部稳定与全局稳定，两者充要条件的一致。

系统的稳定性，反映了生态系统经过生存竞争的可能性结局，而生态平衡的出现和维持都是有条件的，那就是取决于a的数值。其中较易受干扰而变动的，是害虫的死亡率β，例如在稻田中撒施杀虫农药，即可加速害虫死亡，造成它们的负增长($a<0$)。其后果是使原来的生态平衡遭破坏，新的生态平衡将出现，甚至发生整个系统的消失。为提高生物-化学综合治虫和环境保护效益，尤其是能根治农田虫害，我们的最佳选择无疑应是保留天敌，杀绝害虫。

参 考 文 献

[1] 陈兰荪，《数学生态学模型与研究方法》，科学出版社，北京(1991).

[2] 侯赣生，一种狩猎者为有限食饵而具自竞争的生态方程及其应用，生物数学学报，6(2)(1991)，170—176.

[3] 蒲蛰龙主编，《害虫生物防治的原理和方法》，科学出版社，北京(1978).

[4] 杨水尧，《捕蛇与养蛇》，江西科技出版社，南昌(1985).
[5] 王联等，《非线性常微分方程定性分析》，哈尔滨工业大学出版社，哈尔滨(1987).

The Bounded Extermination and Stability of Mutual Interference System of Four-Dimensional Species

Hou Gan-sheng

(Jiangxi Teachers University, Nanchang)

Abstract

This paper considers a typical mutual interference system of four-dimensional species, its bounded, vanish and stability are studied, and their necessary-sufficient conditions are given, and their ecology meaning set forth.

Key words mutual interference system, bounded, extermination, equilibrium, stability