应用数学和力学，第15卷 第11期（1994年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二元关系传递性泛系研究新探*

吴守志

（苏州城建环保学院，1994年4月1日收到）

摘　要

本文基于泛系数学研究和一般事物机理分析的需要，讨论了二元关系对多元关系的传递性，引进一种被叫作“g-传递性”的广义传递概念，考察了它的基本性质．g-传递性不但是普通传递性、拟传递性、半序、拟半序等泛序概念的推广，还包容闭性、凸性、拓扑、对偶性等基本概念为其特例，从而表明这一概念的普适性．

关键词　泛系理论　关系　泛序　序　传递性　拟传递性　g-传递性

一、引　言

如所周知，拓扑、代数和序是数学的三大基本结构，在这三块基石上可以构筑起现代数学的巍峨大厦．传统数学中序结构是指自反的、反对称的和传递的二元关系，其中传递性是序概念的关键．泛系理论从自身具体深入的数学研究中[1]、更从用泛系观去探踪世界万物机理的独特视角中[2]，感悟到序概念的重要性和广泛性，认为传统数学的传递性和序定义是过于单一和简化，因而从多个角度对它们进行了补充、推广和发展，开展了一系列卓有成效的工作[1~6]，并最后将数学序概念泛化为十二大泛系关系之一的泛序概念[2,3]．

但迄今为止，对泛序的讨论还局限于二元关系．尽管二元关系在广义系统和关系结构中是最基本的，但世界的本质是多元的．在许许多多的情况下，多元关系并不能简单地约化成二元关系．因此有必要发展多元关系的或带多元关系性的序概念．我们这里且以一个简单直观的逻辑推理为例来说明这种推广的必要性：由条件A可推出结论B和结论C，由条件B加条件C（而不是单纯地由条件B或单纯地由条件C）可推出结论D．由以上假设，显然地，我们可得到“由条件A可推出结论D”的论断．这个论断实际上表现出的是一种推理的传递性，从而是一种有序性．但这种实际的传递性是有悖于传统的传递性数学定义的，目前也未见已有的泛序研究曾对此类情况加以讨论．

有鉴于此，本文提出了一种命名为“g-传递性”的泛序概念，传统的传递性定义和现有的各种泛序概念均可作为其特例而被包容在内，并可拟化如上逻辑推理中的多元关系传递性．此外，我们还可看到，数学中的闭性、凸性、拓扑、对偶性等诸多基本概念实际上也是一种特殊的g-传递性，从而表明该种泛序概念的普适性．

* 吴学谋推荐．1992年12月25日第一次收到．

二、g-传递性

定义 设A、B是两个非空集合，n是一个大于等于2的正整数，$f\subset A\times B$，$g\subset A^n$.如果对$\forall a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\in A$和$b\in B$，由$(a_1, b), (a_2, b), \cdots, (a_{n-1}, b)\in f$和$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)\in g$，均有$(a_n, b)\in f$，则称$f$是$g$-传递的.

由上定义可见，g-传递性概念讨论的是二元关系f对多元关系g的传递性.对照传统的二元关系传递定义：称集合A上的二元关系f是传递的，如果对$\forall a, b, c\in A$，只要$(a, b), (b, c)\in f$，均有$(a, c)\in f$，新传递性显见有实质性的推广.只要对g加上各种限制，g-传递性便显生为普通传递性、半序性、全序性、拟传递性、拟半序性等各色特定泛序.

为叙述简洁起见，我们采用泛系理论的习用记号[2]：设f是给定集合A上的二元关系，则用$I=\{(x, x)\mid x\in A\}$，$R[A)=\{f\mid I\subset f\}$，$S_a[A)=\{f\mid f\cap f^{-1}\subset I\}$，$T[A)=\{f\mid f^2\subset f\}$，$T_q[A)=\{f\mid (f-f^{-1})^2, (f-f^{-1})\circ(f\cap f^{-1}), (f\cap f^{-1})\circ(f-f^{-1})\subset f\}$，$L[A)=R[A)\cap S_a[A)\cap T[A)$，$L_s[A)=R[A)\cap T[A)$，$L_q[A)=R[A)\cap T_q[A)$分别表示对角、自反、反对称、传递、拟传递、半序、半半序、拟半序二元关系类，其中$\circ$表示二元关系的合成运算.

我们有下述结论：

定理2.1 $f\in T[A)$当且仅当f是f^{-1}-传递的.

定理2.2 $f\in T_q[A)$当且仅当f是$(f^{-1}-f)$-传递的且f^{-1}是$(f-f^{-1})$-传递的.

作为例子，我们来证明定理2.2.

定理2.2的证明 必要性.设$f\in T_q[A)$，要证对$\forall a_1, a_2, a_3\in A$，(i)只要$(a_1, a_3)\in f$和$(a_1, a_2)\in f^{-1}-f$，便有$(a_2, a_3)\in f$和(ii)只要$(a_1, a_3)\in f^{-1}$，$(a_1, a_2)\in f-f^{-1}$，便有$(a_2, a_3)\in f^{-1}$.事实上，(i)因为$(a_1, a_2)\in f^{-1}-f$，所以$(a_2, a_1)\in (f^{-1}-f)^{-1}=f-f^{-1}$.又因为$(a_1, a_3)\in f$，则或者$(a_1, a_3)\notin f^{-1}$，从而$(a_1, a_3)\in f-f^{-1}$，进而$(a_2, a_3)\in (f-f^{-1})^{(2)}$；或者$(a_1, a_3)\in f^{-1}$，从而$(a_1, a_3)\in f\cap f^{-1}$，进而$(a_2, a_3)\in (f-f^{-1})\circ(f\cap f^{-1})$.但因为$f\in T_q[A)$，所以$(f-f^{-1})^{(2)}$，$(f-f^{-1})\circ(f\cap f^{-1})\subset f$，所以$(a_2, a_3)\in f$，即$f$是$(f^{-1}-f)$-传递的.(ii)因为$(a_1, a_3)\in f^{-1}$，所以$(a_3, a_1)\in f$.这时或者$(a_3, a_1)\notin f^{-1}$，从而$(a_3, a_1)\in f-f^{-1}$，结合已知$(a_1, a_2)\in f-f^{-1}$，便有$(a_3, a_2)\in (f-f^{-1})^{(2)}$；或者$(a_3, a_1)\in f^{-1}$，从而$(a_3, a_1)\in f\cap f^{-1}$，结合$(a_1, a_2)\in f-f^{-1}$，便有$(a_3, a_2)\in (f\cap f^{-1})\circ(f-f^{-1})$.但因为$f\in T_q[A)$，所以$(f-f^{-1})^{(2)}$，$(f\cap f^{-1})\circ(f-f^{-1})\subset f$，从而$(a_3, a_2)\in f$，即$(a_2, a_3)\in f^{-1}$，亦即$f^{-1}$是$(f-f^{-1})$-传递的.

充分性 设f是$(f^{-1}-f)$-传递的，f^{-1}是$(f-f^{-1})$-传递的，要证$(f-f^{-1})^{(2)}$，$(f-f^{-1})\circ(f\cap f^{-1})$，$(f\cap f^{-1})\circ(f-f^{-1})\subset f$.(i)设对$a_1, a_2\in A$，$(a_1, a_2)\in (f-f^{-1})^{(2)}$.这时$\exists a_3\in A$，使$(a_1, a_3)$，$(a_3, a_2)\in f-f^{-1}$.所以有$(a_3, a_2)\in f$，$(a_3, a_1)\in (f-f^{-1})^{-1}=f^{-1}-f$.但因为$f$是$(f^{-1}-f)$-传递的，所以$(a_1, a_2)\in f$.由$a_1$，$a_2$的任意性，便有$(f-f^{-1})^{(2)}\subset f$；(ii)设对$a_1, a_2\in A$，$(a_1, a_2)\in (f-f^{-1})\circ(f\cap f^{-1})$.这时便$\exists a_3\in A$，使$(a_1, a_3)\in f-f^{-1}$，$(a_3, a_2)\in f\cap f^{-1}$.所以$(a_3, a_2)\in f$，$(a_3, a_1)\in f^{-1}-f$.但因为$f$是$(f^{-1}-f)$-传递的，所以$(a_1, a_2)\in f$.由$a_1$，$a_2$的任意性，便有$(f-f^{-1})\circ(f\cap f^{-1})\subset f$；(iii)设对$a_1, a_2\in A$，$(a_1, a_2)\in (f\cap f^{-1})\circ(f-f^{-1})$.这时便$\exists a_3\in A$，使$(a_1, a_3)\in f\cap f^{-1}$，$(a_3, a_2)\in f-f^{-1}$，因为$f^{-1}$是$(f-f^{-1})$-传递的，由$(a_3, a_1)\in f^{-1}$和$(a_3, a_2)\in f-f^{-1}$，立得$(a_2, a_1)\in f^{-1}$，即

$(a_1, a_2)\in f$. 由a_1, a_2的任意性，便有$(f\cap f^{-1})\circ(f-f^{-1})\subset f$. 综上(i)(ii)(iii)，便知$f\in T_q[A]$。 证毕。

既然作为序关系最本质的传递性已得到推广，那么只要再对f限以自反性、反对称性、完全性，便自然可以相应推广半半序、半序、全序、拟半序等一系列序概念。这里我们不再一一细加讨论了。

从泛系观看来，g-传递性表现出来的其实不仅仅是一种有序性，更是二元关系f对多元关系g这种限定的广义对称性.我们只要对g的定义方式稍加修正，并对f和g予以特化限定，那么数学中的闭性、凸性、对偶性、拓扑等诸多最基本同时也是最重要的概念就等同于我们的g-传递性了.

先看凸性. 记R^n为n维实向量空间，$A\subset R^n$. 定义$f\subset R^n\times\{A\}$为：对$\forall x\in R^n$，$(x,A)\in f$当且仅当$x\in A$；定义$g\subset(R^n)^3$为：对$\forall x_1, x_2, x_3\in R^n$，$(x_1, x_2, x_3)\in g$当且仅当$\exists\lambda\in[0, 1]$，$(1-\lambda)x_1+\lambda x_2=x_3$.在对$f$和$g$作了这样的特化限定后，我们便有：$A$是凸集的充要条件为$f$是$g$-传递的.

再看闭性. 我们先对g-传递性定义中g的规定予以拓广. 设I是一个非空集合，记$A\uparrow I=\{h|h: I\to A\}$(见[2])，$g\subset A\uparrow I$. 显见当$I=N_n=\{1,2,\cdots,n\}$时，$g$即还原为$n$元关系，当$I$是无穷集时，$g$则为"无穷元"关系. 这样当我们把$g$-传递性定义中$n$元关系$g$用更普适的$g\subset A\uparrow I$取代后（其它表述只要略作修改），就可以得到更宽泛的传递性概念. 现在我们取f的定义同上凸性，再取$I=N\times\{s\}=\{1,2,\cdots,s\}$，定义$g\subset R^n\uparrow I$为：对$\forall x_1, x_2,\cdots, x_0\in R^n$，$(x_1, x_2,\cdots,x_0)\in g$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 我们不难看出，$A$是闭集的充要条件为$f$是$g$-传递的.

类似的处理方式可以用来讨论拓扑. 设S是一非空集合，$\tau\subset P(S)$，S, $\Phi\in\tau$，这里$P(S)$是S的幂集. 定义$f\subset P(S)\times\{\tau\}$为：对$\forall A\in P(S)$，$(A, \tau)\in f$当且仅当$A\in\tau$；定义$g_1\subset(P(S))^3$为：对$\forall A$、$B$、$C\in P(S)$，$(A,B,C)\in g_1$当且仅当$A\cap B=C$；定义$g_2$为：对$\forall A_i(A_i\in I\subset P(S))$，$B\in P(S)$，$(A_i(A_i\in I), B)\in g_2$当且仅当$\bigcup A_i(A_i\in I)=B$.于是我们有：$\tau$是$S$的拓扑的充要条件是$f$是$g_1$-和$g_2$-传递的.

我们最后再来看一个对偶性的例子. 由 Minkowski 和 Farkas 得到并以后者命名的 Farkas 引理[7]揭示了n维实向量空间的对偶本质，是建立线性规划对偶理论的基本定理. Farkas 引理说：设A是一$m\times n$实矩阵，$b\in R^n$，则对$\forall y\in R^n$，$Ay\geqslant 0$，使$b^Ty\geqslant 0$的充要条件是$\exists\rho\in R^m$，$\rho\geqslant 0$，使$A^T\rho=b$. 这引理的充分性实质是一种g-传递性. 我们只要定义$f\subset(R^n)^2$为：对$\forall x,y\in R^n$，$(x,y)\in f$当且仅当$xy\geqslant 0$；定义$g\subset(R^n)^{m+1}$为：对$\forall x_1,x_2,\cdots, x_m, x_{m+1}\in R^n$，$(x_1, x_2,\cdots, x_m, x_{m+1})\in g$当且仅当$\exists\rho\in R^m$，$\rho\geqslant 0$，使$(x_1, x_2,\cdots,x_m)\rho^T=x_{m+1}$. 记$A$的行向量为$a_1$, a_2,$\cdots$, a_m，于是 Farkas 引理的充分性即是说，如果(a_1,y), (a_2,y),$\cdots$, $(a_m, y)\in f$，$(a_1, a_2,\cdots,a_m, b)\in g$，那么必有$(b, y)\in f$. 这正是表明，如上定义的$f$必是$g$-传递的. 循此思路，我们有望在更广的框架上构建对偶理论.

仅上数例已足见g-传递概念在数学中的普适性与一般性.

三、性 质 定 理

本节初步讨论g-传递性的一般性质.

定理3.1 设A, B, n, f如定义所述，g_1, $g_2\subset A^n$，$g_1\subset g_2$，如果f是g_2-传递的，那么

f必是g_1-传递的。

推论 如果$f\in T[A)$，则$f\in T_q[A)$。

证明 因为$f\in T[A)$，由定理2.1，f是f^{-1}-传递的。易验证f^{-1}是f-传递的。但$(f^{-1}-f)\subset f^{-1}$，$(f-f^{-1})\subset f$，由上定理立得f是$(f^{-1}-f)$-传递的和f^{-1}是$(f-f^{-1})$-传递的。由定理2.2便知$f\in T_q[A)$。

定理3.2 设A，B，n，f如定义所述，g_1，$g_2\subset A^n$。如果f是g_1-传递的，也是g_2-传递的，则f必是$(g_1\cup g_2)$-传递的。

定理3.3 设A，B，n，g如定义所述，f_1，$f_2\subset A\times B$。如果f_1和f_2都是g-传递的，则$(f_1\cap f_2)$也是g-传递的。

f和g都是非空集合A上的二元关系时的g-传递性具有特别的重要性，它更具有下面一系列特殊性质：

定理3.4 设f，$g\subset A^2$，则f是g-传递的充要条件是$g^{-1}\circ f\subset f$。

如取$g=f^{-1}$，结合定理2.1则得如下推论：

推论1 $f\in T[A)$的充要条件是$f^2\subset f$。

推论2 $f\in T_q[A)$的充要条件是$[(f-f^{-1}\circ f\cup f\circ(f-f^{-1})]\subset f$。

证明 由本定理，f是$(f^{-1}-f)$-传递的充要条件是$(f^{-1}-f)^{-1}\circ f\subset f$，即$(f-f^{-1})\circ f\subset f$；$f^{-1}$是$(f-f^{-1})$-传递的充要条件是$(f-f^{-1})^{-1}\circ f^{-1}\subset f^{-1}$，但$(f-f^{-1})^{-1}\circ f^{-1}=(f\circ(f-f^{-1}))^{-1}$，又因为对$\forall h_1$、$h_2\subset A^2$，$h_1\subset h_2$当且仅当$h_1^{-1}\subset h_2^{-1}$，所以$(f-f^{-1})^{-1}\circ f^{-1}\subset f^{-1}$等价于$f\circ(f-f^{-1})\subset f$。综上，结合定理2.2便得本推论。

如$f\in S_a[A)$，则$f-f^{-1}=f$，由推论1和推论2立得：

推论3 如$f\in S_a[A)$，则$f\in T[A)$等价于$f\in T_q[A)$。

定理3.5 设f_1，f_2，$g\subset A^2$。如果f_1是g-传递的，则$f_1\circ f_2$也是g-传递的。

推论 设f，$g\subset A^2$。如果f是g-传递的，则对$\forall$正整数n，f^n也是g-传递的。

定理3.6 设f，g_1，$g_2\subset A^2$。如果f是g_1-传递的和g_2-传递的，则f也是$(g_1\circ g_2)$-传递的。

推论 设f，$g\subset A^2$。如果f是g-传递的，则对$\forall$正整数n，f也是$g^{(n}$-传递的。

本节定理的证明都是直接的，我们把它留给读者。

四、讨 论

我们已经看到，g-传递性不但是普通传递性、拟传递性和各色泛序定义的一种形式推广，还是多种数学结构和概念的共同的形式描述。这在一定程度上从一个侧面说明了数学的内在统一性。关于g-传递性还可以开展多方面的工作，例如我们可以对f和g给以各种具体限定，或者我们可以结合某些特定问题进行深入的讨论（如对偶理论等）。这些均有希望得到更为深刻的有价值的结果。

不仅仅如此，由于泛系理论发现广义序关系在一般事物机理分析中的特殊重要性，由于泛序关系是泛系理论体系的一个基本关系，因而对序概念的任意拓展都会有助于一般事物机理分析，有助于对当代科学、技术和文化的不同学科、不同领域的联系与整化，这也有待我们去作进一步的探索。

参 考 文 献

[1] 吴学谋，《遍近转化论与数学中的泛系概念》，湖南科学技术出版社(1984).

[2] 吴学谋，《从泛系观看世界》，中国人民大学出版社(1990).

[3] 吴学谋，《泛系理论与数学方法》，江苏教育出版社(1990).

[4] 吴守志、吴学谋，Generalized fundamental equation in pansystems network analysis, *Kybernetes*, 15(1986).

[5] 吴守志，Fuzzy 传递性的泛系研究，模糊数学，(1)(1984).

[6] 吴守志、陈北方，Quasi-transitivity and the problem of social choice, 科学探索，(2)(1984).

[7] Avriel, M., *Nonlinear Programming——Analysis and Methods*, Prentice-Hall Inc.(1976).

A New Pansystems Research About Binary Relation's Transitivity

Wu Shou-zhi

(Suzhou Institute of Urban Construction and Environmental Protection, Suzhou)

Abstract

Because of the great needs for both the research of pansystems mathematics and the analysis of general things' mechanism, this paper discusses the binary relation's transitivity confined to multirelation. The so-called "*g*-transitivity" ——a completely new concept about transitivity——is introduced and its basic properties are investigated. The study shows that it is not only *g*-transitivity a generalization of traditional transitivity, quasi-transitivity, semi-order, quasi-order and other panorder, but also includes many basic concepts such as closeness, convexity, topology, duality as its special cases.

Key words pansystems theory, relation, panorder, order, transitivity, quasi-transitivity, *g*-transitivity