

# 具有抛物线边界的各向异性体的 二维变形问题

胡元太 赵兴华

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所)  
(1993年11月22日收到)

## 摘 要

文章通过 Lekhnitskii 方法及映射函数法系统地研究了具有抛物线边界的各向异性体的二维变形问题, 并利用所获得的结果研究了一种特殊的结构——半无限裂纹问题, 求得了裂纹尖端的应力奇异场及应力强度因子。

**关键词** Lekhnitskii 方法 特征值 应力强度因子

## 一、引 言

在工程应用中, 经常遇到这样一类问题, 其应力位移场在所有平行于一参考平面 $R$ 的平面内都是一样的, 这样的变形通常称为广义平面问题。对于各向同性材料, 人们通常采用 Airy 应力函数法来分析介质中的应力应变场或研究缺陷周围的应力集中因子<sup>[1,2]</sup>, 但是该方法在研究各向异性平面问题时是异常复杂的。后一类问题的一般解是由 Eshelby 等人<sup>[3]</sup>最先给出, 他们用已获得的结果讨论了由一直线位错作用所激起的位移应力场。后来 A. N. Stroh<sup>[4,5]</sup>将他们的结果拓广到线奇异性的研究之中, 他分析了二维变形的性质并意识到, 通过引入一应力矢量来代替原来的应力张量, 可以将原来关于位移的一个二阶偏微分方程组降阶成关于位移及应力矢量的一阶偏微分方程组, 然后从材料的特征值及特征矢量出发, 构造出介质变形的一般解形式<sup>[5~10]</sup>。而对于某些具有特殊边值问题的平面应力问题, 利用 Stroh 方法求解将是很复杂的, 所以我们宁愿用另一种方法, 即 Lekhnitskii 在 1965 年通过引入应力函数研究各向异性平面问题时所提出的 Lekhnitskii 方法<sup>[10]</sup>, 该方法的特征就在于: 二维介质的应力应变可以由两个应力函数表示, 一旦由给定的边界条件确定了待定函数的形式, 则平面问题的解答也就得到了。Wang 及 Choi<sup>[11]</sup>利用这个方法研究了层状复合材料交界面的热应力问题, 并获得了比较满意的结果。

在本文, 我们利用 Lekhnitskii 方法来研究具有抛物线边界的各向异性体的二维变形问题, 由于用传统方法研究抛物线边值问题是很困难的, 本文就采用了 Lekhnitskii 方法结合映射函数法。首先从给定的边界条件出发, 我们确定了待定函数的形式, 获得其一般解, 接着利用这些获得的结果分析了一种退化结构——半无限裂纹问题, 确定了裂纹尖端的应力奇

异场及应力强度因子.

## 二、基本方程

在一直角坐标系  $x_i (i=1, 2, 3)$  中, 取  $u_i$ ,  $\sigma_{ij}$  及  $\varepsilon_{ij}$  分别表示位移、应力及应变, 其应力一位移方程, 应力应变关系及平衡方程为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijki}u_{k,i} \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.3)$$

其中重复指标表示求和, 逗号表示求偏导,  $C_{ijkl}$  是材料的弹性系数, 假设它是完全对称及正定的.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.4)$$

设  $u_i$  及  $\sigma_{ij}$  不依赖于  $x_3$ , 也不考虑体积力, 引入一应力函数<sup>[10]</sup>  $F(x_1, x_2)$ , 让

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.5)$$

于是方程 (2.3) 是自然满足的. 将 (2.5) 代入 (2.1), (2.2), 将有

$$\begin{aligned} \lambda_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^4} - 2\lambda_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2\lambda_{12} + \lambda_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2\lambda_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x_1 \partial x_2^3} \\ + \lambda_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x_2^4} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中  $\lambda_{ij} (i, j=1, 2, \dots, 6)$  为材料的弹性系数, 它与  $S_{ijkl}$  有关,  $S_{ijkl}$  是  $C_{ijkl}$  的逆, ( $SC = CS = \tau$ ,  $\tau_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ ,  $\delta_{ij}$  是 Kronecker 符号)

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} S_{ij} & \text{平面应力} \\ S_{ij} - S_{i3}S_{3j}/S_{33} & \text{平面应变} \end{cases}$$

$S_{ij}$  是  $S_{ijkl}$  的缩并形式.

设 (2.6) 式具有下列形式的解答

$$F = F(x_1 + \mu x_2)$$

将  $F$  代入 (2.6) 式, 就得到一个特征值方程

$$\lambda_{11}\mu^4 - 2\lambda_{16}\mu^3 + (2\lambda_{12} + \lambda_{66})\mu^2 - 2\lambda_{26}\mu + \lambda_{22} = 0 \quad (2.7)$$

很容易证明<sup>[10]</sup>, 由于  $C_{ijkl}$  的正定性,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  及  $\mu_4$  将共轭成对出现, 不失一般性, 可设  $\mu_3 = \bar{\mu}_1, \mu_4 = \bar{\mu}_2, \text{Im}\mu_i > 0, (i=1, 2)$ ,  $\text{Im}$  表示取虚部, 字母上一横表示取共轭. 为了后面的需要, 我们引入下面算子

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (2.8)$$

于是, 方程 (2.6) 就可以整理成

$$D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \quad (2.9)$$

(2.9) 式的解可以有二种情形<sup>[10]</sup>.

a.  $\mu_1 \neq \mu_2$

$$F = 2\text{Re}\{F_1(z_1) + F_2(z_2)\} \quad (2.10)$$

$$z_1 = x_1 + \mu_1 x_2, \quad z_2 = x_1 + \mu_2 x_2$$

b.  $\mu_1 = \mu_2$

$$F = 2\text{Re}\{F_1(z_1) + z_1 F_2(z_1)\} \quad (2.11)$$

Re表示取实部,  $F_1, F_2$ 分别是其自变量的解析函数.

在工程应用中,一旦 $F$ 的形式被确定,则应力就立刻可以求得,下面我们来研究介质中的应力场

a.  $\mu_1 \neq \mu_2$

取

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(z_1) &= \frac{d}{dz_1} F_1, \quad \phi_2(z_2) = \frac{d}{dz_2} F_2 \\ \phi_1'(z_1) &= \frac{d}{dz_1} \phi_1, \quad \phi_2'(z_2) = \frac{d}{dz_2} \phi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

由(2.10)及(2.5),就有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re}\{\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)\} \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re}\{\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)\} \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re}\{\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)\} \end{aligned} \right\} \quad (2.13a)$$

b.  $\mu_1 = \mu_2$

由(2.5)及(2.11),将有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re}\{\mu_1^2 F_1'' + 2\mu_1 \bar{\mu}_1 F_2' + \mu_1^2 z_1 F_2''\} \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re}\{F_1'' + 2F_2' + z_1 F_2''\} \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re}\{\mu_1 F_1'' + (\mu_1 + \bar{\mu}_1) F_2' + \mu_1 z_1 F_2''\} \end{aligned} \right\} \quad (2.13b)$$

(2.13)式中,  $\phi_1'(z_1)$ 和 $\phi_2'(z_2)$ 或 $F_1''(z_1)$ 和 $F_2'(z_1)$ 可以由与应力函数有关的边界条件确定,见图1.

$$\cos(n, x_1) = \pm \frac{dx_2}{ds}, \quad \cos(n, x_2) = \mp \frac{dx_1}{ds}$$

$s$ 是沿曲线边界上的弧长,  $s$ 增加的方向总使其材料在右边,沿 $\Omega$ 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} \cos(n, x_1) + \sigma_{12} \cos(n, x_2) &= \frac{1}{h} X_n \\ \sigma_{12} \cos(n, x_1) + \sigma_{22} \cos(n, x_2) &= \frac{1}{h} Y_n \end{aligned} \right\} \quad (2.14a)$$

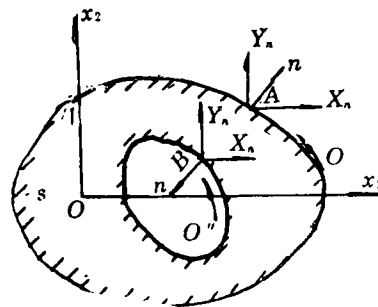


图1 边界曲线

$X_n$ 及 $Y_n$ 是沿边界 $\Omega$ 上所给定的外力,将(2.5)式代入上面方程,可以得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= -\frac{1}{h} \int_0^s Y_n ds + C_1 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= \frac{1}{h} \int_0^s X_n ds + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.14b)$$

式中,  $C_1$ 及 $C_2$ 是任意常数,  $h$ 为板厚度.

### 三、具有抛物线边界 $\Omega$ 的各向异性介质的二维变形问题

考虑一块具有凹的, 抛物线边界的弹性板在边界上受任意分布力作用的弹性平衡. 只要

外力的分布长度远小于板的主要尺寸，则板就可以被视为一具有抛物线边界的无限大平面介质，图2。

取凹边 $\Omega$ 上曲率最小的点为坐标原点， $x_1$ 取为沿曲线方向， $x_2$ 朝外(图2)。在这个坐标系中， $\Omega$ 的方程为

$$x_2 = ax_1^2 \quad (a > 0) \quad (3.1)$$

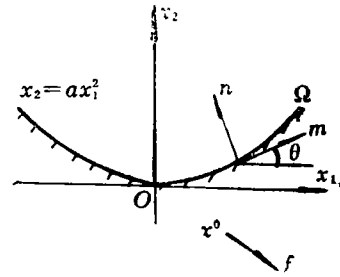


图2 抛物线边界

因为根据 $\mu_1$ 与 $\mu_2$ 的是否相等，应力—应力函数方程(2.13a)和(2.13b)是不相同的，因此其分析方法也将不相同。下面我们来讨论这两种情况。

a.  $\mu_1 \neq \mu_2$

将(2.10)代入(2.14)，就有

$$\left. \begin{aligned} 2\text{Re}\{\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)\} |_{\Omega} &= -\frac{1}{h} \int_0^{\circ} Y_n ds + \alpha_1 \\ 2\text{Re}\{\mu_1\phi_1(z_1) + \mu_2\phi_2(z_2)\} |_{\Omega} &= -\frac{1}{h} \int_0^{\circ} X_n ds + \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 是任意常数。

由(3.2)式能够得到

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\eta_1) &= \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)h} \int_0^{\circ} (X_n + \mu_2 Y_n) ds + \beta_1 \\ \phi_2(\eta_2) &= -\frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)h} \int_0^{\circ} (X_n + \mu_1 Y_n) ds + \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

$\beta_1$ 及 $\beta_2$ 是任意常数， $\eta_1$ 及 $\eta_2$ 表示 $\Omega$ 上与 $z_1$ 及 $z_2$ 相对应的量。应用Cauchy-Goursat定理，就有

$$\left. \begin{aligned} \phi_1'(z_1) &= \frac{1}{4\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \oint_{\Omega} \frac{\int_0^{\circ} (X_n + \mu_2 Y_n) ds}{\eta_1 - z_1} d\eta_1 \\ \phi_2'(z_2) &= -\frac{1}{4\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \oint_{\Omega} \frac{\int_0^{\circ} (X_n + \mu_1 Y_n) ds}{\eta_2 - z_2} d\eta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

由于 $z$ 平面( $z = x_1 + ix_2$ )上的抛物线可以被保角映射成 $\zeta$ 平面上的 $\vartheta$ 轴( $\zeta = \vartheta + i\xi$ )， $\zeta(z) = (\sqrt{1 + 4ia_2z} - 1)/2ia_2$ 。类似地，我们选择两映射函数

$$\zeta_1(z_1) = (\sqrt{1 + 4\mu_1 a z_1} - 1)/2\mu_1 a \quad (3.5)$$

$$\zeta_2(z_2) = (\sqrt{1 + 4\mu_2 a z_2} - 1)/2\mu_2 a \quad (3.6)$$

将 $z_0$ 平面上的边界 $\Omega_0$ ( $\alpha = 1, 2$ )映射成 $\zeta$ 平面上的 $\vartheta$ 轴。由于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} \frac{\int_0^{\circ} (X_n + \mu_2 Y_n) ds}{\eta_1 - z_1} d\eta_1 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Omega} \left[ \frac{1}{d\eta_1} \int_0^{\circ} (X_n + \mu_2 Y_n) ds \right] / (\eta_1 - z_1) d\eta_1 \\ &= \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\mu_1 a z_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n' + \mu_2 Y_n'}{\xi - \xi_1(z_1)} \sqrt{1 + 4a^2 \xi^2} d\xi \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz_2} \oint_{\sigma} \frac{\int_0^s (X_n + \mu_1 Y_n) ds}{\eta_2 - z_2} d\eta_2 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma} \left[ \frac{d}{d\eta_2} \int_0^s (X_n + \mu_1 Y_n) ds \right] / (\eta_2 - z_2) d\eta_2 \\ &= \frac{1}{\pi i} \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_2 z_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'_n + \mu_1 Y'_n}{\xi - \xi_2(z_2)} \sqrt{1+4a^2 \xi^2} d\xi \end{aligned} \quad (3.8)$$

式中,  $X'_n, Y'_n$  为单位长度上作用的外力, 它们是  $x_1$  的函数, 将 (3.7) 式代入到 (3.4), 则有

$$\left. \begin{aligned} \phi'_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_1 z_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'_n + \mu_2 Y'_n}{\xi - \xi_1(z_1)} \sqrt{1+4a^2 \xi^2} d\xi \\ \phi'_2(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_2 z_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'_n + \mu_1 Y'_n}{\xi - \xi_2(z_2)} \sqrt{1+4a^2 \xi^2} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

利用 (3.9), 我们可以求解具有抛物线边界的任意各向异性体在任意分布力作用下的边值问题 ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ), 为了后面的需要, 我们将 (3.9) 式写成另一等价形式

$$\left. \begin{aligned} \phi'_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_1 z_1}} \int_0^{\infty} \frac{X''_n + \mu_2 Y''_n}{\sqrt{\eta} (\sqrt{\eta} - \sqrt{a} \xi_1(z_1))} \sqrt{1+4a\eta} d\eta \\ \phi'_2(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_2 z_2}} \int_0^{\infty} \frac{X''_n + \mu_1 Y''_n}{\sqrt{\eta} (\sqrt{\eta} - \sqrt{a} \xi_2(z_2))} \sqrt{1+4a\eta} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

式中,  $X''_n$  及  $Y''_n$  也为单位长度上所给定的外力, 它们是  $x_2$  的已知函数.

特别是, 当  $a \rightarrow \infty$  时, 抛物线边界将退化成一沿  $x_2$  轴正向切开的半无限裂纹, 方程 (3.10) 成为

$$\left. \begin{aligned} \phi'_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{z_1}} \int_0^{\infty} \frac{X''_n + \mu_2 Y''_n}{\sqrt{\mu_1 \eta} - \sqrt{z_1}} d\eta \\ \phi'_2(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{z_2}} \int_0^{\infty} \frac{X''_n + \mu_1 Y''_n}{\sqrt{\mu_2 \eta} - \sqrt{z_2}} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

这是下面分析裂纹尖端奇异场的基础.

例如, 见图 3, 具有半无限长裂纹的一无限平面介质, 在  $x=(0, b)$  处作用有两集中力  $P$  与  $Q$

$$X_n = P\delta(x_2 - b), \quad Y_n = Q\delta(x_2 - b)$$

将它们代入 (3.11) 式中, 就有

$$\left. \begin{aligned} \phi'_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{z_1}} \frac{P + \mu_2 Q}{\sqrt{\mu_1 b} - \sqrt{z_1}} \\ \phi'_2(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i(\mu_1 - \mu_2)h} \frac{1}{\sqrt{z_2}} \frac{P + \mu_1 Q}{\sqrt{\mu_2 b} - \sqrt{z_2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

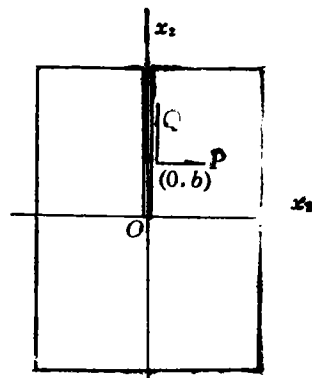


图 3 半无限裂纹

联合 (3.12) 及 (2.13), 就得到介质中的弹性场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{\pi h} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[ \frac{\mu_1^2 (P + \mu_2 Q)}{\sqrt{z_1} (\sqrt{\mu_1 b} - \sqrt{z_1})} - \frac{\mu_2^2 (P + \mu_1 Q)}{\sqrt{z_2} (\sqrt{\mu_2 b} - \sqrt{z_2})} \right] \right\} \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\pi h} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[ \frac{P + \mu_2 Q}{\sqrt{z_1} (\sqrt{\mu_1 b} - \sqrt{z_1})} - \frac{P + \mu_1 Q}{\sqrt{z_2} (\sqrt{\mu_2 b} - \sqrt{z_2})} \right] \right\} \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{\pi h} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[ \frac{\mu_1 (P + \mu_2 Q)}{\sqrt{z_1} (\sqrt{\mu_1 b} - \sqrt{z_1})} - \frac{\mu_2 (P + \mu_1 Q)}{\sqrt{z_2} (\sqrt{\mu_2 b} - \sqrt{z_2})} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

对于复合材料层状板, 由[10], 其弹性系数为

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= 1.2 \times 10^9 \text{N/cm}^2, E_2 = 0.6 \times 10^9 \text{N/cm}^2, G = 0.07 \times 10^9 \text{N/cm}^2 \\ E &= 0.24 \times 10^9 \text{N/cm}^2, \nu_1 = 0.071, \nu_2 = 0.036 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

利用(2.7)式, 我们得到

$$\mu_1 = 4.11i, \mu_2 = 0.343i \quad (3.15)$$

将上面结果代入(3.13), 则介质中的应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{h} \operatorname{Re} \left\{ 1.427 \frac{1}{\sqrt{z_1}} \frac{P + \mu_2 Q}{\sqrt{\mu_1 b} - \sqrt{z_1}} - 0.010 \frac{1}{\sqrt{z_2}} \frac{P + \mu_1 Q}{\sqrt{\mu_2 b} - \sqrt{z_2}} \right\} \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{h} \operatorname{Re} \left\{ 0.084 \frac{1}{\sqrt{z_1}} \frac{P + \mu_2 Q}{\sqrt{\mu_1 b} - \sqrt{z_1}} - 0.081 \frac{1}{\sqrt{z_2}} \frac{P + \mu_1 Q}{\sqrt{\mu_2 b} - \sqrt{z_2}} \right\} \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{h} \operatorname{Re} \left\{ 0.347 \frac{1}{\sqrt{z_1}} \frac{P + \mu_2 Q}{\sqrt{\mu_1 b} - \sqrt{z_1}} - 0.029 \frac{1}{\sqrt{z_2}} \frac{P + \mu_1 Q}{\sqrt{\mu_2 b} - \sqrt{z_2}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

因此, 裂纹尖端的应力场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{h\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{r}} [(1.009a_1 - 0.007a_2)P + (0.333b_1 - 0.029b_2)Q] \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{h\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{r}} [0.060(a_1 - a_2)P + (0.02b_1 - 0.246b_2)Q] \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{h\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{r}} [(0.245a_1 - 0.020a_2)P + 0.084(b_1 - b_2)Q] \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{16.892 + 268.451\cos^2\theta} + 16.892\cos\theta}{16.892 + 268.451\cos^2\theta}} \\ b_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{16.892 + 268.451\cos^2\theta} - 16.892\cos\theta}{16.892 + 268.451\cos^2\theta}} \\ a_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{0.014 + 0.104\sin^2\theta} + 0.118\cos\theta}{0.014 + 0.104\sin^2\theta}} \\ b_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{0.014 + 0.104\sin^2\theta} - 0.118\cos\theta}{0.014 + 0.104\sin^2\theta}} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

特别是, 沿 $x_1=0$ 线( $\theta=0$ )让 $x_2 \rightarrow 0$ , 将有

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \sqrt{-2\pi x_2} \sigma_{11}|_{x_1=0} = 0.795 \frac{P}{h\sqrt{b}} \\ K_{II} &= \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \sqrt{-2\pi x_2} \sigma_{12}|_{x_1=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

另一方面，在(3.16)式中令 $x_1=0$ ，我们就获得了在 $x_2$ 轴( $x_2 < 0$ )上的 $\sigma_{11}$ 及 $\sigma_{12}$ 的分布图(见图4)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{0.318\sqrt{b}}{h} P \frac{1}{\sqrt{-x_2}(b-x_2)} \quad (x_2 < 0) \\ \sigma_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

由图4，很容易发现： $\sigma_{11}$ 在裂纹尖端是奇异的，并且它随着 $x_2 \rightarrow -\infty$ 而迅速衰减，当 $x_2 = -6b$ 之后， $\sigma_{11}$ 几乎为0。

b.  $\mu_1 = \mu_2$  [我们只考虑各向同性介质 ( $\mu_1 = \mu_2 = i$ )]

见图2，介质是各向同性的，由(2.11)，(2.13)及(2.14)，我们有

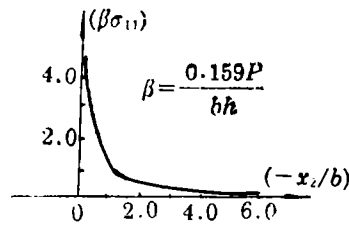


图4  $-x_2$ 轴上的 $\sigma_{11}$ 分布

$$\left. \begin{aligned} 2\text{Re}\{F'_1 + F_2 + zF'_2\} &= -\frac{1}{h} \int_0^s Y_n ds + C_1 \\ 2\text{Re}\{\mu F'_1 + \bar{\mu}_1 F_2 + \mu z F'_2\} &= \frac{1}{h} \int_0^s X_n ds + C_2 \end{aligned} \right\} \text{沿 } \Omega \quad (3.21)$$

式中，沿着 $\Omega$ 有 $z = \eta$  ( $z = x_1 + ix_2$ )， $C_1$ 及 $C_2$ 为任意常数，因此容易得到

$$\left. \begin{aligned} F_2(\eta) &= \frac{1}{2} i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \alpha \\ F'_1(\eta) + \bar{\eta} F'_2(\eta) &= -\frac{1}{2} i \int_0^s (X_n - iY_n) ds + \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$\alpha, \beta$ 为积分常数，利用Cauchy-Goursat积分公式及映射方法，容易得到

$$\left. \begin{aligned} F'_2(z) &= \frac{1}{8\pi h} \frac{1}{\sqrt{1+4iaz}} \int_0^\infty \frac{X'_s + iY'_s}{\sqrt{t}(\sqrt{t} - \sqrt{a}\zeta(z))\sqrt{1+4at}} dt \\ F''_1(z) &= -\frac{1}{4\pi h} \int_{-\infty}^\infty \frac{(X'_s - iY'_s) ds}{\eta - z} d\eta - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\bar{\eta} F'_2(\eta)}{\eta - z} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

(3.23)式就是具有抛物线边界的各向同性边值问题的解。我们可以利用它们分析沿作用任意分布力的弹性变形问题。

下面我们研究一特殊结构——半无限裂纹(图3,  $Q=0$ )。让 $a \rightarrow \infty$ ，(3.23)式的应力函数就成为

$$\left. \begin{aligned} F'_2(z) &= \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{iz}} \frac{P}{h\sqrt{b}} \\ F''_1(z) &= \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\sqrt{iz}} \frac{P}{h\sqrt{b}} \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

将(3.24)式代入(2.13)式，则裂纹尖端的应力奇异场为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{P}{2\pi h\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2\pi h\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{2\pi h\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

因此裂纹尖端的应力强度因子为

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{2\pi b} h}, \quad K_{II} = 0 \quad (3.26)$$

这与应力强度因子手册<sup>[12]</sup>上的结果一致。

#### 四、结 论

文章利用Lekhnitskii方法,解决了具有抛物线边界的各向同性或各向异性弹性介质的二维变形问题,主要分析了一种特殊结构——半无限裂纹问题,获得了裂纹尖端的应力奇异场及应力强度因子。

#### 参 考 文 献

- [1] 钱伟长、叶开沅,《弹性力学》,科学出版社(1980).
- [2] 徐芝纶,《弹性力学》,科学出版社(1985).
- [3] Eshelby, J. D., W.T. Read and W. Shockley, Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metal.*, 1 (1953), 251—259.
- [4] Stroh, A.N., Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Phil. Mag.*, 3 (1985), 625—646.
- [5] Stroh, A.N., Steady-state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. Phys.*, 41 (1962), 77—103.
- [6] Barnett, D.M. and J. Lothe, An image force theorem for dislocations in anisotropic bicrystals, *J. Phys., F.*, 4 (1974), 1618—1635.
- [7] Barnett, D.M., J. Lothe, K. Nishioka and R. J. Asaro, Elastic surface waves in anisotropic crystals: a simplified method for calculating Rayleigh velocities using dislocation theory, *J. Phys., F.*, 3 (1973), 1083—1096.
- [8] Lothe, J. and D. M. Barnett, On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface, *J. Appl. Phys.*, 47 (1976), 428—433.
- [9] Asaro, R. J., J. P. Hirth, D. M. Barnett and J. Lothe, The elastic energy of a straight dislocation in an infinite anisotropic elastic medium, *Phys. Stat. Sol., B.*, 60 (1973), 261—271.
- [10] Lekhnitskii, S. G., *Theory of Elasticity of Anisotropic Body*, MIR, Moscow (1981).
- [11] Wang, S. S. and I. Choi, Boundary layer thermal stress in angle-ply composite laminates, *Modern Developments in Composite Materials and Structures*, ASME, Edited by J.R. Virstor (1979), 315—341.



- [12] Sih, G. C. and H. Liebowitz, Mathematical theory of Brittle fracture, in *An Advanced Treatise on Fracture*, Ed. H. Liebowitz, Academic Press (1968), 67—190.

## Two-Dimensional Deformation of an Anisotropic Elastic Body with a Parabolic Boundary

Hu Yuan-tai    Zhao Xing-hua

(*Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

### Abstract

In the present paper, two-dimensional deformation problems of an anisotropic body with a parabolic boundary are systematically analysed by using Lekhnitskii's formalism and the mapping functions method, then a special structure—the half-infinite crack problem is studied through the obtained results, the singular fields and the stress intensity factors near the crack tip are also obtained.

**Key words:** Lekhnitskii method, eigenvalue, stress intensity factor