应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Navier-Stokes方程稳定性研究(Ⅱ)*

施惟慧　方晓佐

（上海大学，1993年12月11日收到）

摘　要

本文对Navier-Stokes方程与热传导方程的性质进行了比较。

法国数学家、偏微分方程权威 J. Leray教授在其对 Navier-Stokes 方程的研究中，曾由热传导方程出发而求得Navier-Stokes方程某种初（边）值问题的适定性结果[2]。巴黎十一大学的R. Temam 等专家、教授也曾多次提出过将两类方程类比的疑问。本文试将其中根本不同点做了叙述和例证。

关键词　Navier-Stokes 方程　解空间　Janet 数

一、回顾：热传导方程两类 Cauchy 问题的关系

$R^n\times R_+$中，最简单的抛物型方程，即所谓的热传导方程如下：

$$\partial U/\partial t-a^2\Delta U=f(x,t)$$

这里，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，$(x,t)\in R^n\times R_+$. $a\in R$，常数，

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}$$

通常，这一方程的初值问题有以下两种：

1° 在超平面$\{t=0\}$上的Cauchy问题，即

(1)′ $\partial U/\partial t-a^2\Delta U=f(x,t)$，$U(x,t)|_{t=0}=\varphi(x)$

这一问题的解由下式给出：

$$U(x,t)=\int_{R^n}\varphi(\xi)\bar{U}(x-\xi,t)d\xi+\int_0^t\int_{R^n}f(\xi,\tau)\bar{U}(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau \qquad (1.1)$$

其中，

$$\bar{U}(x,t)=\frac{1}{(2a)^n(\pi t)^{n/2}}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right]$$

并已证明，如果φ连续有界，那末这个解在有界函数类中是唯一的，且具有对初始条件的连续依赖性，不仅如此，对$R^n\times R_+$中的任一开集O，$U(x,t)\in C^\infty(O)$，而$U(x,t)$在$O\cap\{t=t_0\}$中解析。

* 钱伟长推荐。

其次，如果将$\varphi(x)$的连续有界性减弱为$\varphi(x)\in M_\sigma(T)$ $(0<\sigma\leqslant 2)$[注]时，上述结论仍然成立。而$\sigma>2$时，吉洪诺夫曾给出过例子，证明其解的唯一性不再成立[2]。因而$M_2(T)$是使问题(1)′保持唯一解的最大函数集合。

另外，超平面$\{t=0\}\subset R^{n+1}$是热传导方程的特征面。综上所述，古典理论给出了热传导方程在特征面$\{t=0\}$上的Cauchy问题(1)′解析解（关于x）的存在、唯一和稳定性的证明，而以(1.1)准确地给出了这个解的表达式。

为了便于说明问题（但并不失去一般性），以下我们仅取$n=1$，并假设$a=1, f(x,t)=0$这时问题(1)′成为：

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0 \\ U(x,t)\,|_{t=0}=\varphi(x) \qquad (x,t)\in R\times R_+ \end{cases}$$

而(1.1)成为：

$$U(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right]d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g(\xi,x,t)d\xi \tag{1.2}$$

其中

$$g(\xi,x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right] \tag{1.3}$$

2°　$\{x=0\}$上的Cauchy问题

即

$$(2)\quad \frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0,\ U(x,t)\,|_{x=0}=\psi(t),\quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\omega(t)$$

我们假设$\psi(t)\in C^\infty$. $\omega(t)\in C^\infty$。那么根据Cauchy-Kowalevska定理，收敛级数(1.4)是(2)的唯一、稳定的解析解[6]：

$$u(x,\ t)=\psi(t)+x\omega(t)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\theta_n(t) \tag{1.4}$$

此处$\theta_n(t)$由以后关系决定：

$$\theta_2(t)=\psi'(t),\ \theta_3(t)=\omega'(t),\ \theta_{n+2}(t)=\theta_n'(t)\qquad (n\geqslant 2) \tag{1.5}$$

3°　两类Cauchy问题的关系

如(1°)中所述，(1.2)所确定的问题(1)的解$U(x,t)\in C^\infty(R\times R_+)$，并且对任何$t_0>0$，$U(x,t_0)$是$R$上的解析函数，于是我们可做如下的运算：

$$U(x,t)\,|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g(\xi,0,t)d\xi \tag{1.6}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g_x'(\xi,0,t)d\xi \tag{1.7}$$

将它们分别记为$\psi(t)$和$\omega(t)$。由于$\psi(t)\in C^\infty$，$\omega(t)\in C^\infty$，因而有：

$$\psi^{(k)}(t)=\left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g_{t^k}^{(k)}(\xi,0,t)d\xi \tag{1.8}$$

[注]　$M_\sigma(T)=\{U(x,t),\ 0\leqslant t\leqslant T\,|\,\exists A_U>0,\ k_U>0\}$,
$|U(x,t)|\leqslant A_U\cdot\exp(k_U|x|^\sigma)\qquad (\sigma\geqslant 0)$

$$\omega^{(k)}(t)=\left.\frac{\partial^{k+1}U}{\partial x\partial t^k}\right|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g_{xt^k}^{(k+1)}(\xi,0,t)d\xi \tag{1.9}$$

和
$$\left.\frac{\partial^k U}{\partial x^k}\right|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g_{x^k}^{(k)}(\xi,0,t)d\xi \tag{1.10}$$

由于(1.2)是问题(1)的解，于是我们又有以下的等式：

$$\left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\partial^{2k}U}{\partial x^{2k}}\right|_{x=x_0}\qquad(\forall x_0\in R) \tag{1.11}$$

和
$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0}\right)=\left.\frac{\partial^{2k+1}U}{\partial x^{2k+1}}\right|_{=x}\qquad(\forall x_0\in R) \tag{1.12}$$

特别对$x_0=0$，就有：

$$\psi^{(k)}(t)=\left.\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{2k}U}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g_{x^{2k}}^{(2k)}(\xi,0,t)d\xi \tag{1.13}$$

和
$$\omega^{(k)}(t)=\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{=\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g_{x^{2k+1}}^{(2k+1)}(\xi,0,t)d\xi \tag{1.14}$$

当然有$\psi^{(k)}(t)\in C^\infty$，$\omega^{(k)}(t)\in C^\infty$.

现考虑如下的Cauchy问题：

(2)′ $\dfrac{\partial U}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0$，$U(x,t)|_{x=0}=\psi(t)$，$\left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\omega(t)$

其中，$\psi(t)$及$\omega(t)$由(1.6)和(1.7)给出，而其K阶导函数由(1.8)，(1.9)给出.

很明显由$\psi(t)$及$\omega(t)$出发，做出的级数

$$\psi(t)+x\omega(t)+\frac{x^2}{2!}\psi'(t)+\frac{x^3}{3!}\omega'(t)+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}\psi^{(k)}(t)+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\omega^{(k)}(t)+\cdots \tag{1.15}$$

是问题(2)′的形式解，并可改写为：

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(\xi,0,t)d\xi \tag{1.16}$$

其中

$$G(\xi,0,t)=g(\xi,0,t)+xg'_x(\xi,0,t)+\frac{x^2}{2!}g''_{x^2}(\xi,0,t)+\cdots$$
$$+\frac{x^k}{k!}g_{x^k}^{(k)}(\xi,0,t)+\cdots \tag{1.17}$$

由于$g(\xi,x,t)=(1/\sqrt{t})\exp[-(x-\xi)^2/4t]$关于$x\in R$解析，因而我们有它在$x=0$的Taylor展开：

$$g(\xi,x,t)=g(\xi,0,t)+xg'_x(\xi,0,t)+(x^2/2!)g''_{x^2}(\xi,0,t)+\cdots$$
$$+(x^k/k!)g_{x^k}^{k}(\xi,0,t)+\cdots \tag{1.18}$$

因而$G(\xi,x,t)=g(\xi,x,t)$.

于是级数(1.15)收敛，并且和函数就是：

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g(\xi,x,t)d\xi$$

由以上分析可知，问题(2)′的解(1.15)关于$x\in R$解析，关于t无穷可微($t\in R_+$)并且有如下的极限成立：

$$\varphi(x)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)g(\xi,x,t)d\xi\right]$$

因而我们又回到了问题(1)的解(1.2)。

以上是热传导方程的解所独具的特性，以后我们会看到，对Navier-Stokes方程而言，这种性质是不存在的。

二、Navier-Stokes方程的初值问题

研究Navier-Stokes方程如下的初值问题

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\boldsymbol{V}+\boldsymbol{F}(x,t)\\ \operatorname{div}\boldsymbol{V}=0\\ \boldsymbol{V}|_{t=0}=\boldsymbol{\lambda}(x)\end{cases}$$

其中$(x,t)=(x_1,x_2,x_3,t)\in R^3\times R$是点的位置坐标，$\boldsymbol{V}(x,t)=(v_1(x,t),\ v_2(x,t),\ v_3(x,t))$是速度矢量，$p(x,t)$是压力，$\rho>0$是密度，$\nu>0$是动粘性系数(coefficient de cinématique)，ρ与ν被假定为已知常数，$\boldsymbol{F}(x,t)$是外力[1]。在以后的例子中，我们假定给定的外力$\boldsymbol{F}(x,t)=(t^2,0,x_1x_2)$，$\boldsymbol{\lambda}(x)=(0,0,0)$。这时的问题(3)记为(3)′。

现考虑两组定义在$R^3\times R$上的函数，$U^{(1)}$，$U^{(2)}$：

$$U^{(1)}\quad\begin{cases}v_1^{(1)}=t^3/3,\quad v_2^{(1)}=0,\quad v_3^{(1)}=x_1x_2t-x_2t^5/15\\ p^{(1)}=p_0+t+t^2/2+t^3/6\end{cases}$$

$$U^{(2)}\quad\begin{cases}v_1^{(2)}=t^3/3,\quad v_2^{(2)}=(-\nu^2/6\rho)t^3\\ v_3^{(2)}=x_1x_2t-\dfrac{\nu^2}{6\rho}t^3+\dfrac{t^5}{120}\left(\dfrac{4\nu^2}{\rho}x_1-8x_2\right)-\dfrac{\nu^2}{405\rho}t^9\\ p^{(2)}=p_0+t+(\nu^2t^2/2)(x_2+x_3)\end{cases}$$

简单的计算可验证，它们都是问题(3)′的解（其中$p_0\in R$，常数），并且$U^{(1)}-U^{(2)}\neq 0$。然后取$U^{(1)}|_{x_1=0}$，$U^{(2)}|_{x_1=0}$，则有：

$$\Phi:\quad\begin{cases}\varphi_1(x_2,x_3,t)=v_1^{(1)}|_{x_1=0}=t^3/3\\ \varphi_2(x_2,x_3,t)=v_2^{(1)}|_{x_1=0}=0\\ \varphi_3(x_2,x_3,t)=v_3^{(1)}|_{x_1=0}=-x_2t^5/15\\ \varphi_4(x_2,x_3,t)=p^{(1)}|_{x_1=0}=p_0+t+t^2/2+t^3/6\end{cases}$$

和

$$\Psi:\quad\begin{cases}\psi_1(x_2,x_3,t)=v_1^{(2)}|_{x_1=0}=t^3/3\\ \psi_2(x_2,x_3,t)=v_2^{(2)}|_{x_1=0}=-\nu^2t^3/6\rho\\ \psi_3(x_2,x_3,t)=v_3^{(2)}|_{x_1=0}=-\nu^2t^3/6\rho-x_2t^5/15-\nu^2t^9/405\rho\\ \psi_4(x_2,x_3,t)=p^{(2)}|_{x_1=0}=p_0+t+(\nu^2t^2/2)(x_2+x_3)\end{cases}$$

显然，如果考虑Navier-Stokes方程在$x_1=0$上的初值问题，而其定解条件分别由$U^{(1)}$和$U^{(2)}$定出（保留φ_4，ψ_4或去掉φ_4，ψ_4，并不影响其解的适定性），那么最后所得的解的性质（如果解存在的话！）也决不可能相同，但所有以上出现的函数都属于M_2。

事实上，当我们以Janet数[4]来标志一个偏微分方程组D的解空间特性时，热传导方程的Janet数是1，而Navier-Stokes方程的 Janet 数是0，也就是说，这两类偏微分方程的

解空间构造有本质的区别[5].

参 考 文 献

[1] Laudau, L. and E. Lifchitz, *Mècanique des Fluid*, Edition Tome 6, Mir Mouscou (1971).

[2] Leray, J., Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *Journal Mathematique* (1934).

[3] Mikhailov, V., *Equations aux Derivees Partielles*, Edition Mir Mouscou (1980), 345—346.

[4] Shih, W. S., Un invariant numerique associe a un systeme d'equations aux derivees partielles, *C. R., Acad Sc Paris*, Serie I, 304(17) (1987).

[5] Shih, W. H., Solutions analytiques de quelques equations aux derivees partielles en mecanique des fluides, travaux en cours, 42, Hermann, Paris (1992).

[6] Valiron, G., *Equations Fonctionnelles, Applications*, Hermann (1992), 587—589.

Stability of Navier-Stokes Equation (Ⅱ)

Shi Wei-hui Fang Xiao-zuo

(Shanghai University, Shanghai)

Abstract

In this paper, we make some comparisons between the solutions for Navier-Stokes equation and those for heat conduction equation.

In his study of Navier-Stokes equation, Professor J. Leray, a French mathematician and authority on partial differential equation, starting from heat conduction equation, obtained some results of properly posed of certain initial boundary value problems of Navier-Stokes equation. Professor R. Temam of University de Paris XI and other experts in this field also brought up the possibility of comparing these two classes of equations. This paper attempts to describe and prove the fundamental difference between these two.

Key words Navier-Stokes equation, solution space, Janet number