

# 洞室岩爆的尖角型突变模型\*

潘一山 章梦涛 李国臻

(阜新矿业学院科研所, 1991年1月18日收到)

## 摘 要

本文采用了突变理论中的尖角型突变模型, 研究了圆形洞室岩爆发生的物理过程。不仅更加深刻认识了洞室岩爆的失稳本质, 而且得到了在岩爆工程治理中有价值的临界洞室塑性区深度, 还给出了岩爆发生后洞室周边的突跳收敛和所释放出来的能量。同时, 探讨了各种岩石力学参数对岩爆发生的影响。

**关键词** 岩爆 光点突变模型 临界软化区深度 位移突跳 能量释放

## 一、前 言

岩爆是人工采矿活动引起的破坏性的地震, 在煤矿的采场工作面、巷道, 铁路隧道及水工洞室都会发生。岩爆表现为大范围岩体突然破坏, 抛向洞室空间, 围岩释放大量能量, 使几米到几百米的洞室瞬间破坏, 并造成人员伤亡。

目前已认识到, 岩爆是岩体结构的失稳现象。它与一般结构由于构件几何特征造成的失稳本质上是一致的, 只不过它不是控制因素变化, 而是在变形过程中岩石材料力学性质变化, 即系统内部自身因素变化而造成的跃变, 因而是一种突变现象。突变理论是用来研究各种突变现象的, 本文在以前工作基础上, 应用突变理论对洞室岩爆作进一步的研究。

在突变理论中, 对于尖角型突变模型, 势函数的标准形式为:

$$\Pi(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}px^2 + qx \quad (1.1)$$

其中 $x$ 称为状态变量,  $p, q$ 为控制变量。令势函数 $\Pi(x)$ 一阶导数为零, 即为系统平衡方程:

$$\Pi'(x) = x^3 + px + q = 0 \quad (1.2)$$

绘成图1(b)所示, 这是一个具有光滑折痕的曲面, 其上一点代表所研究系统的一种平衡状态。

对势函数求二阶导数有,

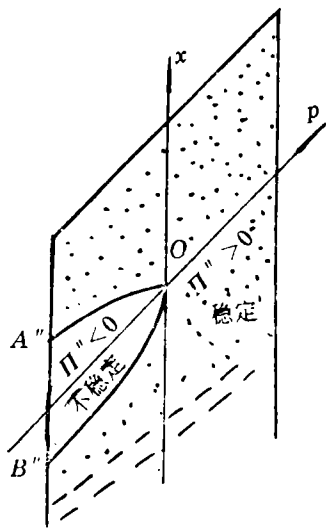
$$\Pi''(x) = 3x^2 + p$$

在图1(b)曲面上叶和下叶上, 满足 $\Pi''(x) > 0$ , 即系统势能取极小值, 则平衡状态是稳定的; 在曲面的中叶上, 满足 $\Pi''(x) < 0$ , 即系统势能取极大值, 则平衡状态是非稳定的。在曲

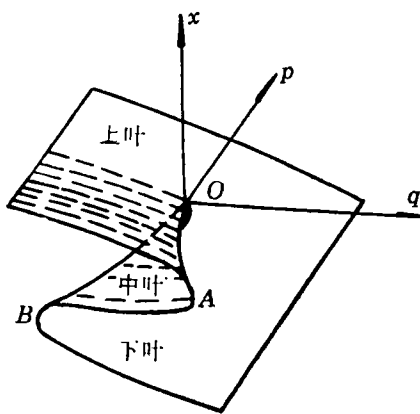
\* 朱兆祥推荐。  
煤炭科学基金资助项目

面上叶和下叶与中叶的交界即光滑折痕OA, OB上满足:

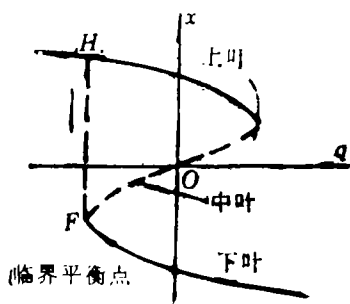
$$\Pi''(x) = 3x^2 + p = 0 \quad (1.3)$$



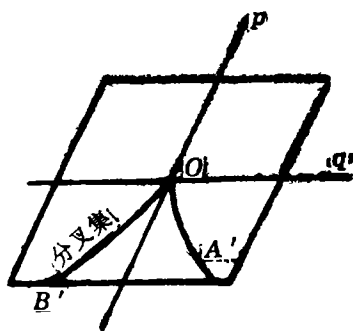
(a) 平衡曲面在x-p平面投影



(b) 平衡曲面



(c) 平衡状态的突跳



(d) 平衡曲面在p-q平面投影

图 1

为临界稳定平衡状态, 其上p, q满足:

$$4p^3 + 27q^2 = 0 \quad (1.4)$$

称为分叉集, 如图1(d)所示.

当力学系统处于下叶时, 平衡是稳定的, 随着外界的进一步作用, 当系统平衡点移到折痕上时, 则达到临界平衡状态. 在微小扰动下由折痕移到中叶上, 而中叶是非稳定状态, 是无法存在的, 必然跳到对应的稳定平衡的上叶, 这就产生了力学系统的失稳, 如图1(c).

## 二、圆形洞室岩爆的一个力学模型

考虑处于地下某一深度的圆形洞室, 半径为 $r_0$ , 无限远处受静水压力 $P$ , 洞室无支护, 周边附近由于应力集中已进入塑性软化, 深度为 $\rho$ , 如图2所示.

如图3所示, 岩石的本构关系为:

弹性阶段:

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}, \quad \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = E, \quad \varepsilon < \varepsilon_c \quad (2.1)$$

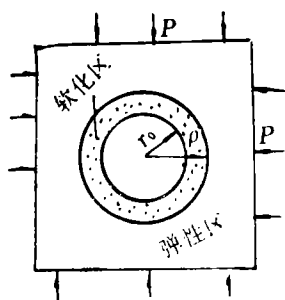


图2 洞室岩爆模型

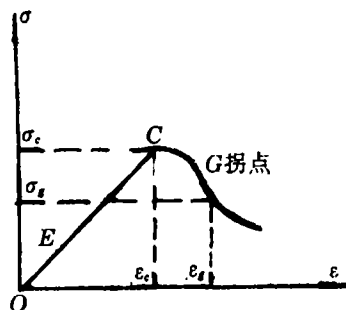


图3 岩石本构关系

软化阶段:

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = A \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^3 - 1 \right] + B \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 - 1 \right] + 1, \quad \varepsilon > \varepsilon_c \quad (2.2)$$

其中:

$$A = \frac{1-n}{(m-1)(2m^2-2m+1)} \geq 0, \quad B = -3Am \leq 0 \quad (2.3)$$

$$m = \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_c} > 1, \quad n = \frac{\sigma_g}{\sigma_c} < 1 \quad (2.4)$$

$\sigma_c, \varepsilon_c$  分别是峰值应力及对应的应变,  $E$  是弹性模量,  $\sigma_g, \varepsilon_g$  是峰值后曲线拐点处应力及对应的应变。上面三次函数表达式表示了实际岩石峰值后期应力随变形下降的速度变化过程。即在刚超过峰值附近, 应力随变形下降的速度是不断增加的, 曲线是凸的, 之后在拐点  $G$  达到极大值。随后应力随变形下降速度不断减小, 曲线是凹的。这样一个过程用上面的关系式表示出来了。

在拐点  $G$ , 曲线斜率, 即应力随变形下降的速度达到极大值。我们称这个斜率值的绝对值为岩石降模量, 则拐点  $G$  降模量的值可求出为:

$$\lambda = 3AEm^2 \quad (2.5)$$

考虑平面应变问题, 则洞室围岩体处于三向压应力状态。为了把上面单轴得到的本构关系推广到受三向应力的洞室周围岩体, 假设洞室软化区岩体应力强度  $\sigma_i$  和应变强度  $\varepsilon_i$  服从 (2.1)、(2.2) 式的关系, 即:

弹性阶段:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_c} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}, \quad \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} = E, \quad \varepsilon_i < \varepsilon_c \quad (2.6)$$

软化阶段:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_c} = A \left[ \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c} \right)^2 - 1 \right] + B \left[ \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c} \right)^2 - 1 \right] + 1, \quad \varepsilon_i > \varepsilon_c \quad (2.7)$$

### 三、用尖角型突变模型研究岩爆发生过程

对应于突变理论的概念, 选取洞室周边径向位移  $u_0$  作为状态变量。如图 2 所示, 规定压应力、压应变和收敛位移为正。平面应变情况下  $\varepsilon_z = 0$ 。在软化区内, 假设体积不可压缩,

则:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \quad (3.1)$$

由几何方程:

$$\varepsilon_r = du/dr, \quad \varepsilon_\theta = u/r \quad (3.2)$$

其中 $u$ 为径向位移, 代入(3.1)式解方程并利用前面所设, 即在 $r=r_0$ 时,  $u=u_0$ , 得:

$$u = u_0 r_0 / r \quad (3.3)$$

代入(3.2)式得:

$$\varepsilon_r = -\frac{u_0 r_0}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_0 r_0}{r^2} \quad (3.4)$$

则软化区内岩石应变强度 $\varepsilon_i$ 为:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{9} [(\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2]} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u_0 r_0}{r^2} \quad (3.5)$$

∴ 软化区内

$$\varepsilon_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_i, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_i \quad (3.6)$$

由体积不可压缩,  $\mu = 1/2$ ,  $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ , 则软化区应力强度

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (3.7)$$

∴ 软化区内:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i \quad (3.8)$$

可以证明, 洞室弹性区内由于开挖引起的径向位移和软化区径向位移有相同的表达式, 即在弹性区内:

$$u = u_0 r_0 / r \quad (3.9)$$

∴ 弹性区内应变:

$$\varepsilon_r = -\frac{u_0 r_0}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{u_0 r_0}{r^2} \quad (3.10)$$

弹性区内应力 $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ 由虎克定律给出:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{E}{1+\mu} (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) = \frac{2E}{1+\mu} \frac{u_0 r_0}{r^2} \quad (3.11)$$

其中 $\mu$ 为泊松比。

下面来计算洞室围岩的势能函数 $\Pi$ , 势能由应变能和外力功两部分组成。外载荷 $P$ 在无限远处, 由洞室开挖引起的位移在无限远处为零, 所以做的功为 $W=0$ 。应变能由弹性区的应变能和软化区应变能两部分组成, 即总势能 $\Pi$ 为:

$$\Pi = \Pi^e + \Pi^s \quad (3.12)$$

弹性区的变形能

$$\Pi^e = \int_0^{2\pi} \int_\rho^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \sigma_r \varepsilon_r + \frac{1}{2} \sigma_\theta \varepsilon_\theta \right) r dr d\theta$$

将(3.10)、(3.11)式代入:

$$\Pi^e = \frac{\pi E}{1+\mu} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^2 u_0^2 \quad (3.13)$$

为计算软化区变形能 $\Pi^s$ , 先计算软化区内单位体积应变能 $W$ ,

$$W = \int_0^{\varepsilon_c} \sigma_i d\varepsilon_i$$

把(3.5)、(3.7)式代入并利用(2.6)、(2.7)得:

$$W = \sigma_c \varepsilon_c \left\{ \frac{A}{4} \left( \frac{2u_0 r_0}{\sqrt{3} \varepsilon_c} \right)^4 \frac{1}{r^8} + \frac{B}{3} \left( \frac{2u_0 r_0}{\sqrt{3} \varepsilon_c} \right)^3 \frac{1}{r^6} + (1-A-B) \left( \frac{2u_0 r_0}{\sqrt{3} \varepsilon_c} \right) \frac{1}{r^2} \right\} + e$$

其中: 
$$e = \frac{1}{2} E \varepsilon_c^2 - \sigma_c \varepsilon_c \left[ 1 + \frac{3}{4} A + \frac{2}{3} B \right]$$

$$\begin{aligned} \therefore \Pi^e &= \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\rho} W r dr d\theta \\ &= A_1 u_0^4 + B_1 u_0^3 + C_1 u_0 + \frac{1}{2} e (\rho^2 - r_0^2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中: 
$$A_1 = \frac{4}{27} \pi \sigma_c \varepsilon_c^{-3} r_0^4 \left( \frac{1}{r_0^6} - \frac{1}{\rho^6} \right) A \quad (3.15)$$

$$B_1 = \frac{4}{9\sqrt{3}} \pi \sigma_c \varepsilon_c^{-2} r_0^3 \left( \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{\rho^4} \right) B \quad (3.16)$$

$$C_1 = \frac{4\pi \sigma_c (1-A-B)}{\sqrt{3}} r_0 \ln \frac{\rho}{r_0} \quad (3.17)$$

将(3.13)、(3.14)代入(3.12)得总势能:

$$\Pi(u_0) = A_1 u_0^4 + B_1 u_0^3 + \frac{\pi E}{1+\mu} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^2 u_0^2 + C_1 u_0 + \frac{1}{2} e (\rho^2 - r_0^2)$$

令: 
$$\Pi'(u_0) = 4A_1 u_0^3 + 3B_1 u_0^2 + \frac{2\pi E}{1+\mu} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^2 u_0 + C_1 = 0 \quad (3.18)$$

上式即为洞室平衡状态方程, 为便于讨论, 应把上式写成标准形式(1.2)式. 这样需要把上式中 $u_0$ 平方项消去, 为此可把上式在 $\Pi'(u_0)$ 的二阶导数即 $\Pi''(u_0) = 0$ 处, 进行级数展开. 首先求出使 $\Pi''(u_0)$ 为零的 $u_0$ 值. 由:

$$\Pi''(u_0) = 12A_1 u_0^2 + 6B_1 u_0 + \frac{2\pi E}{1+\mu} \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^2$$

$$\Pi'''(u_0) = 24A_1 u_0 + 6B_1 = 0$$

即当 
$$u_0 = u_g = -\frac{6B_1}{24A_1} = -\frac{B_1}{4A_1} \quad (3.19)$$

时,  $\Pi'''(u_0) = 0$ , 把(3.16)、(3.15)及(2.3)代入得:

$$u_g = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{\xi^2 + \xi}{\xi^2 + \xi + 1} m \varepsilon_c r_0 \quad (3.20)$$

其中: 
$$\xi = \rho^2 / r_0^2 \quad (3.21)$$

在突变理论中,  $u_0 = u_g$ 的点称为尖点.

根据在一维情况下刚度的物理意义, 定义刚度

$$k = d\Pi^e / du_0^2$$

则弹性区的刚度:

$$k_e = \frac{d^2 \Pi^e}{du_0^2} = \frac{2\pi E}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\xi} \quad (3.22)$$

上式可见, 弹性区刚度大于零, 弹性模量 $E$ 越大, 刚度 $k_e$ 越大, 软化区 $\rho$ 越大, 刚度 $k_e$ 越小, 软化区刚度

$$k_s = \frac{d^2 \Pi^*}{du_0^2} = 12A_1 u_0^2 + 6B_1 u_0 \quad (3.23)$$

所以软化区刚度 $k_s$ 和洞室周边径向位移 $u_0$ 有关, 当 $u_0 = u_g$ 时, 软化区刚度

$$k_s^g = 12A_1 u_g^2 + 6B_1 u_g$$

将(3.15)、(3.16)、(3.19)、(3.20)式代入得:

$$k_s^g = -\pi \frac{(\xi-1)(\xi+1)^2}{\xi(\xi^2+\xi+1)} \lambda \quad (3.24)$$

由上式可见, 软化区刚度 $k_s^g$ 为负值, 除了软化区深度 $\rho$ 外, 它决定于降模量的绝对值 $\lambda$ .

把平衡方程(3.18)在 $u_0 = u_g$ 处展开, 并将(3.15)、(3.16)、(3.22)、(3.23)代入整理得标准形式:

$$x^3 + px + q = 0$$

其中:

$$x = \frac{u_0 - u_g}{u_g} \quad (3.25)$$

$$p = 3(K-1) \quad (3.26)$$

$$q = -2 + 3K + 3\eta \quad (3.27)$$

$$K = \frac{k_s}{|k_s^g|} = -\frac{k_s}{k_s^g} = \frac{2}{1+\mu} \cdot \frac{E}{\lambda} \frac{2+\xi+1}{(\xi-1)(\xi+1)^2} \quad (3.28)$$

$$\eta = \frac{8}{9} \frac{E}{m\lambda} (1-A-B) \frac{(\xi^2+\xi+1)}{(\xi-1)(\xi+1)^2} \ln \xi \quad (3.29)$$

这里 $K$ 是弹性区刚度和软化区刚度绝对值之比称为刚度比.

由图1(a)可见, 只有 $p \leq 0$ 时, 洞室的平衡状态才可能成为非稳定平衡状态, 才有可能发生岩爆, 由 $p \leq 0$ 代入(3.26)中有:

$$K = \frac{2}{1+\mu} \cdot \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{\xi^2+\xi+1}{(\xi-1)(\xi+1)^2} \leq 1 \quad (3.30)$$

即刚度比 $K < 1$ 时才有可能发生岩爆.  $K$ 一方面取决于岩石常数 $\mu, E/\lambda$ , 另一方面取决于 $\xi = \rho^2/r_0^2$ . 由图4可见, 只有塑性区深度 $\rho$ 大到一定程度或者说外界载荷 $P$ 达到一定值时, 刚度比 $K$ 才小于1, 才可能发生岩爆.

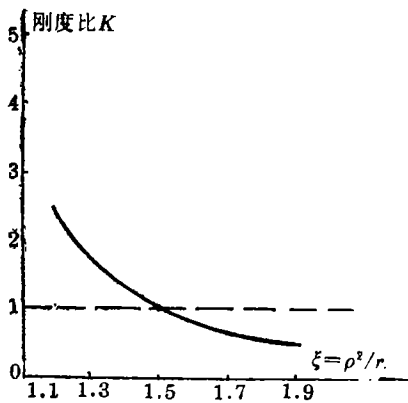


图4 刚度比 $K$ 与 $\xi$ 关系图

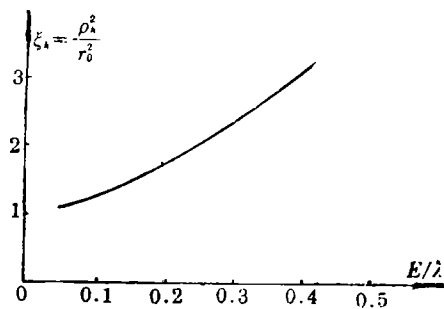


图5 临界软化区深度 $\rho_c$ 和 $E/\lambda$ 关系

当洞室作用载荷 $P$ 较小时, 洞室周边径向位移 $u_0$ 较小,  $u_0 < u_g$ ,  $x = (u_0 - u_g)/u_g$ ,  $x$ 较小,

此时洞室平衡状态位于平衡曲面的下叶。随着洞室外界载荷 $P$ 增加,  $u_0$ 增加,  $x$ 值增大, 洞室平衡状态沿着平衡曲面向上移动。当洞室平衡状态落在曲面折痕 $OB$ 时(如图1(b),(c))即即达到了临界平衡状态。实际工程中, 扰动是无处不在的, 扰动作用下,  $u_0$ 进一步增加,  $x$ 值增大, 平衡状态进入曲面中叶, 成为不稳定平衡状态。这种平衡状态是无法存在的, 只有突跳到对应的上叶稳定平衡点上, 如图1(c)所示, 到达上叶 $H$ 点后系统又处于稳定状态。这就解释了达到某种状态后洞室岩爆发生的必然性, 但洞室岩爆又不会无限制地冲击下去, 而是又可以停止下来。从 $F$ 点到 $H$ 点为岩爆过程时间, 现场实测一般为几秒到几十秒。

洞室临界平衡状态 $F$ 点(图1(c))所对应的洞室周边收敛位移 $u_F$ 为:

$$u_F = u_0 \left[ 1 - \left( -\frac{p}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.31)$$

岩爆过后, 洞室周边收敛位移突跳值为:

$$\Delta u = u_H - u_F = 3 \left( -\frac{p}{3} \right)^{\frac{1}{2}} u_0 \quad (3.32)$$

洞室的临界平衡状态在曲面折痕上, 下面求出其对应的临界软化区深度 $\rho_k$ 。有了这个量可以对岩爆分析进行定量计算。由(1.4)式折痕方程为:

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

将(3.26)、(3.27)代入得:

$$\left[ 1 - \frac{2}{1+\mu} \cdot \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{\xi^2 + \xi + 1}{(\xi-1)(\xi+1)^2} \right]^3 = \left[ -1 + \frac{3}{1+\mu} \cdot \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{\xi^2 + \xi + 1}{(\xi-1)(\xi+1)^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{E}{\lambda m} (1-A-B) \cdot \frac{(\xi^2 + \xi + 1)^2}{(\xi-1)(\xi+1)^3} \ln \xi \right]^2 \quad (3.33)$$

给定一组岩石参数,  $m, n, \mu, E/\lambda$ , 则根据上述方程可解出 $\xi$ , 由 $\xi = \rho^2/r_0^2$ , 即可得到洞室临界平衡状态时, 所对应的临界塑性软化区深度 $\rho_k$ 。以软化区深度 $\rho_k$ 与洞室半径 $r_0$ 之比 $\rho_k/r_0$ 为纵轴, 以岩石弹性模量 $E$ 和后期降模量 $\lambda$ 之比 $E/\lambda$ 为横轴, 根据上式计算结果, 绘成图5。可见,  $E/\lambda$ 越小, 即后期曲线降模量 $\lambda$ 越大, 则临界软化区深度 $\rho_k$ 越小。由于软化区大小和外界作用载荷大小 $P$ 是正比对应的, 所以此时所需的临界载荷也越小, 即越容易发生岩爆。反之岩石降模量越小,  $E/\lambda$ 越大, 则临界软化区深度和相应的临界载荷就大, 就不易发生岩爆。这和现场观测及室内岩爆试验结果是一致的。

如果以突跳前后的势能差来粗略估计作为岩爆所释放出来的能量, 通过计算 $F$ 、 $H$ 两点的势能差, 则可得到单位走向长度的洞室, 岩爆所释放出来的能量为:

$$\Delta \Pi = \frac{27}{64} \frac{\xi(\xi+1)^4(\xi-1)}{(\xi^2+\xi+1)^3} \varepsilon_0^2 r_0^2 \lambda \left[ 1 - \frac{2}{1+\mu} \cdot \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{\xi^2 + \xi + 1}{(\xi-1)(\xi+1)^2} \right]^2 \quad (3.34)$$

下面作一实例分析。华北某煤矿, 一个开挖在煤层中的巷道, 半径 $r_0=2.5\text{m}$ , 煤的力学参数由试验得到。  $\sigma_c=15\text{MPa}$ ,  $E=1.5 \times 10^3\text{MPa}$ ,  $\varepsilon_c=10^{-2}$ ,  $n=0.1$ ,  $m=1.4$ ,  $\mu=0.45$ ,  $\lambda=4.4 \times 10^3\text{MPa}$ 。1991年约在100m长度的巷道上发生岩爆, 现场实测估计在岩爆发生前巷道周边收敛位移在1cm左右。岩爆发生后巷道直径收缩到1m, 即收敛位移突跳值为 $\Delta u=2\text{m}$ , 岩爆震级为2.4级(里氏震级)。由突变理论计算, 临界塑性软化区深度 $\rho_k=4.54\text{m}$ , 岩爆发生临界状态巷道位移 $u_F=4.4\text{mm}$ , 岩爆过后位移突跳值 $\Delta u=11.5\text{cm}$ 。释放的能量 $\Delta \Pi=1.72 \times 10^4\text{J}$ 。可见计算值基本接近现场值, 但都偏小。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 章梦涛, 冲击地压失稳理论及数值模拟, 岩石力学与工程学报, (3) (1987).
- [ 2 ] 潘一山、徐曾和、章梦涛, 地下洞室岩爆发生的失稳模式及其判别准则, 《第二届全国岩石动力学学术会议论文集》, 武汉测绘科技大学出版社 (1990).
- [ 3 ] 潘一山、章梦涛, 用突变理论研究冲击地压发生物理过程, 阜新矿业学院学报, (1) (1992).

## The Study of Chamber Rockburst by the CUSP Model of Catastrophe Theory

Pan Yi-shan    Zhang Meng-tao    Li Guo-zheng

(*Fuxin Mining Institute, Fuxin, Liaoning*)

### Abstract

By means of CUSP model of catastrophe theory, this paper has studied the physics process of rockburst occurred on circular chamber. The paper has not only described the instability process of rockburst more deeply, but also got the critical depth of plastic softening area of chamber that is valuable in the controlling engineering of rockburst. The chamber displacement jump and energy liberation have been derived. The influence of rock parameters on the rockburst has been discussed.

**Key words** rockburst, CUSP model of catastrophe theory, critical depth of plastic softening area, displacement jump, energy liberation