应用数学和力学，第15卷 第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

直立圆柱二阶波浪力解析解

邹志利　戴遗山

（大连理工大学）（哈尔滨船舶工程学院）

（钱伟长推荐，1993年2月10日收到）

摘　要

大直径直立圆柱体上的二阶波浪力目前已有一些研究结果，但仍存在一些值得进一步探讨之处。这一方面在于二阶辐射条件还不甚清楚；另一方面在于已有的二阶力公式或是所含积分的收敛精度不易保证，或是表达式繁杂，不利于实际计算。本文在求解这一问题时，不是对二阶势提出辐射条件，而是对二阶势的周向富里叶分量提出辐射条件——Sommerfeld辐射条件。求解中，利用本文推导出的数学公式，简化了二阶自由面条件非齐次项的表达式，得到了形式简单，易于计算的二阶波浪力精确公式。二阶力计算结果与实验结果吻合良好。

关键词　波浪　二阶力　辐射条件　绕流

一、引　　言

安置在海床上的大尺度直立圆柱是海洋工程中常见的结构形式。对于作用在其上的二阶波浪力的研究一直吸引着人们的注意力。一些研究结果表明[10][11][12]，当入射波是Stokes波时，由二阶势引起的二阶力是二阶波浪力中的主要成份。因此，二阶速度势的计算准确与否，对二阶波浪力的结果是影响很大的。但由于二阶辐射条件不十分清楚，在已有的研究工作中，有多种辐射条件被采用，如何建立适当的二阶辐射条件仍存在一些值得进一步探讨之处。除此以外，由于二阶自由面条件非齐次项随着离开物体距离的增大而衰减很慢和其表达式繁杂，使得现有的二阶力公式或是所含的在整个自由面上的积分不易进行精确计算，或是表达式繁杂，不利于实际应用。本文在求解这一问题时，不是对二阶势提出辐射条件，而是对二阶势周向富里叶分量提出辐射条件，指出对二阶势周向富里叶分量仍可采用Sommerfeld辐射条件。求解中，利用本文推导出的数学公式，简化了二阶自由面条件非齐次项的表达式，在此基础上，得到了精确二阶波浪力表达式。与已有结果相比，本文二阶力公式形式较为简单，易于数值计算。本文方法也可用于求解二阶势。

二、定解问题的构成

考虑坐在海底上，穿透水面的刚性垂直圆柱体在Stokes波作用下的绕射问题。如图1所示，选取圆柱坐标系$Or\theta z$，原点取在未扰动的静水面，Oz轴铅垂向上，圆标半径为a，水

深为H。入射波沿$\theta=0$的方向传播，圆频率为ω，波幅为ζ_a。

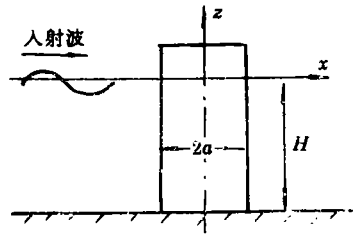

图1 坐标系

设流体是理想的和不可压缩的，流动是无旋的。这样，流体的运动可由速度势Φ来描述。将速度势用小参数$\varepsilon=\zeta_a k$（k是线性波波数）作摄动展开，并截止于二阶，有

$$\Phi(r,\theta,z,t)=\varepsilon\Phi^{(1)}(r,\theta,z,t)+\varepsilon^2(\Phi_0^{(2)}(r,\theta,z)+\Phi^{(2)}(r,\theta,z,t)) \quad (2.1)$$

其中，二阶定常势$\Phi_0^{(2)}$对波浪压力无贡献，这里不予考虑。当求稳态解时，可设

$$\Phi^{(1)}(r,\theta,z,t)=\mathrm{Re}\{\phi^{(1)}(r,\theta,z)\exp[i\omega t]\} \quad (2.2)$$

$$\Phi^{(2)}(r,\theta,z,t)=\mathrm{Re}\{\phi^{(2)}(r,\theta,z)\exp[i2\omega t]\} \quad (2.3)$$

进一步可将一阶和二阶势的空间分量$\phi^{(1)}$和$\phi^{(2)}$分解为相应阶次的入射势（下标为i）和绕射势（下标为d）之和，即

$$\phi^{(1)}=\phi_i^{(1)}+\phi_d^{(1)} \quad (2.4)$$

$$\phi^{(2)}=\phi_i^{(2)}+\phi_d^{(2)} \quad (2.5)$$

已知一阶和二阶入射势的表达式为[7]

$$\phi_i^{(1)}=\frac{ig}{\omega k}\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\exp[-ikr\cos\theta] \quad (2.6)$$

$$=\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\sum_{n=0}^{\infty}c_n J_n(kr)\cos n\theta$$

$$\phi_i^{(2)}=-\frac{i3\omega}{8k^2}\frac{\cosh 2k(z+H)}{\sinh^4 kH}\exp[-i2kr\cos\theta] \quad (2.7)$$

式中，$c_n=-(-i)^{n+1}\delta_n g/(\omega k)$，$g$是重力加速度，$\delta_0=1$，$\delta_n=2(n\geqslant1)$，$J_n$是第一类$n$阶的Bessel函数。

经适当整理，容易得一阶和二阶绕射势的边值问题为[7]

（1） **一阶问题**

$$\left.\begin{array}{lll}
[L] & \nabla^2\phi_d^{(1)}=0 & (\text{在流域内}) \\
[F] & \dfrac{\partial\phi_d^{(1)}}{\partial z}-\nu\phi_d^{(1)}=0 & (\text{在}z=0\text{上}) \\
[S] & \dfrac{\partial\phi_d^{(1)}}{\partial r}=-\dfrac{\partial\phi_i^{(1)}}{\partial r} & (\text{在}r=a\text{上}) \\
[B] & \dfrac{\partial\phi_d^{(1)}}{\partial z}=0 & (\text{在}z=-H\text{上}) \\
[R] & \lim\limits_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial\phi_d^{(1)}}{\partial r}+ik\phi_d^{(1)}\right)=0 &
\end{array}\right\} \quad (2.8)$$

式中 $\nu=\omega^2/g$，k满足色散关系$k\tanh kH=\nu$。

（2） 二阶问题

$$
\left.\begin{array}{lll}
[L] & \nabla^2\phi_d^{(2)}=0 & （在流域内）\\
[F] & \dfrac{\partial\phi_d^{(2)}}{\partial z}-4\nu\phi_d^{(2)}=F & （在z=0上）\\
[S] & \dfrac{\partial\phi_d^{(2)}}{\partial r}=-\dfrac{\partial\phi_i^{(2)}}{\partial r} & （在r=a上）\\
[B] & \dfrac{\partial\phi_d^{(2)}}{\partial z}=0 & （在z=-H上）
\end{array}\right\}
\tag{2.9}
$$

[R] 适当辐射条件

式中，F为二阶自由面条件非齐次项，表达式为

$$F=F_{id}+F_{dd} \tag{2.10a}$$

$$F_{id}=-\frac{i\omega}{2g}\left[4(\nabla\phi_i^{(1)}\nabla\phi_d^{(1)})-\phi_i^{(1)}\left(\frac{\partial^2\phi_d^{(1)}}{\partial z^2}-\nu\frac{\partial\phi_d^{(1)}}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left.-\phi_d^{(1)}\left(\frac{\partial^2\phi_i^{(1)}}{\partial z^2}-\nu\frac{\partial\phi_i^{(1)}}{\partial z}\right)\right] \tag{2.10b}$$

$$F_{dd}=-\frac{i\omega}{2g}\left[2(\nabla\phi_d^{(1)})^2-\phi_d^{(1)}\left(\frac{\partial^2\phi_d^{(1)}}{\partial z^2}-\nu\frac{\partial\phi_d^{(1)}}{\partial z}\right)\right] \tag{2.10c}$$

一阶问题(2.8)的解是已知的，即

$$\phi_d^{(1)}=\frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}\sum_{n=0}^{\infty}a_nH_n^{(2)}(kr)\cos n\theta \tag{2.11}$$

式中，

$$a_n=(-i)^{n+1}\delta_n\frac{g}{\omega k}\frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)\prime}(ka)}$$

$H_n^{(2)}$为第二类Hankel函数，上角撇号表示J_n或$H_n^{(2)}$对其自变量的导数。

为了求解二阶问题(2.9)，设

$$\phi_d^{(2)}=\phi_{ds}^{(2)}+\phi_{df}^{(2)} \tag{2.12}$$

其中 $\phi_{ds}^{(2)}$是物面条件非齐次引起的二阶势，$\phi_{df}^{(2)}$是自由面条件非齐次引起的二阶势，即，它们分别满足以下边值问题，

$$
\left.\begin{array}{lll}
[L] & \nabla^2\phi_{ds}^{(2)}=0 & （在流域内）\\
[F] & \dfrac{\partial\phi_{ds}^{(2)}}{\partial z}-4\nu\phi_{ds}^{(2)}=0 & （在z=0上）\\
[S] & \dfrac{\partial\phi_{ds}^{(2)}}{\partial r}=-\dfrac{\partial\phi_i^{(2)}}{\partial r} & （在r=a上）\\
[B] & \dfrac{\partial\phi_{ds}^{(2)}}{\partial z}=0 & （在z=-H上）\\
[R] & \lim\limits_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial\phi_{ds}^{(2)}}{\partial r}+ik_0\phi_{ds}^{(2)}\right)=0 &
\end{array}\right\}
\tag{2.13}
$$

式中 k_0为二阶波数，满足色散关系$k_0\tanh k_0H=4\nu$。

$$\left.\begin{array}{lll}[L] & \nabla^2\phi_{df}^{(2)}=0 & (\text{在流域内}) \\ [F] & \dfrac{\partial\phi_{df}^{(2)}}{\partial z}-4\nu\phi_{df}^{(2)}=F & (\text{在}z=0\text{上}) \\ [S] & \dfrac{\partial\phi_{df}^{(2)}}{\partial r}=0 & (\text{在}r=a\text{上}) \\ [B] & \dfrac{\partial\phi_{df}^{(2)}}{\partial z}=0 & (\text{在}z=-H\text{上}) \\ [R] & \text{适当辐射条件} & \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

由于一阶绕射势 $\phi_d^{(1)}$ 的表达式已由(2.11)式给出，所以现在可以写出上式中 F 的解析表达式。将一阶入射势 $\phi_i^{(1)}$ 和一阶绕射势$\phi_d^{(1)}$ 的表达式(2.6)和(2.11)代入 F 的表达式(2.10a～c)，并应用柱函数$Z_n(x)$的关系式

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2n}{x}Z_n(x)=Z_{n-1}(x)+Z_{n+1}(x) \\ 2Z_n'(x)=Z_{n-1}(x)-Z_{n+1}(x)\end{array}\right\} \tag{2.15}$$

及三角函数的积化和差公式，整理后得

$$F=\sum_{l=0}^{\infty}f_l(r)\cos l\theta \tag{2.16a}$$

$$f_l(r)=f_l^{id}(r)+f_l^{dd}(r) \tag{2.16b}$$

$$f_l^{id}(r)=-\frac{i\omega}{2g}\Big[\sum_{n=0}^{l}c_n a_{l-n}G^{+}_{n,l-n}(kr)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+l}a_n G^{-}_{n+l,n}(kr)$$

$$+(\delta_l-1)\sum_{n=0}^{\infty}c_n a_{n+l}G^{-}_{n,n+l}(kr)\Big] \tag{2.16c}$$

$$f_l^{dd}(r)=-\frac{i\omega}{4g}\Big[\sum_{n=0}^{l}a_n a_{l-n}F^{+}_{n,l-n}(kr)$$

$$+\delta_l\sum_{n=0}^{\infty}a_n a_{n+l}F^{-}_{n,n+l}(kr)\Big] \tag{2.16d}$$

式中 $G^{\pm}_{n,m}(z)=(3\nu^2-k^2)J_n(z)H_m^{(2)}(z)$

$$\mp k^2(J_{n-1}(z)H^{(2)}_{m\pm1}(z)+J_{n+1}(z)H^{(2)}_{m\mp1}(z)) \tag{2.16e}$$

$$F^{\pm}_{n,m}(z)=(3\nu^2-k^2)H_n^{(2)}(z)H_m^{(2)}(z)$$

$$\mp k^2(H^{(2)}_{n-1}(z)H^{(2)}_{m\pm1}(z)+H^{(2)}_{n+1}(z)H^{(2)}_{m\mp1}(z)) \tag{2.16f}$$

问题(2.13)的解$\phi_{ds}^{(2)}$是容易得到的[7]，即

$$\phi_{ds}^{(2)}=-\frac{6\omega\cosh 2kH}{\sinh^4 kH}(\tanh 2kH-2\tanh kH)$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n (-i)^{n+1} J_n'(2ka) \left[-\frac{\cosh k_0 H \cosh k_0 (z+H)}{(4k^2-k_0^2)(2k_0 H+\sinh 2k_0 H)} \frac{H_n^{(2)}(k_0 r)}{H_n^{(2)\prime}(k_0 a)} \right.$$

$$\left. +\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos k_m H \cos k_m (z+H)}{(4k^2+k_m^2)(2k_m H+\sin 2k_m H)} \frac{K_n(k_m r)}{K_n'(k_m a)} \right] \cos n\theta \tag{2.17}$$

式中 k_m满足关系式$k_m \tan k_m H=-4\nu$，K_n是第二类 n 阶的虚宗量Bessel函数。

为了求解问题(2.14)，首先应给出适当的辐射条件，以保证解的唯一性。对于由局部扰动引起的含自由面流体的波动问题，可采用 Sommerfeld 辐射条件[13]，如问题(2.8)和(2.13)。但问题(2.14)所规定的波动是由除去物体所占有的局部区域外在整个自由面上都存在的自由面条件非齐次项F所引起的，已不是“局部扰动”问题，不能直接套用Sommerfeld辐射条件。事实上，$\phi_{df}^{(2)}$已不满足这一辐射条件[4]。如何给出问题(2.14)中的辐射条件是一个众说纷纭的问题。本文的做法是首先将二阶势$\phi_{df}^{(2)}$做周向富里叶展开

$$\phi_{df}^{(2)}=\sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l^f(r,z)\cos l\theta \tag{2.18}$$

将上式代入(2.14)后，得到φ_l^f $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$的定解条件

$$\left.\begin{array}{lll}
[L] & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \varphi_l^f}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 \varphi_l^f}{\partial z^2}+\dfrac{l^2}{r^2}\varphi_l^f=0 & (\text{在流域内}) \\[2ex]
[F] & \dfrac{\partial \varphi_l^f}{\partial z}-4\nu\varphi_l^f=f_l(r) & (\text{在}z=0\text{上}) \\[2ex]
[S] & \dfrac{\partial \varphi_l^f}{\partial r}=0 & (\text{在}r=a\text{上}) \\[2ex]
[B] & \dfrac{\partial \varphi_l^f}{\partial z}=0 & (\text{在}z=-H\text{上}) \\[2ex]
[R] & \text{适当辐射条件} &
\end{array}\right\} \tag{2.19}$$

这样就把求解二阶势的问题(2.14)转化为一系列求解二阶势周向富里叶分量的问题(2.19)。这样做的好处是降低了自由面条件非齐次项在$r\to\infty$时的量阶，即在(2.14)中，$F=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$；而在(2.19)中，$f_l(r)=O\left(\frac{1}{r}\right)$，这将导致问题(2.14)与问题(2.19)具有不同的辐射条件。为了说明这一点，将φ_l^f分解为

$$\varphi_l^f=\varphi_l^{fp}+\varphi_l^{fh} \tag{2.20}$$

其中 φ_l^{fp}是满足(2.19)中非齐次自由面条件的一个特解，φ_l^{fh}是满足(2.19)中齐次自由面条件的齐次解，即它们分别满足条件

$$\left.\begin{array}{lll}
[L] & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \varphi_l^{fp}}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 \varphi_l^{fp}}{\partial z^2}+\dfrac{l^2}{r^2}\varphi_l^{fp}=0 & (\text{在流域内}) \\[2ex]
[F] & \dfrac{\partial \varphi_l^{fp}}{\partial z}-4\nu\varphi_l^{fp}=f_l(r) & (\text{在}z=0\text{上}) \\[2ex]
[B] & \dfrac{\partial \varphi_l^{fp}}{\partial z}=0 & (\text{在}z=-H\text{上})
\end{array}\right\} \tag{2.21}$$

和

$$
\left.\begin{array}{ll}
[L] & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial\varphi_l^{h}}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2\varphi_l^{h}}{\partial z^2}+\dfrac{l^2}{r^2}\varphi_l^{h}=0 \quad (\text{在流域内}) \\
[F] & \dfrac{\partial\varphi_l^{h}}{\partial z}-4\nu\varphi_l^{h}=0 \quad (\text{在}z=0\text{上}) \\
[S] & \dfrac{\partial\varphi_l^{h}}{\partial r}=-\dfrac{\partial\varphi_l^{p}}{\partial r} \quad (\text{在}r=a\text{上}) \\
[B] & \dfrac{\partial\varphi_l^{h}}{\partial z}=0 \quad (\text{在}z=-H\text{上}) \\
[R] & \lim\limits_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\dfrac{\partial\varphi_l^{h}}{\partial r}+ik_0\varphi_l^{h}\right)=0
\end{array}\right\} \quad (2.22)
$$

可见，φ_l^h是由物面条件非齐次所引起的波动，是局部扰动问题，所以它仍满足Sommerfeld辐射条件。在(2.21)中，我们仍没有给出辐射条件，这将使其解不唯一。为了保证解的唯一性，我们对(2.20)式中的φ_l^p再提出一个规定，即φ_l^p的表达式（在$r\to\infty$时）不含有满足二阶齐次自由面条件的解（齐次解）。这一规定是合理的。其原因一方面在于将问题(2.19)的解φ_l按(2.20)式进行分解时，仅要求φ_l^p是满足(2.19)中非齐次自由面条件的一个特解，增加以上规定后所得到的φ_l^p仍适合这一要求；另一方面在于对φ_l^p增加以上规定后，问题(2.19)的解中所含的满足二阶齐次自由面条件的齐次解都将包含在φ_l^h中，进而可由问题(2.22)得到其解。这样，在对φ_l^p增加如上规定后，由求解(2.21)和(2.22)及(2.20)式得到的φ_l将仍满足定解问题(2.19)。实际上，按以上规定所得到的特解φ_l^p仅是由(2.21)中自由面条件非齐次项$f_l(r)$所引起的强迫响应。由于问题(2.21)是线性的，所以，φ_l^p在$r\to\infty$时的量阶应与$f_l(r)$的量阶一致，即$\varphi_l^p=O\left(\dfrac{1}{r}\right)$。又知，齐次解$\varphi_l^h$在$r\to\infty$时的量阶为$O\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right)$。这样在远场，$\varphi_l^p$的量阶将小于$\varphi_l^h$的量阶，于是可知，问题(2.19)的解$\varphi_l$在$r\to\infty$时的渐近形态主要是由$\varphi_l^h$决定的。因$\varphi_l^h$满足Sommerfeld辐射条件，所以，$\varphi_l$也将满足这一辐射条件。至此，我们便说明了二阶绕射势周向富里叶分量应满足Sommerfeld辐射条件。

以上结论虽然是针对直立圆柱的情况而得到的，但它同样适合任意形状三维物体的绕射问题。这是因为一般物体的一阶绕射势在$r\gg1$的外场都可表达为(2.11)式的形式（忽略随r增大按指数级衰减的项）[8]，从而二阶自由面条件非齐次项在外场也将具有(2.16a～f)的形式。这样，前面的分析在一般物体三维绕射问题的外场都成立[12]。文[12]是应用这一原理的一个例子，该文通过对二阶绕射势周向富里叶分量提出Sommerfeld辐射条件，给出了任意三维物体二阶绕射势外场解的解析表达式。

三、求解方法

由上节知，求解直立圆柱二阶绕射势的难点在于如何求解与二阶非齐次自由面条件有关的二阶绕射势ϕ_{df}^2。由于由二阶势产生的圆柱体二阶力仅与二阶势$l=1$的周向富里叶分量有关，所以，本节以ϕ_{df}^2的$l=1$的周向富里叶分量φ_l的求解为例，说明本文对二阶绕射势ϕ_{df}^2的求解方法。

首先求问题(2.21)在$l=1$时的解。由(2.16b～f)式可知，(2.21)中自由面条件非齐次项

$f_l(r)$是由诸如$J_n(kr)H_m^{(2)}(kr)$和$H_n^{(2)}(kr)H_m^{(2)}(kr)$的Bessel 函数的乘积组成。若能找到象三角函数的积化和差公式那样的一些公式，把这些 Bessel 函数的乘积用l阶($l=n\pm m$)的Bessel函数J_l，$H_l^{(2)}$或K_l来表达，则会容易地写出问题(2.21)的解。本文在附录中推导出了$l=1$时的这样的公式，就是

$$\left.\begin{aligned}
&J_n(z)H_{n+1}^{(2)}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_1^{(2)}(2z\sin t)\sin(2n+1)t\,dt+\frac{i}{\pi z}\\
&J_{n+1}(z)H_n^{(2)}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_1^{(2)}(2z\sin t)\sin(2n+1)t\,dt-\frac{i}{\pi z}\\
&H_n^{(2)}(z)H_{n+1}^{(2)}(z)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_1^{(2)}(2z\sin t)\sin(2n+1)t\,dt\\
&\qquad\qquad-\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\infty}K_1(2z\sinh t)\sinh(2n+1)t\,dt
\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

在(2.16b～f)式中取$l=1$，并将以上公式代入，得

$$f_1(r)=\int_0^{\pi/2}A_1(t)H_1^{(2)}(2kr\sin t)dt+\int_0^{\infty}B_1(t)K_1(2kr\sinh t)dt+C_1\frac{1}{2kr}\tag{3.2a}$$

式中 $$A_1(t)=-\frac{i\omega}{\pi g}(3\nu^2-k^2+2k^2\cos t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(c_na_{n+1}+c_{n+1}a_n+2a_na_{n+1})\sin(2n+1)t\tag{3.2b}$$

$$B_1(t)=-\frac{i8\omega}{\pi^2 g}(3\nu^2-k^2+2k^2\cosh t)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_na_na_{n+1}\sinh(2n+1)t\tag{3.2c}$$

$$C_1=\frac{2\omega}{\pi g}(3\nu^2+k^2)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(c_na_{n+1}-c_{n+1}a_n)\tag{3.2d}$$

$\beta_0=2$，$\beta_n=1$　　$(n\geqslant 1)$

在定解问题(2.2i)中取$l=1$，并将(3.2a)代入自由面条件，易知这时满足定解问题(2.21)的解为

$$\varphi_1^{fp}(r,z)=\int_0^{\pi/2}A_1(t)H_1^{(2)}(2kr\sin t)\frac{\cosh[2k\sin t(z+H)]}{Q(\sin t)}dt+\int_0^{\infty}B_1(t)K_1(2kr\sinh t)\frac{\cos[2k\sinh t(z+H)]}{Q(i\sinh t)}dt-\frac{C_1}{4\nu}\frac{1}{2kr}\tag{3.3}$$

式中 $$Q(\xi)=2k\xi\sinh(2k\xi H)-4\nu\cosh(2k\xi H)\tag{3.4}$$

(3.3)式右端第三项仅适用于有限水深，而不适用于无限水深情况，因其不满足无限水深条件

$$\nabla\varphi_1^{fp}\to 0,\ 当z\to-\infty时\tag{3.5}$$

对无限水深情况，利用公式[14]

$$\frac{1}{r}=\int_0^\infty J_n(rt)dt \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.6}$$

将(3.3)式右端第三项用下式代替

$$⨍_0^\infty J_1(2krt)\frac{\cosh[2kt(z+H)]}{Q(t)}dt+\pi Y_1(k_0r)\frac{\cosh k_0(z+H)}{Q'(t_0)} \tag{3.7}$$

式中，$⨍$表示主值积分，t_0是$Q(t)=0$的正根．Y_1是1阶第二类Bessel函数．(3.7)式中第一项在$r\to\infty$时的渐近式将含有满足二阶齐次自由面条件的齐次解（来自$t=t_0$邻域上的主值积分），这一齐次解将被(3.7)式中第二项所抵消，这样(3.7)式便满足了上节对特解的规定——不含满足二阶齐次自由面条件的齐次解．

利用上面求得的$\varphi_1^{(p}$，可进一步求得问题(2.22)在$l=1$时的解$\varphi_1^{(h}$．将$\varphi_1^{(h}$作本征函数展开，得

$$\varphi_1^{(h}(r,z)=\sum_{m=0}^\infty a_m H_1^{(2)}(q_mr)\frac{\cosh q_m(z+H)}{\cosh q_mH} \tag{3.8}$$

式中 $q_0=k_0$，$q_m=-ik_m(m\geqslant1)$．系数a_m由(2.22)的物面条件[S]求得，结果为

$$a_m=\frac{4}{H_1^{(2)\prime}(q_ma)}\frac{\cosh^2q_mH}{2q_mH+\sinh2q_mH}$$

$$\left[\int_0^{\pi/2}A_1(t)H_1^{(2)\prime}(2ka\sin t)\frac{2k\sin t}{q_m^2-4k^2\sin^2t}dt\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty B_1(t)K_1'(2ka\sinh t)\frac{2k\sinh t}{q_m^2+4k^2\sinh^2t}dt-\frac{C_1}{2k}\frac{1}{q_m^2a^2}\right] \tag{3.9}$$

将上面求得的$\varphi_1^{(p}$和$\varphi_1^{(h}$的表达式(3.3)和(3.8)代入(2.20)式便得到了本节所要求解的二阶绕射势$\phi_{df}^{(2)}$的周向富里叶分量之一$\varphi_1^{(}$的表达式．下面分析一下$\varphi_1^{(p}$在$r\to\infty$时渐近形态，以了解这样得到的$\varphi_1^{(}$所满足的辐射条件．易证，当$r\to\infty$时，由(3.3)式可得（采用(3.7)式时也有此结果）

$$\varphi_1^{(p}\sim A_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cosh2k(z+H)}{Q(1)}\frac{1}{2kr}\exp\left[-i\left(2kr-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{4\nu}\frac{C_1}{2kr}+O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right) \tag{3.10}$$

可见，在远场，$\varphi_1^{(p}$的量阶为$O\left(\frac{1}{r}\right)$，与$f_l(r)$的量阶一致．这样如上节所述，上面所求得的解$\varphi_1^{(}$所满足的是 Sommerfeld 辐射条件．

以上我们对问题(2.19)，以$l=1$的情况为例，进行了严格求解．用此方法也可求得问题(2.19)的其它二阶势周向富里叶分量$\varphi_l^{(}(l=0,1,2,\cdots)$的解，只要能够找到一些象(3.1)式那样的公式，可以把自由面条件非齐次项$f_l(r)$所含有的 Bessel 函数的乘积用l阶 Bessel 函数J_l，$H_l^{(2)}$或K_l来表达．本文作者在文[12]中已推导出了这一求解工作所需要的全部这样的公式和利用这些公式求解二阶势的方法．由于篇幅所限，本文对此不再叙述，有兴趣者请参见文[12]．

四、二阶力公式和计算结果

用上节求出的φ_1^f可以给出由与二阶非齐次自由面条件有关的二阶绕射势$\phi_{df}^{(2)}$所产生的圆柱体二阶力，下面写出这一结果。将速度势表达式(2.1)代入圆柱表面波浪压力表达式

$$p(r,\theta,z,t)=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\rho|\nabla\Phi|^2\qquad(r=a)\tag{4.1}$$

然后沿圆柱瞬时湿表面积分得圆柱体波浪力公式

$$\begin{aligned}F&=-\int_{-H}^{\eta}dz\int_0^{2\pi}p(a,\theta,z,t)a\cos\theta d\theta\\&=\mathrm{Re}\{\varepsilon F^{(1)}\exp[i\omega t]+\varepsilon^2(F_0^{(2)}+F^{(2)}\exp[i2\omega t]\}\end{aligned}\tag{4.2}$$

式中　η是波面升高。一阶力$F^{(1)}$，二阶定常力$F_0^{(2)}$和二阶倍频力$F^{(2)}$的无因次表达式为

$$f^{(1)}=\frac{\varepsilon F^{(1)}}{\rho g\pi a^2\zeta_a}=\frac{i\omega k}{\pi ga}\int_{-H}^0dz\int_0^{2\pi}\phi^{(1)}\Big|_{r=a}\cos\theta d\theta\tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}f_0^{(2)}=\frac{\varepsilon^2F_0^{(2)}}{\rho g\pi a\zeta_a^2}&=\frac{k^2}{4g}\int_{-H}^0dz\int_0^{2\pi}\left[\phi_z^{(1)}\phi_z^{(1)*}+\frac{1}{r^2}\phi_\theta^{(1)}\phi_\theta^{(1)*}\right]_{r=a}\cos\theta d\theta\\&-\frac{\nu k^2}{4g}\int_0^{2\pi}\phi^{(1)}\phi^{(1)*}\Big|_{\substack{r=a\\z=0}}\cos\theta d\theta\end{aligned}\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}f^{(2)}=\frac{\varepsilon^2F^{(2)}}{\rho g\pi a\zeta_a^2}&=\frac{2i\omega k^2}{g}\int_{-H}^0dz\int_0^{2\pi}\left[\phi_i^{(2)}+\phi_{ds}^{(2)}+\phi_{df}^{(2)}\right]_{r=a}\cos\theta d\theta\\&+\frac{k^2}{4g}\int_{-H}^0dz\int_0^{2\pi}\left[\phi_z^{(1)2}+\frac{1}{r^2}\phi_\theta^{(1)2}\right]_{r=a}\cos\theta d\theta\\&+\frac{\nu k^2}{4g}\int_0^{2\pi}\phi^{(1)2}\Big|_{\substack{r=a\\z=0}}\cos\theta d\theta\end{aligned}\tag{4.5}$$

下面仅给出与ϕ_{df}^{2}有关的二阶力$f_3^{(2)}$，其它各力巳为大家所了解[7]。

$$\begin{aligned}f_3^{(2)}&=\frac{2i\omega k^2}{g}\int_{-H}^0dz\int_0^{2\pi}\phi_{df}^{(2)}\Big|_{r=a}\cos\theta d\theta\\&=\frac{2i\pi\omega k^2}{g}\int_{-H}^0\varphi_1^f(a,z)dz\end{aligned}\tag{4.6}$$

将上节给出的φ_1^f的表达式(2.20)，(3.3)和(3.8)代入上式，整理得

$$\begin{aligned}f_3^{(2)}=\frac{2i\pi\omega k^2}{g}\Bigg[&a_0H_1^{(2)}(k_0a)\frac{\tanh k_0H}{k_0}\\&-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}a_mK_1(k_ma)\frac{\mathrm{tg}k_mH}{k_m}\\&+\int_0^{\pi/2}A_1(t)H_1^{(2)}(2ka\sin t)\frac{\sinh(2kH\sin t)}{2k\sin tQ(\sin t)}dt\\&+\int_0^{\infty}B_1(t)K_1(2ka\sinh t)\frac{\sin(2kH\sinh t)}{2k\sinh tQ(i\sinh t)}dt\end{aligned}$$

$$-(C_1/4\nu)(H/2ka)] \tag{4.7}$$

本文对以上公式就$H/a=1.16$，$\zeta_a/H=0.116$的情况进行了数值计算．图2是本文计算的非线性波浪力最大值与实验结果[3]和其它方法的计算结果[1][2][3]的比较．这一最大值是由一阶力，二阶定常力和倍频力之和的时间历程所得到的．由图可见本文计算结果与实验结果是符合良好的．图3是本文的总的二阶定常力和倍频力的结果．这一结果中所包含的各种二阶力成份（见(4.4)和(4.5)式）的贡献已在图4和5中给出，其中$f_1^{(2)}$和$f_2^{(2)}$分别是二阶入射势和其在柱面上绕射而产生的波浪力，$f_3^{(2)}$则为二阶绕射势中余下部分(即$\phi_{d_f}^2$)所产生的波浪力，$f_4^{(2)}$是一阶速度平方项产生的波浪力，$f_5^{(2)}$为水线面积分项的贡献．$f_{40}^{(2)}$是一阶速度平方项产生的定常二阶力，$f_{50}^{(2)}$是水线面积分产生的定常二阶力．比较以上各种二阶力成份的大小可知，二阶势所产生的二阶力($f_1^{(2)}+f_2^{(2)}+f_3^{(2)}$)要大于一阶势所产生的二阶力($f_4^{(2)}+f_5^{(2)}$)，在二阶势产生的二阶力中，由二阶入射势和其在物面上的绕射产生的二阶力($f_1^{(2)}$和$f_2^{(2)}$)仅在低频时才具有较大的值，当频率稍高时，由于二阶入射势和其在物面上的绕射势沿水深方

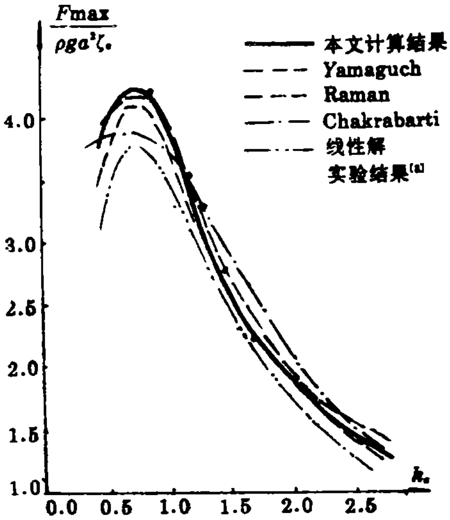

图2　非线性波浪力最大值

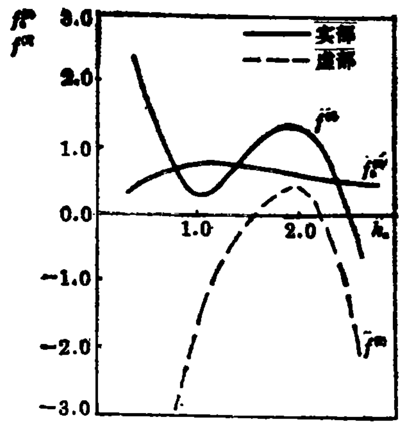

图3　二阶定常力($f_0^{(2)}$) 和倍频力($f^{(2)}$)

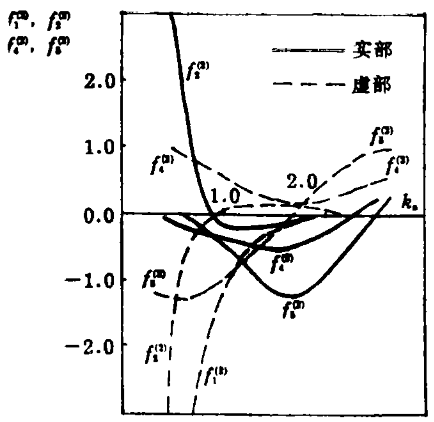

图4　二阶倍频力分量($f_1^{(2)}$, $f_2^{(2)}$, $f_4^{(2)}$, $f_5^{(2)}$)

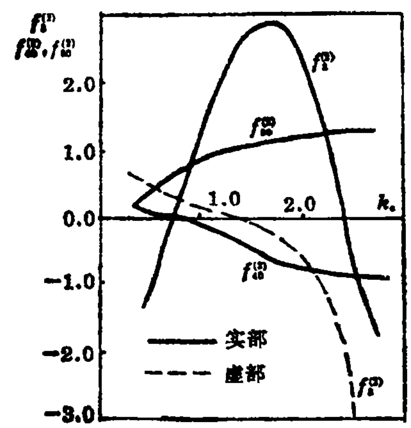

图5　二阶倍频和定常力分量($f_3^{(2)}$, $f_{40}^{(2)}$, $f_{50}^{(2)}$)

向衰减很快，使得它们仅在靠近自由面附近很薄一层水深处才有数值，因而它们这时产生的二阶力微小。而由与二阶非齐次自由面条件有关的二阶绕射势 ϕ_{df}^2 所产生的二阶力 f_3（由(4.7)式给出）在整个计算频率范围内都具有较大数值，是二阶波浪力中十分重要的成份。由图3和5也可知，二阶定常力的两个成份 f_{40} 与 f_{50} 的符号是相反的，所以，尽管二者的数值不是很小，但由二者之和产生的二阶定常力的幅值是较二阶倍频力的幅值小得多的。

五、结　　论

（1） 本文分析表明，在 $r\to\infty$ 时，三维物体二阶绕射势周向富里叶分量中的强迫波（特解）的量阶 $O\left(\frac{1}{r}\right)$ 小于自由波（齐次解）的量阶 $O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$，所以，二阶绕射势周向富里叶分量与其自由波一样也满足 Sommerfeld 辐射条件。因此，建立二阶辐射条件的另一途径是对二阶势周向富里叶分量施加 Sommerfeld 辐射条件。例如，文[12]用这一方法求出了三维二阶绕射势的外场解析解。

（2） 本文给出了一个建立直立圆柱二阶绕射势解析解的方法，由其得到的圆柱体二阶力公式，形式较为简单，数值计算容易，便于实际应用。其数值结果与实验结果吻合良好。

（3） 计算结果表明，与二阶非齐次自由面条件有关的二阶绕射势产生的二阶力，是柱体在 Stokes 波作用下所受到的二阶波浪力的主要成份。

附　　录（公式推导）

这里给出正文中(3.1)式的推导过程。

引入公式[14]

$$\int_0^{\pi/2} J_0(2z\sin t)\cos 2nt\,dt=\frac{\pi}{2}J_n^2(z) \tag{A·1}$$

$$\int_0^{\pi/2} Y_0(2z\sin t)\cos 2nt\,dt=\frac{\pi}{2}J_n(z)Y_n(z) \tag{A·2}$$

得

$$J_n(z)\,H_n^{(2)}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_0^{(2)}(2z\sin t)\cos 2nt\,dt \tag{A·3}$$

已知有公式

$$J_n(z)Y'_n(z)-J'_n(z)Y_n(z)=\frac{2}{\pi}\ \frac{1}{z} \tag{A·4}$$

对(A·2)式两端对z求导得

$$J_n(z)Y'_n(z)+J'_n(z)Y_n(z)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}Y_0'(2z\sin t)\sin t\ \cos 2nt\,dt \tag{A·5}$$

(A·4)+(A·5)和(A·5)−(A·4)，得

$$J_n(z)Y'_n(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}Y'_0(2z\sin t)\sin t\ \cos 2nt\,dt+\frac{1}{\pi z} \tag{A·6}$$

$$J'_n(z)Y_n(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}Y'_0(2z\sin t)\sin t\ \cos 2nt\,dt-\frac{1}{\pi z} \tag{A·7}$$

利用(A·3)，(A·1)和(A·6)得

$$J_n(z)\,H_{n+1}^{(2)}(z)=J_n(z)\left(\frac{n}{z}H_n^{(2)}(z)-H_n^{(2)\prime}(z)\right)$$

$$=\frac{n}{z}J_n(z)\,H_n^{(2)}(z)-\frac{1}{2}[J_n^2(z)]'+iJ_n(z)Y'_n(z)$$

$$=\frac{n}{z}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_0^{(2)}(2z\sin t)\cos 2nt dt-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}J'_0(2z\sin t)\sin t\cos 2nt dt$$

$$+i\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}Y'_0(2z\sin t)\sin t\cos 2nt dt+\frac{1}{\pi z}$$

$$=n\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{H_0^{(2)}(2z\sin t)}{z}\cos 2nt dt$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_0^{(2)\prime}(2z\sin t)\sin t\cos 2nt+\frac{1}{\pi z} \tag{A·8}$$

易证，有公式

$$\frac{H_0^{(2)}(2z\sin t)}{z}=2\sin t\int_1^{\infty}H_1^{(2)}(2z\xi\sin t)d\xi \tag{A·9}$$

将上式及公式

$$H_0^{(2)\prime}(2z\sin t)=-H_1^{(2)}(2z\sin t)$$

代入(A·8)，并将双重积分化为单重积分，整理得

$$J_n(z)H_{n+1}^{(2)}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_1^{(2)}(2z\sin t)\sin(2n+1)t dt+\frac{i}{\pi z} \tag{A·10}$$

用类似推导可得

$$J_{n+1}(z)H_n^{(2)}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_1^{(2)}(2z\sin t)\sin(2n+1)t dt-\frac{i}{\pi z} \tag{A·11}$$

以上两式便是正文(3.1)式中头两式，为推导(3.1)式中第三式，引入公式[14]

$$H_n^{(1)}(z)H_n^{(2)}(z)=J_n^2(z)+Y_n^2(z)=\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\infty}K_0(2z\sinh t)\cosh 2nt dt \tag{A·12}$$

利用上式和(A·3)式，得

$$H_n^{(2)}(z)H_n^{(2)}(z)=2J_n(z)H_n^{(2)}(z)-H_n^{(1)}(z)H_n^{(2)}(z)$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_0^{(2)}(2z\sin t)\cos 2nt dt$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\infty}K_0(2z\sinh t)\cosh 2nt dt \tag{A·13}$$

利用上式，做类似于从(A·8)到(A·10)的推导，可得

$$H_n^{(2)}(z)H_{n+1}^{(2)}(z)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}H_1^{(2)}(2z\sin t)\sin(2n+1)t dt$$

$$-\frac{8}{\pi^2}\int_0^{\infty}K_1(2z\sinh t)\sinh(2n+1)t dt \tag{A·14}$$

证毕。

参 考 文 献

[1] Yamaguchi, M. and Y. Tsuchiya, Nonlinear effect of waves on wave pressure and wave force on a large cylindrical pile, *Proceeding of Ciuil Engineering Society in Japan* 229(1974). (in Japanese).

[2] Raman, H., N. Jothishankar and P. Venkatanara-saiah, Nonlinear wave ioter-action with vertical cylinder of large diameter, *J. of Ship Research*, 21 (2) (1977).

[3] Chakrabarti, S. K., Ccmments on second-order wave effects on large-cliame-ter vertical cylinder, *J. of Ship Research*, 22(4) (1978).

[4] Molin, B., Secodn order diffraction loads upon three-dimensional bodies, *Appl. Ocean Re.*, 1(4) (1979).

[5] Hunt, J.N. and R. E. Baddour, Second-order wave forces on vertical cylinder, *J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, ASCE, 108, (WW_3) (1982).

[6] Chen, M. and R. T. Hudspeth, Nonlinear diffraction by eigenfunction expansions, *J. of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division*, ASCE, 108 (1982).

[7] Chakrabati, S. K., Nonlinear wave effect on large offshore structure, *Second International Symposium on Ocean Engineering and Ship Handling*, (1983).

[8] 贺五洲、戴遗山，简单 Green 函数法求解三维水动力系数，中国造船，2(1986).

[9] 周清甫，柱体非线性散射问题的辐射条件，力学学报，17(47)(1985).

[10] 缪国平，刘应中，大直径圆柱上的二阶波浪力，中国造船，(1987)

[11] Kim, M. H. and D. K. P. Yue, The complete second-order diffraction solution for an axisymmetric body, *J. of Fluid Mech.*, 200(1989).

[12] 邹志利、戴遗山，Stokes 波中三维物体的二阶绕射问题，哈尔滨船舶工程学院博士学位论文，(1989).

[13] 梅强中，《水波动力学》，科学出版社(1984).

[14] Abramowitz, M. and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, Washington, D. C.(1964).

An Anayntical Solution of the Second-Order Wave Force on a Vertical Circular Cylinder

Zhou Zhi-li

(*Dalian University of Technology, Dalian*)

Dai Yi-shan

(*Harbin Shipbuilding Engineering Institute, Harbin*)

Abstract

An analytical solution of second-order diffraction potential for a vertical circular cylinder of large diameter is presented in this paper. The problem of second-order radiation condition is discussed and it is concluded that the circumferential components of the second-order potential have to satisfy the Sommerfeld radiation condition. By using the mathematical formulas derived in this paper, the inhomogeneos terms of second-order free surface boundary condition are expressed in such a way that the particular solution of the second-order potential can be easily written out. The exact expression of the second-order wave force given in this method is simple and easy to be caculated numericully. Numerical results are also compared with expevimental values.

Key words water wave, second-order force, radiation condition, diffraction