应用数学和力学，第15卷第8期（1994年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

隐变分不等式研究的半序方法*

张石生　饶　玲

（四川大学数学系，1992年10月7日收到）

摘　要

本文利用半序方法在Hausdorff拓扑线性空间中研究了一类一般形式的单调型隐变分不等式解的存在性问题。作为应用的例子，在文末我们应用所得结果，讨论了Nash平衡问题及半线性椭圆型方程解的存在性问题。

关键词　隐变分不等式　T-单调映象　严格T-单调映象　Nash平衡问题

在[6]中，Mosco利用拓扑方法研究了Hausdorff拓扑线性空间中隐变分不等式解的存在性问题，同时利用半序方法得到了Banach空间中一类特殊的单调型隐变分不等式解的存在性定理。

本文利用半序方法研究了Hausdorff拓扑线性空间中一般形式的单调型隐变分不等式解的存在性问题。作为这一结果的应用，我们在第四节中讨论了Nash平衡问题及半线性椭圆方程解的存在性。

一、定义及符号

半序集$(A,\leqslant)$称为格，如果对任意的$u,v\in A$，其上确界$u\vee v$及下确界$u\wedge v$均存在且都属于A。若B为A的子集，且对任意的$u,v\in B$有$u\vee v\in B, u\wedge v\in B$，则$B$称为$A$的子格。

设E为一矢量空间，"$\leqslant$"为E上的半序。$(E,\leqslant)$称为半序矢量空间，如果满足下面的相容性公理：

(i)　$\forall f,g,h\in E$，$f\leqslant g\Longrightarrow f+h\leqslant g+h$；

(ii)　$\forall f\in E$，$\forall \alpha\in R$，$\alpha\geqslant 0$，$f\leqslant 0\Longrightarrow \alpha f\leqslant 0$。

设$(E,\leqslant)$为半序矢量空间，如果E的任一非空有限子集的上、下确界均存在，则$(E,\leqslant)$称为矢量格。

由定义易知（见[2]），如果$(A,\leqslant)$为矢量格，则

$$u+v=u\vee v+u\wedge v,\qquad \forall u,v\in A$$

若X为Banach空间，$P\subset X$为闭锥。在X上定义半序"$\leqslant$"为：$y\leqslant x\Longleftrightarrow x-y\in P$，$\forall x,y\in X$。则$(X,\leqslant)$成为半序Banach空间，记为O. B. S.

* 国家自然科学基金资助课题

设X为矢量格，X^*为X的代数对偶空间．对任意的$f,g\in X^*$，定义 $f\leqslant^* g\Longleftrightarrow(f,u)\leqslant(g,u)$，$\forall u\in X_+$，$X_+:=\{v\in X:v\geqslant 0\}$，这里$(\cdot,\cdot)$表$X^*$和$X$之间的配对．

设X为格，设$j:X\to(-\infty,+\infty]$是一泛函，其定义域$\mathrm{dom}(j)=\{u\in X:j(u)<+\infty\}$．定义$F_{\leqslant}(X):=\{j:X\to(-\infty,+\infty]$，且$j$满足下面的条件(i)和(ii)$\}$：

(i) $\forall u,v\in\mathrm{dom}(j)$，则$u\vee v$，$u\wedge v\in\mathrm{dom}(j)$；

(ii) $j(u\wedge v)+j(u\vee v)\leqslant j(u)+j(v)$，$\forall u,v\in\mathrm{dom}(j)$．

现在集合$F_{\leqslant}(X)$上定义半序“$\leqslant_F$”如下：

$$j_1,j_2\in F_{\leqslant}(X),\ j_1\leqslant_F j_2\Longleftrightarrow\text{满足下列二条件：}$$

(i) $u\in\mathrm{dom}(j_1)$，$v\in\mathrm{dom}(j_2)$，则$u\wedge v\in\mathrm{dom}(j_1)$，$u\vee v\in\mathrm{dom}(j_2)$；

(ii) $j_1(u\wedge v)+j_2(u\vee v)\leqslant j_1(u)+j_2(v)$，$\forall u\in\mathrm{dom}(j_1)$，$\forall v\in\mathrm{dom}(j_2)$．

设X为格，$P_{\leqslant}(X)$为由下式定义的集合族：

$$P_{\leqslant}(X):=\{K\subset X,\ K\text{为}X\text{的子格，且}K\neq\phi\}.$$

现在$P_{\leqslant}(X)$上定义半序“$\leqslant_P$”如下：

$K_1,K_2\in P_{\leqslant}(X)$，$K_1\leqslant_P K_2\Longleftrightarrow$对任意的$u\in K_1$，$v\in K_2$，则$u\wedge v\in K_1$，$u\vee v\in K_2$．

记

$$\delta(K,u)=\begin{cases}0, & u\in K,\\ +\infty, & u\notin K,\end{cases}\quad\text{其中}K\subset X,\ u\in X$$

易知$\forall K_1$，$K_2\in P_{\leqslant}(X)$，$K_1\leqslant_P K_2\Longleftrightarrow\delta(K_1,u)\leqslant_F\delta(K_2,u)$．

若X为矢量格，映象$A:X\to X^*$称为

(1) 单调，如果$(Au-Av,u-v)\geqslant 0$，$\forall u,v\in X$；

(2) 严格单调，如果$(Au-Av,u-v)>0$，$Au,v\in X,u\neq v$；

(3) T-单调，如果$(Au-Av,u-u\wedge v)\geqslant 0$，$\forall u,v\in X$；

(4) 严格T-单调的，如果

$$(Au-Av,u-u\wedge v)>0,\quad\forall u,v\in X,\quad u\neq u\wedge v.$$

若X为格，$\varphi:X\times X\to R$．称φ为

(1) 单调，如果$\varphi(x,y)+\varphi(y,x)\leqslant 0$，$\forall x,y\in X$；

(2) 严格单调，如果

$$\varphi(x,y)+\varphi(y,x)<0,\quad\forall x,y\in X,x\neq y;$$

(3) T-单调的，如果$\varphi(x,x\wedge y)+\varphi(y,x\vee y)\leqslant 0$，$\forall x,y\in X$；

(4) 严格T-单调的，如果

$$\varphi(x,x\wedge y)+\varphi(y,x\vee y)<0,\quad\forall x,y\in X,\quad x\neq x\wedge y.$$

由定义不难证明，当X为矢量格时，令$\varphi(x,y)=(Ax,y-x)$，其中$A:X\to X^*$，则由A的单调性可推出φ的单调性；而当A为T-单调时，φ为T-单调的．事实上，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(x,x\wedge y)+\varphi(y,x\vee y)&=(Ax,x\wedge y-x)+(Ay,x\vee y-y)\\&=-(Ax-Ay,x-x\wedge y)\leqslant 0\end{aligned}$$

若X为格，令

$$T(X):=\{\varphi:X\times X\to R,\ \varphi\text{为严格}T\text{-单调的}\}$$

现在集合$T(X)$上定义“$\leqslant_T$”如下：

$$\forall\varphi_1,\varphi_2\in T(X),\ \varphi_1\leqslant_T\varphi_2\Longleftrightarrow\varphi_1(u,u\wedge v)+\varphi_2(u,u\vee v)<0,$$
$$\forall u,v\in X,\quad u\neq u\wedge v$$

易知关系“$\leqslant_T$”满足自反性.

二、引　　理

设X为格，$\varphi\in T(X)$，$j\in F_{\leqslant}(X)$. 所谓的单调型隐变分不等式是求$u\in X$，使得

$$\varphi(u,v)+j(v)-j(u)\geqslant 0,\qquad \forall v\in X \tag{2.1}$$

记为$\{X,\varphi,j\}$.

引理1　设$u_i\in X$为单调型隐变分不等式$\{X,\varphi_i,j_i\},i=1,2$ 的解，且 $j_1\leqslant_F j_2$，$\varphi_1\leqslant_T\varphi_2$. 则

$$u_1\leqslant u_2$$

证　因

$$\varphi_1(u_1,v)+j_1(v)-j_1(u_1)\geqslant 0,\qquad \forall v\in X \tag{2.2}$$

$$\varphi_2(u_2,v)+j_2(v)-j_2(u_2)\geqslant 0,\qquad \forall v\in X \tag{2.3}$$

$$j_1\leqslant_F j_2\Longrightarrow -j_1(u_1\wedge u_2)+j_1(u_1)\geqslant j_2(u_1\vee u_2)-j_2(u_2) \tag{2.4}$$

在(2.2)中取$v=u_1\wedge u_2$，在(2.3)中取$v=u_1\vee u_2$，于是由(2.4)即得

$$\varphi_1(u_1,u_1\wedge u_2)\geqslant j_1(u_1)-j_1(u_1\wedge u_2)$$
$$\geqslant j_2(u_1\vee u_2)-j_2(u_2)\geqslant -\varphi_2(u_2,u_1\vee u_2)$$

i·e　$$\varphi_1(u_1,u_1\wedge u_2)+\varphi_2(u_2,u_1\vee u_2)\geqslant 0$$

因$\varphi_1\leqslant_T\varphi_2$，故$u_1=u_1\wedge n_2$，即$u_1\leqslant u_2$. □

设X为一矢量格，设$A:X\to X^*$，$f\in X^*$，$j:X\to R$为一真凸下半连续函数. 我们把求 $u\in X$，使其满足以下变分不等式

$$(Au,v-u)+j(v)-j(u)\geqslant(f,v-u),\qquad \forall v\in X \tag{2.5}$$

的问题记为$\{X,A,f,j\}$.

由引理1可得下面的

引理2[3]　设$(X,\leqslant)$为矢量格，$A:X\to X^*$为严格T-单调算子，f_1，$f_2\in X^*$；j_1，$j_2\in F_{\leqslant}(X)$为二真凸下半连续函数且$j_1\leqslant_F j_2$. 如果u_i为$\{X,A,f_i,j_i\},i=1,2$，的解，则$u_1\leqslant u_2$.

设X是一半序Hausdorff 拓扑空间，如果拓扑和半序满足下述的相容性公理：如果 $x_n\leqslant y_n$，$x_n\to x$，$y_n\to y$，则$x\leqslant y$. 则称X是一个序列相容的半序Hausdorff拓扑空间.

设X是一个序列相容的半序Hausdorff 拓扑空间，S是X的一个子集. 如果对S的每一可数的全序子集$\{x_n\}$都存在子列$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$及$\bar{x}\in X$，使得$x_{n_i}\to\bar{x}$. 则称$S$是$X$ 中的拟紧集. 如果对S的每一全序子集Δ都存在Δ的至多为可数的子集$\{x_n\}\subset\Delta$在Δ中稠密（即 $\forall x\in\Delta$，存在子列$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$，使得$x_{n_i}\to x$）则称$S$为$X$中的拟可分集.

由定义易知，列紧集一定是拟紧集，可分集一定是拟可分的.

引理3[4]　设X是一序列相容的半序Hausdorff 拓扑空间，$D=[u_0,v_0]:=\{x\in X:u_0\leqslant x\leqslant v_0\}$是$X$中的序区间，$A:D\to X$是增算子，$u_0\leqslant Au_0$，$Av_0\leqslant v_0$，且 $A(D)$ 是X中的拟可分的拟紧集. 则A在D中存在最大和最小的不动点.

引理4[4]　设X是Banach空间，$P\subset E$是锥，$D=[u_0,v_0]$ 是E中的序区间，$A:D\to D$ 是增算子，若满足下列之一条件:

(i)　E是弱序列完备的，P是正规的；

(ii)　P是正则锥.

则A在D中有最大和最小的不动点。

引理5[6] 设H为一完全格（即H中任一有界子集必有上确界），$S:H\to H$为一增算子且存在$u,v\in H$，使得$u\leqslant Su$，$Sv\leqslant v$。则S在$[u,v]$中存在最大和最小的不动点。

三、主要结果

定理1 设E是Hausdorff拓扑线性空间，X为E的紧凸子集，设H是格，X和E是H的子格。设$\varphi:H\times X\times X\to R$，$j:H\times X\to R$满足条件：

(i) $(x,y)\mapsto\varphi(z,x,y)$严格单调半连续，$y\mapsto\varphi(z,x,y)$凸下半连续，$x\mapsto\varphi(z,x,y)$上半连续，$x\mapsto j(z,x)$为凸下半连续；

(ii) 对每一$z\in H$，令

$$\Omega(z)=\{x\in X:\varphi(z,x,y)\geqslant j(z,x)-j(z,y),\forall y\in X\}$$

设存在a_1，$a_2\in E$，使得$a_1\leqslant\Omega(a_1)$，$\Omega(a_2)\leqslant a_2$；

(iii) $\forall z\in H$，$(x,y)\mapsto\varphi(z,x,y)$严格$T$-单调，$j(z,\cdot)\in F_<(X)$；且$\forall z_1,z_2\in[a_1,a_2]_H=\{x\in H:a_1\leqslant x\leqslant a_2\}$，当$z_1\leqslant z_2$时$\varphi(z_1\cdot,\cdot)\leqslant_T\varphi(z_2,\cdot,\cdot)$，$j(z_1,\cdot)\leqslant_F j(z_2,\cdot)$；

(iv) H满足下列之一条件：

(a) H为完全格；

(b) H为序列相容的半序Hausdorff拓扑空间，$[a_1,a_2]_H\cap X$为拟紧的，并在H中是拟可分的。

则变分不等式

$$\varphi(x,x,y)\geqslant j(x,x)-j(x,y),\qquad\forall y\in X\tag{3.1}$$

在$[a_1,a_2]_H\cap X$中有最大和最小解。

证 由[1，定理3.9.3]及条件(i)知，$\forall u\in H$，存在唯一$w\in\Omega(u)$。现定义$S:H\to X$，$S(u)=w$。由引理1及条件(iii)知：S在$[a_1,a_2]_H\cap X$内保序。再由条件(ii)知$S:[a_1,a_2]_H\to[a_1,a_2]_H\cap X$。由条件(iv)及引理3和引理5得知$S$在$[a_1,a_2]_H$内有最大和最小不动点，$x^*,x_*$。因$S(x^*)$，$S(x_*)\in X$，故$x^*,x_*\in X$。因此变分不等式(3.1)在$[a_1,a_2]_H\cap X$中有最大和最小解$x^*$，$x_*$。 □

隐变分不等式(3.1)包含许多特殊形式的隐变分不等式。下面我们讨论某些特殊形式的隐变分不等式解的存在性问题。当

$$\varphi(z,x,y)=(A(z,x),y-x),\ j(z,x)=\delta(Q(z),x)-f(x)$$

时，我们有下面的

定理2 设X为实自反Banach空间，V为X的闭凸子集，H为矢量格，V，X是H的子格。设$A:H\times X\to X^*$，$Q:H\to 2^V$（2^V为V的一切闭凸子格的全体），$f\in X^*$。再设

(i) $\forall z\in H$，$A(z,\cdot)$是严格T-单调的半连续映象，而且是强制的，即$\forall u\in H$，存在$v_0\in Q(u)$，使得

$$\lim_{\|v\|\to\infty,v\in X}\frac{(A(u,v),v-v_0)}{\|v\|}=+\infty;$$

(ii) H满足下述之一条件：

(a) H为完全格；

(b) H为半序Banach空间（半序由锥给出），P正则（或P正规而且H是弱序列完备

的)；

(iii) 对任一$u\in H$，令

$$\Omega(u)=\{v\in Q(u):(A(u,v),w-v)\geqslant(f,w-v),\forall w\in Q(u)\},$$

存在$a_1,a_2\in H$，使得$a_1\leqslant\Omega(a_1)$，$\Omega(a_2)\leqslant a_2$；

(iv) $\forall u_1,u_2\in[a_1,a_2]_H,A(u_1,\cdot)\leqslant_T A(u_2,\cdot)$，$Q(u_1)\leqslant_P Q(u_2)$。则变分不等式

$$\left.\begin{array}{l} u\in V,\ u\in Q(u) \\ (A(u,u),w-u)\geqslant(f,w-u), \qquad \forall w\in Q(u) \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

在$V\cap[a_1,a_2]_H$中存在最大和最小解。

证 对任一$z\in H$，由$A(z,\cdot)$是严格T-单调的，易知$A(z,\cdot)$在X上也是严格单调的。由条件(i)及[1,定理2.2.11]知，存在唯一$w\in\Omega(z)$。于是可定义映象$S:H\to V,S(z)=w$.令

$$\varphi(z,x,y)=(A(z,x),y-x)$$

$$j(z,x)=\delta(Q(z),x)-(f,x)$$

则 $$\Omega(u)=\{v\in V:\varphi(u,v,w)+j(u,w)-j(u,v)\geqslant 0\}$$

由引理1及条件(iv)知：S在$[a_1,a_2]_H$上保序，又由条件(iii)知 $S:[a_1,a_2]_H\to[a_1,a_2]_H\cap V$。再利用引理4、引理5及条件(iii)知$S$在$[a_1,a_2]_H$中有最大和最小不动点 u^*,u_*。因 $S(u^*)$ 和 $S(u_*)\in V\cap[a_1,a_2]_H$故$u^*,u_*\in[a_1,a_2]_H\cap H$，故(3.2)在$V\cap[a_1,a_2]_H$中有最大和最小解$u^*$和$u_*$。 □

定理3 设(i)X是实的自反Banach空间，V为X的闭凸子集，H是矢量格；V，X是H的子格。设$A:X\to X^*$是严格T-单调的且为强制半连续的；

(ii) H满足下列之一条件：

(a) H为完全格；

(b) H为半序Banach空间（半序由锥P给出），P正则（或P正规且H 为弱序列完备的）；

(iii) $\forall u\in H$，令

$$\Omega(u)=\{x\in V:(A(x),y-x)\geqslant(F(u),y-x),\forall y\in V\}$$

存在$a_1,a_2\in H$，使得$a_1\leqslant\Omega(a_1)$，$\Omega(a_2)\leqslant a_2$；

(iv) 设$F:H\to X^*$，且$\forall u_1,u_2\in[a_1,a_2]_H$，$F(u_1)\leqslant^* F(u_2)$则变分不等式

$$(Au,v-u)\geqslant(F(u),v-u), \qquad \forall v\in V \tag{3.3}$$

在$[a_1,a_2]_H\cap V$中有最大和最小解。

证 在定理2中取$A(u,v)=Av-F(u)$，$Q(u)\equiv V$，$f\equiv 0$。则由定理2得知结论成立。

□

定理4 设(i)E是实的可分Banach空间，X为E的闭凸子集，H为矢量格；X，E为H的子格，$A:E\to E^*$，$j:H\times E\to R$，$f\in E^*$。A是严格 T-单调半连续的有界映象，而且是强制的，即$\forall z\in H$，存在$v_0\in X$，使得

$$\lim_{\|v\|\to\infty,v\in E}\frac{(Av,v-v_0)+j(z,v)}{\|v\|}=+\infty$$

$j(z,x)$关于x是凸下半连续的；

(ii) H满足下列之一条件：

(a) H为完全格；

(b) H为半序 Banach 空间（半序由锥P给出），P是正则的（或P是正规的，且H是弱序列完备的）；

(ii) $\forall z\in H$，令

$$\Omega(z)=\{x\in X:(Ax,y-x)+j(z,x)-j(z,y)\geqslant(f,y-x),\forall y\in X\}$$

存在a_1，$a_2\in E$，使得$a_1\leqslant\Omega(a_1)$，$\Omega(a_2)\leqslant a_2$；

(iv) $\forall z\in[a_1,a_2]_H$，$j(z,\cdot)\in F_{<}(E)$；$\forall z_1,z_2\in[a_1,a_2]_H$，当$z_1\leqslant z_2$时，就有 $j(z_1,\ )\leqslant_P j(z_2,\cdot)$。

则变分不等式

$$(Ax,y-x)+j(x,y)-j(x,x)\geqslant(f,y-x),\qquad\forall y\in X\tag{3.4}$$

在$[a_1,a_2]_H\cap X$中有最大和最小解。

证　由[1，定理2.3.4]及条件(i)知，$\forall z\in H$，存在唯一$w\in\Omega(z)$。定义$S:H\to X$，$S(z)=w$。于是由引理2及条件(iv)知S在$[a_1,a_2]_H$上保序。再由条件(iii)知，$S:[a_1,a_2]_H\to[a_1,a_2]_H\cap X$。故由引理4、引理5和条件(ii)知$S$在$[a_1,a_2]_H$上有最大和最小不动点$x^*$，$x_*\in[a_1,a_2]_H\cap X$。而$x^*,x_*$即为(3.4)的最大和最小解。□

四、应　用

现给出上述结论对 Nash 平衡问题及半线性椭圆型微分方程解的存在性问题方面的应用。

设$E_1,\cdots,E_n$为Hausdorff拓扑线性空间，设 $C=C_1\times C_2\times\cdots\times C_n$ 为积空间 $E=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$的子集；$J_1,\cdots,J_n$为$n$个实值函数，$J_i:C_i\to R$，$i=1,\cdots,n$。$Q_i(u)$ 为C_i的非空子集，$i=1,\cdots,n,u\in C$。

所谓的Nash平衡问题是求$u=(u_1,\cdots,u_n)\in C$，使得

$$\left.\begin{array}{ll} u_i\in Q_i(u), & (i=1,\cdots,n)\\ J_i(u_1,u_2,\cdots,u_n)\leqslant J_i(u_1,\cdots,u_{i-1},v_i,u_{i+1},\cdots,u_n), & \forall v_i\in Q_i(u)\end{array}\right\}\tag{4.1}$$

令$\varphi(u,w)=J(u,w)-J(u,u)$，其中

$$J(u,w)=\sum_{i=1}^{n}J_i(u_1,\cdots,u_{i-1},w_i,u_{i+1},\cdots,u_n)$$

$$Q(u)=Q_1(u)\times\cdots\times Q_n(u)$$

则(4.1)等价于求$u\in C$，使得（见[1,p.240]）

$$\varphi(u,w)+\delta(Q(u),w)\geqslant\delta(Q(u),u),\qquad\forall w\in C\tag{4.2}$$

定理5　设(i)E为Hausdorff拓扑线性空间，C为E的紧凸子集，H是格，E，C是H的子格；$J:C\times C\to R$，$Q:C\to 2^C$ 而且对每一 $u\in C$，$Q(u)\subset C$ 为闭凸子集且为C 的子格；$x\mapsto J(x,y)$上半连续；

(ii) $\forall z\in H$，令

$$\Omega(z)=\{x\in Q(z):J(x,y)\geqslant0,\forall y\in Q(z)\}$$

设存在$a_1,a_2\in H$，使得$a_1\leqslant\Omega(a_1),\Omega(a_2)\leqslant a_2$；

(iii) H满足下列之一条件：

(a) H为完全格；

(b) H为序列相容的半序Hausdorff拓扑空间，$[a_1,a_2]_H\cap C$在H中拟紧，并拟可分；

(iv) $J(x,y)$关于(x,y)严格T-单调；$\forall z_1,z_2\in[a_1,a_2]_H Q(z_1)\leqslant_P Q(z_2)$.

则Nash平衡问题有解，即存在$u\in C$，使得

$$u\in Q(u),J(u,w)\geqslant J(u,u),\qquad \forall w\in Q(u) \tag{4.3}$$

证 在定理1中取$\varphi(z,x,y)=J(x,y)-J(x,x)$，$j(x,y)=\delta(Q(x),y)$，不难证明定理1中的条件被满足．故由定理1，存在$u\in C$，使得

$$J(u,w)-J(u,u)+\delta(Q(u),w)-\delta(Q(u),u)\geqslant 0,\qquad \forall w\in C \tag{4.4}$$

从而$u\in Q(u)$且满足(4.3)．定理结论得证 □

定理6 设Ω是R^n中的有界区域，Γ为Ω的边界且光滑．设

$$V=W^{1,p}(\Omega)=\left\{v\in L^p(\Omega):\frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^p(\Omega),i=1,2,\cdots,n\right\},\qquad p>1$$

设 $K=\{v\in W^{1,p}(\Omega):v\geqslant 0$，a.e.于$\Gamma$上$\}$

设 $a_0\in L^\infty(\Omega)$，$a_0(x)\geqslant\alpha>0$，a.e.于Ω

设$A:W^{1,p}(\Omega)\to(W^{1,p}(\Omega))^*$($W^{1,p}(\Omega)$的对偶空间）由下式定义：

$$Au=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+a_0|^{p-2}u$$

设$F:L^p(\Omega)\to(W^{1,p}(\Omega))^*$，且存在$f_1$，$f_2\in(W^{1,p}(\Omega))^*$使得

(i) $\forall u\in L^p(\Omega)$，$f_1\leqslant F(u)\leqslant f_2$，a.e.于$\Omega$上；

(ii) $\forall u_1,u_2\in L^p(\Omega)$，当$u_1\leqslant u_2$，a.e.于$\Omega$时，有

$F(u_1)\leqslant F(u_2)$， a.e.于Ω中

则下面的微分方程在K中有解：

$$\left.\begin{array}{l}
Au=F(u),\quad \text{在}D'(\Omega)\text{意义下}\\
u\geqslant 0,\quad \text{在}W^{1-1/p,p}(\Gamma)\text{意义下}\\
\displaystyle\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_i\geqslant 0,\quad \text{在}W^{-1/p',p'}(\Gamma)\text{意义下}\\
\displaystyle\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}n_i\cdot u=0,\\
\qquad \text{在}W^{-1/p',p'}(\Gamma)\text{和}W^{1/p',p}(\Gamma)\text{对偶意义下}
\end{array}\right\} \tag{4.5}$$

证 $\forall u,v\in W^{1,p}(\Omega)$，令

$$(Au,v)=a(u,v)=\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_\Omega a_0|u|^{p-2}u\cdot v\,dx$$

由[5]知，(4.5)的解即为下面的变分不等式(4.6)的解：

求$u\in K$，使得 $$(Au,u-v)\leqslant(F(u),u-v),\qquad \forall v\in K \tag{4.6}$$

于定理3中取$X=W^{1,p}(\Omega)$，$V=K$，$H=L^p(\Omega)$．则X为实的自反Banach空间，$V\subset X$为闭凸集，H为半序Banach空间，其半序由锥$P=\{f\in L^p(\Omega):f(x)\geqslant 0$，a.e.于$\Omega\}$，且$H$为矢量格，$X$，$V$为$H$的子格（见[6]）．另$H$显然是正规的，又因$H$是自反的，故是弱序列完备的（见[7]）．又由[5]和[6]知A是有界强制半连续且为严格T-单调的．

下证在定理6的条件下，定理3中的条件(iii)，(iv)被满足．

事实上，由假设存在$f_1,f_2\in(W^{1,p}(\Omega))^*$，故由[1,定理2.2.11]知存在$a_1,a_2\in L^p(\Omega)$分别是下面两个变分不等式的解：

$$(Au,u-v)\leqslant(f_1,u-v),\qquad \forall v\in K \tag{4.7}$$

$$(Au,u-v)\leqslant(f_2,u-v),\qquad \forall v\in K \tag{4.8}$$

由条件(i)知

$$f_1\leqslant F(a_1),\ f_2\geqslant F(a_2),\qquad \text{a.e. 于}\Omega\text{上}$$

于是由引理2，a_1,a_2满足定理3中的条件（iii）。另由条件(ii)知F是保序的，故定理3中的条件(iv)也满足。因而定理3中的条件被满足。故由定理3知(4.6)在K中有解，从而(4.5)在K中有解。 □

参 考 文 献

[1] 张石生，《变分不等式和相补问题理论及应用》，上海科技文献出版社，上海（1991）.

[2] Baiocchi, C. and A. Capelo, *Variational and Quasi-Variational Inequalities*, A Wiley-Interscience Publication, New York (1984).

[3] Kratzchmar, M., Elliptic variational inequalities of monotone kind, *Nonlinear Anal. TMA* 15(4) (1990), 307—320.

[4] 郭大钧、孙经先，《抽象空间常微分方程》，山东科学技术出版社（1989）.

[5] 王耀东，《变分不等式方程》，高等教育出版社（1987）.

[6] Mosco, U., Implicit variational problems and quasi-variational inequalities, *Lecture Notes in Mathematics*, 543 (1976).

[7] 俞鑫泰，《Banach空间几何学》， 范大学出版社（1986）.

On the Partially Ordered Methods in the Study of Implicit Variational Inequalities

Zhang Shi-sheng Rao Ling

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

By using the partially ordered methods, the existence problem of solutions for more general implicit variational inequalities of monotone type in Hansdorff topological linear spaces are considered. As application we utilize the results presented in this paper to study the existence of solutions for Nash equilibrium problem and the semi-linear elliptic differential equations.

Key words implicit variational inequality, T-monotone mapping, strictly T-monotone mapping, Nash equilibrium problem