应用数学和力学，第15卷第8期(1994年8月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

由偏微支配的系统的最优控制理论中的奇异摄动方法*

田根宝　　林宗池

（上海铁道学院数学科）（福州 福建师范大学数学系）

（1993年5月14日收到）

摘　要

本文介绍了由偏微分方程支配的系统的最优控制理论中有关应用奇异摄动方法时出现的各种问题．考虑了渐近分析来自状态方程，或来自性能指标函数，也考虑了状态方程是定义在摄动域内的情形．

关键词　最优控制　摄动技巧　偏微分方程

一、引　言

众所周知，最优控制理论中碰到的主要困难之一显然在于系统的维数多、阶数高、规模大，尤其是数值计算的规模．

因而一个自然的想法就是采用奇异摄动法，以便简化问题．

这种思想已经广泛用于由常微分方程表示的系统的最优控制（可参阅文[1～2]）．本文将介绍关于由偏微分方程支配的系统的最优控制理论中的奇异摄动方法．

让我们以“抽象”的形式定义状态方程

$$Ly=f+Bv \tag{1.1}$$

其中L是一个无界算子——线性的或非线性的；我们在$D(L)$中（L的定义域）求y；(1.1)的右边，f是给定的，$v\in U$＝控制空间；B是从U到L的值域的线性算子，设(1.1)具有唯一解，用$y(v)$表示，它是系统的状态．

给定性能指标函数$J(v)$为

$$J(v)=\Phi(y(v))+\Psi(v) \tag{1.2}$$

其中，Φ和Ψ分别是L的给定值域上和U上的泛函．

容许控制集U_{ab}定义为

(i)　关于v的约束——例如$v\in U_{ab}\subset U$；

(ii)　关于$y(v)$的约束——例如$y(v)\in K\subset L$的值域．

最优控制问题是求

$$\inf J(v),\ v\in U_{ab} \tag{1.3}$$

* 国家自然科学基金和福建省科学基金资助课题．

和求一个元素$u\in U_{ad}$，如果它存在的话，它满足

$$J(u)=\inf J(v) \tag{1.4}$$

该元素u即叫做最优控制.

奇异摄动方法

当问题的数据里存在数量级不同的系数时，人们就会想到采用奇异摄动方法.

我们将用$\varepsilon>0$表示一个小参数.

我们引进下列三种主要情形的摄动.

二、状态方程的摄动

令L_ε为一族无界算子——我们记住在各实例中是偏微分算子.

现在状态方程是

$$L_\varepsilon y_\varepsilon=f+Bv \tag{2.1}$$

假设它具有唯一解$y_\varepsilon(v)$.

性能指标函数是

$$J_\varepsilon(v)=\Phi(y_\varepsilon(v))+\Psi(v) \tag{2.2}$$

令u_ε是(2.2)的一个最优控制——假定存在的话. 假定当$\varepsilon\to0$时，L_ε在某种意义上"收敛到一个比L_ε，$\varepsilon>0$"更简单"的算子L_0，这意味着按某个拓扑，$y_\varepsilon(v)$收敛到$y_0(v)$，其中

$$L_0y_0(v)=f+Bv,\qquad y_0(v)\in D(L_0) \tag{2.3}$$

如果性能指标函数在$D(L_0)$上连续，则"极限"问题就是在U_{ad}上使泛函

$$J_0(v)=\Phi(y_0(v))+\Psi(v) \tag{2.4}$$

极小. 就此情况而论，问题在于：

（1） 解极限问题——它是一个比初始问题"更简单"的问题.

（2） 查明在什么意义下用极限问题"逼近"原问题——和例如可能的话用摄动法找到u_ε的渐近展开式.

例 1 令Ω为R^n的一有界开集，具有边界Γ. 令A为二阶椭圆型算子，由下式给定：

$$A\varphi=-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right),\qquad a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$$

$$\sum a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j\geqslant\alpha\sum\zeta_i^2,\qquad \alpha>0,\ \text{a. e. 在}\Omega\text{中} \tag{2.5}$$

状态由下式给定

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon Ay_\varepsilon(v)+y_\varepsilon(v)=f+v, &&\text{在}\Omega\text{中}\\&\partial y_\varepsilon(v)/\partial v_A=0, &&\text{在}\Gamma\text{上}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

其中，$\partial/\partial v_A$表示联系A的余法向导数.

按变分形式，我们引入索波列夫空间：

$$H^1(\Omega)=\left\{\varphi\,\middle|\,\varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\in L^2(\Omega),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\right\}$$

具有其通常的希尔伯特结构；对于φ，$\Phi\in H^1(\Omega)$，我们令

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(\varphi,\Phi)=\sum\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx\\&(f,\Phi)=\int_\Omega f\Phi dx\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

则(2.6)等价于：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon a(y_\varepsilon(v),\varphi)+(y_\varepsilon(v),\varphi)=(f+v,\varphi)\\&\forall\varphi\in H^1(\Omega),\qquad y_\varepsilon(v)\in H^1(\Omega)\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

我们假定

$$v\in U_{ab}=L^2(\Omega)\text{的闭凸子集.}\tag{2.9}$$

方程(2.8)有唯一解.

性能指标函数由下式给出

$$J_\varepsilon(v)=\int_\Omega|y_\varepsilon(v)-Z_d|^2dx+N\int_\Omega v^2dx\tag{2.10}$$

其中Z_d是给定在$L^2(\Omega)$中，且其中$N>0$.

众所周知（例如参看Lions[6]和那里的文献目录），当$\varepsilon\to0$时，$y_\varepsilon(v)\to L^2(\Omega)$中的$y(v)$，其中

$$y(v)=f+v\tag{2.11}$$

极限问题是直截了当的

$$J(v)=\int_\Omega[|f+v-Z_d|^2+Nv^2]dx\tag{2.12}$$

若u表示

$$\inf J(v),\qquad v\in U_{ab}\tag{2.13}$$

的解，则当$\varepsilon\to0$时$u_\varepsilon\to u$，$u\in L^2(\Omega)$. 下一步就是用摄动法求u_ε的展开式（参看文[3～4]).

三、性能指标函数的摄动

令状态方程由(1.1)式给定，令Φ_0和Φ_1为两个$D(L)$上的已知泛函. 我们假设性能指标函数给定为

$$J_\varepsilon(v)=\Phi_0(y(v))+\varepsilon\Phi_1(y(v))+\Psi(v)\tag{3.1}$$

于是极限问题是使

$$J_0(v)=\Phi_0(y(v))+\Psi(v)\tag{3.2}$$

极小. 这是一个可比原始问题更简单的问题. 象情形二中一样，下一步就是查明极限问题按什么方式"逼近"原始问题.

例 2 考虑(2.5)式中给定的A并假定状态方程为

$$\left.\begin{aligned}&\partial y/\partial t+Ay=f,&&\text{在}\Omega\times]0,T[\text{中}\\&\partial y/\partial v_A=v,&&\text{在}\Sigma\text{上}\\&y(x,0)=y_0,&&\text{在}\Omega\text{中}\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

这里y_0给定在$L^2(\Omega)$中.

我们定义

$$c\varphi=\int_\Omega\varphi dx\tag{3.4}$$

并考虑性能指标函数

$$J_\varepsilon(v)=\int_0^T(cy(v)-Z_1)^2dt+\varepsilon\int_\Sigma(y(v)-Z_2)^2d\Sigma+N\int_\Sigma v^2d\Sigma\tag{3.5}$$

其中Z_1是在$L^2(0,T)$中给定和Z_2是在$L^2(\Sigma)$中给定.

若U_{ab}是$L^2(\Sigma)$的一个闭凸子集，我们考虑

$$\inf J_\varepsilon(v),\qquad v\in U_{ab} \tag{3.6}$$

令u_ε是(3.6)的唯一解并令$y(u_\varepsilon)=y_\varepsilon$。

（当$\varepsilon\to 0$时的）极限问题在这里很简单．定义

$$J_0(v)=\int_0^T (cy(v)-Z_1)^2 dt+N\int_\Sigma v^2 d\Sigma \tag{3.7}$$

并用u表示

$$J_0(u)=\inf J_0(v),\qquad v\in U_{ab},\ u\in U_{ab} \tag{3.8}$$

的解．容易证明

$$u_\varepsilon\to u,\qquad \text{在}L^2(\Sigma)\text{中，当}\varepsilon\to 0\text{时} \tag{3.9}$$

不过(3.8)是一个很简单的问题．事实上，从(3.3)得出

$$\frac{d}{dt}(cy)-\int_\Gamma v d\Gamma=cf,\ cy(0)=cy_0 \tag{3.10}$$

故

$$cy(v)=cy_0+\int_0^t cf(x,s)ds+\int_0^t ds\int_\Gamma v d\Gamma \tag{3.11}$$

因此，如果我们令

$$\mathbf{Z}_1=Z_1-cy_0-\int_0^t cf(x,s)ds \tag{3.12}$$

那么就有

$$J_0(v)=\int_0^T\left(\int_0^t ds\int_\Gamma v d\Gamma-\mathbf{Z}_1(t)\right)^2 dt+N\int_\Sigma v^2 d\Sigma \tag{3.13}$$

可见(3.7)是一个初等问题．

下一步就是要用摄动法寻求一个渐近展开式。如果是无约束的情形，一般地说，最优性系统如下：

$$\partial y_\varepsilon/\partial t+Ay_\varepsilon=f,\ -\partial p_\varepsilon/\partial t+A^* p_\varepsilon=cy_\varepsilon-Z_1 \tag{3.14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\partial y_\varepsilon/\partial v_A=u_\varepsilon\\&\partial p_\varepsilon/\partial v_{A^*}=\varepsilon(y_\varepsilon-Z_2),\qquad \text{在}\Sigma\text{上}\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

$$y_\varepsilon(x,0)=y_0(x),\ p_\varepsilon(x,T)=0 \tag{3.16}$$

$$\int_\Sigma (p_\varepsilon+Nu_\varepsilon)(u-u_\varepsilon)d\Sigma\geqslant 0,\qquad \forall v\in U_{ab},\ u_\varepsilon\in U_{ab} \tag{3.17}$$

其中p_ε是系统的状态y_ε的伴随状态；

$$A^*\varphi=-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^*_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right),\qquad a^*_{ij}(x)=a_{ji}(x)$$

在无约束情况下，$p_\varepsilon+Nu_\varepsilon=0$，如果我们找到一个展开式

$$y_\varepsilon=y^0+\varepsilon y^1+\cdots,\ p_\varepsilon=p^0+\varepsilon p^1+\cdots \tag{3.18}$$

我们就得到就(3.8)来说的y^0，p^0的最优性系统（但根据(3.13)这是没有用的）和y^1,p^1的系统：

$$\partial y^1/\partial t+Ay^1=0,\ -\partial p^1/\partial t+A^* p^1=cy^1 \tag{3.19}$$

$$y^1(x,0)=0,\ p^1(x,T)=0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial y^1}{\partial v_A}+\frac{1}{N}p^1=0,\quad \frac{\partial p^1}{\partial v_{A^*}}=y^0-Z_2,\qquad \text{在}\Sigma\text{上} \tag{3.21}$$

这个系统可以是去耦的。

实际上从(3.19)、(3.20)和(3.21)得到

$$\frac{d}{dt}cy^1=\frac{1}{N}\int_\Gamma p^1 d\Gamma,\quad (cy^1)(0)=0$$

从而

$$cy^1(t)=\frac{1}{N}\int_0^t ds\int_\Gamma p^1 d\Gamma$$

因此

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial p^1}{\partial t}+A^*p^1=\frac{1}{N}\int_0^t ds\int_\Gamma p d\Gamma, && p^1(x,T)=0\\ &\frac{\partial p^1}{\partial v_{A^*}}=y^0-Z_2, && \text{在}\Sigma\text{上}\end{aligned}\right\}\tag{3.22}$$

(3.22)中$y^0=y(u)$，其中u是(3.8)、(3.13)的解。所以p^1可以独立于y^1算得，且

$$u_\varepsilon=u-\frac{\varepsilon}{N}p^1+\cdots\tag{3.23}$$

不难证明展开式(3.23)的收敛性。且有

$$\left\|u_\varepsilon-\left(u-\frac{\varepsilon}{N}p^1\right)\right\|_{L^2(\Sigma)}\leqslant c\varepsilon^2\tag{3.24}$$

四、定义域的摄动

作为最优控制中摄动技术的最后一个例子，我们现在考虑由一个“摄动域”所描写的系统。更确切点说，我们准备考虑这样一个系统：其状态由定义域Ω_ε中的偏微分方程的解所给定，该域是一个更简单的域Ω_0的“摄动”；Ω_ε的边界Γ_ε解析地描述在下面的(4.1)式中，跟前几节一样，我们希望得到问题的“简单”近似。

令Ω_0为R^n的一个有界开集，具有光滑边界Γ_0。如果$x\in\Gamma_0$，我们用$v(x)$表示在x处Γ_0的西法线，方向指向Ω_0的外部。

令$\alpha(x)$为给定在Γ_0上的纯量连续函数。对于足够小的ε（为了避免任何拓扑困难），我们定义[6]

$$\Gamma_\varepsilon=\{x+\varepsilon\alpha(x)v(x)\,|\,x\in\Gamma_0\}\tag{4.1}$$

并用Ω_ε表Γ_ε“内部”的开集。

令E和F为包含在所有足够小ε的Ω_ε中的给定集，它们是>0测度的可测集。

对于$v\in L^2(E)$，我们通过

$$\left.\begin{aligned}&Ay_\varepsilon=f+v\chi_E, && \text{在}\Omega_\varepsilon\text{中}\\ &y_\varepsilon=0, && \text{在}\Gamma_\varepsilon\text{上}\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

定义系统的状态$y_\varepsilon(v)=y_\varepsilon$。(4.2)中的$A$是(2.5)式中的二阶椭圆型算子，其中$a_{ij}$定义在$U_\varepsilon\Omega_\varepsilon$的一个邻域中，$f$也是在该邻域内给定并属于$L^2$；$\chi_E$是$E$的特征函数。

令性能指标函数为

$$J_\varepsilon(v)=\int_F|y_\varepsilon(v)-Z_d|^2dx+N\int_E v^2dx\tag{4.3}$$

这里Z_d是在$L^2(F)$中给定的。我们要找$\inf J_\varepsilon(v)$，$v\in U_{ad}=L^2(E)$的闭凸子集。

这一问题具有唯一解u_ε，$y_\varepsilon(u_\varepsilon)=y_\varepsilon$。形式上，极限问题如下：我们定义$y_0(v)$是

$$\left.\begin{aligned}&Ay_0(v)=f+v\chi_E, &&\text{在}\Omega_0\text{中}\\&y_0(v)=0, &&\text{在}\Gamma_0\text{中}\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

的解，而极限问题是

$$\left.\begin{aligned}&\inf J_0(v), \quad v\in U_{ab}\\&J_0(v)=\int_F|y_0(v)-Z_d|^2dx+N\int_E v^2dx\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

显然，如果Γ_0是一个"简单"边界，另一方面，若Γ_ε是一个"复杂"边界（例如，对应于快速振荡函数a），则(4.5)比原始问题"简单"得多。

因此，一个自然的想法是试图通过在Ω_0上算得的函数展开u_ε和y_ε.

参考文献

[1] Kokotovic, P.V., R.E. O'Malley, Jr. and P. Sannuti, Singular perturbations and order reduction in control theory——An overview, *Automatica*, 12 (1976), 123—129.

[2] Kokotovic, P. V. and R. A. Vackel, Singular perturbation theory of linear state regulaters, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-17 (1972), 29—37.

[3] Lions, J. L., *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés Par des Equations aux Dérivées Partielles*, Dunod, Paris (1968); English trans. by S. K. Mitter, Springer (1971).

[4] Viski, M. I. and L. A. Lyusternik, Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter, *Usp. Mat. Nauk (Russian)* 12(5)(77), 3—122; *AMS Transl.*, ser. 2(20) (1962), 239—364.

[5] Линъ Цзун-чи(林宗池), Возмущение решений и возмущение собственных значений и собственных функций эллиптических уравнений второго порядка при возмущении границы, *ДАН СССР*, 157(4) (1964), 784—787.

[6] Lions, J. L., Perturbations singulières dans les problèms aux limites et en contrôle optimal, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag (1973).

Singularly Perturbed Methods in the Theory of Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations

Tian Gen-bao

(Mathematical Section, Shanghai Railway College, Shanghai)

Lin Zong-chi

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper, the various problems associated with the optimal control of systems governed by partial differential equations are introduced by using singularly perturbed methods for analysis based on state equations, or the cost function and also state equations defined in perturbed domains.

Key words optimal control, perturbation techniques, partial differential equations