应用数学和力学，第 15 卷第 8 期（1994年 8 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

对流动稳定性非线性理论中确定幅值演化方程系数的重新考虑*

罗 纪 生

（天津大学力学系，1993年3月24日收到）

摘 要

求解扰动速度幅值的演化规律，是流动稳定性非线性理论的关键问题之一。现有的方法都只能用于准中性的情况，或其中有一定的人为因素。本文将给出解决这一问题新方法。

关键词 扰动速度幅值 Landau系数 可解条件

一、引 言

在流动稳定性的非线性理论中，关键问题之一是求解扰动速度幅值的演化规律，即确定扰动速度幅值满足的所谓Landau方程的系数．对于扰动是中性的情况，Landau 系数用可解条件即能确定下来，这一结论是一致的．但是，对于扰动是非中性的情况，由于线性增长率不为零，如按中性情况使用可解条件，则原来方程中相速度虚部 c_i 的位置上这时会变为 $3c_i$，致使Landau系数无法确定．所以以往的非线性理论讨论的都是中性或是准中性的情况．类似的问题在用摄动法求解多自由度非线性振动问题中也会出现．

为了解决这一问题，也有许多学者提出了不同的方法，但都存在着一定的问题．W.C. Reynolds和M.C. Potter在1967年曾建议过一个方法[1]，但其方法是有问题的．N.Itoh (1974，1977）也建议过一个方法[2,3]，但用上述两种方法计算同一个问题会得到截然相反的结论．A.Davey（1978）为此进行过讨论[4]，但并没有解决这一问题．H.Zhou (周恒) (1982）提出了“人为中性”的方法[5]，但是当c_i较大时，该方法可能失效．T. Herbert (1983）针对平面Poisaulle流提出了一个方法[6]，但由于方法本身的局限，不能推广到平面边界层中的计算．而且上述两种方法也都有不同程度的人为因素．

本文将重新考虑这一问题，给出求解Landau系数的方法，本文方法不仅可适用于平面Poiseulle流和平板边界层流，而且也适用于多自由度的非线性振动中的类似问题．

---

* 周恒推荐．
国家教委优秀青年教师资助项目
1992年2月17日第一次收到．

二、方　　法

考虑平面Poiseuille流或在平行流假定下的边界层流动．设 $\bar{u}$ 为基本流速，x，y分别表示流动方向和平板法向．这里我们只讨论二维扰动的情况，对于三维情况可进行类似地讨论．

设二维扰动速度为$\tilde{\boldsymbol{u}}=(\tilde{u},\ \tilde{v})$，由不可压缩流体的Navier-Stokes方程可得到扰动速度所满足的方程

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{d\bar{u}}{dy}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+\frac{1}{R}\nabla^2\tilde{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\tilde{u}\tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}+\frac{1}{R}\nabla^2\tilde{v}-\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\tilde{v}\tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}=0\tag{2.2}$$

其中，$\tilde{p}$为扰动压力，R为雷诺数．方程（2.1a）对y求导，方程（2.1b）对x求导，两式相减消去$\tilde{p}$，并利用连续性方程(2.2)，可得到如下方程

$$\mathscr{L}\tilde{v}=\mathscr{F}(\tilde{\boldsymbol{u}},\ \tilde{\boldsymbol{u}})\tag{2.3}$$

其中

$$\mathscr{L}=\left(\frac{1}{R}\nabla^2-\frac{\partial}{\partial t}-\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2+\bar{u}''\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\mathscr{F}(\tilde{\boldsymbol{u}}_l,\tilde{\boldsymbol{u}}_k)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\boldsymbol{u}}_l\cdot\nabla\tilde{v}_k)-\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{\boldsymbol{u}}_l\cdot\nabla\tilde{u}_k)\right]$$

$\nabla=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$．方程（2.3）连同连续性方程(2.2)，加上适当的边界条件，就构成了求解扰动速度的定解问题．

扰动速度的线性解所满足的方程为

$$\mathscr{L}\tilde{v}=0\tag{2.4}$$

设解有行进波的形

$$\tilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}(y)e^{i(\alpha x-\omega t)}+\text{c.c.}$$

其中，c.c.表示共轭项，α表示波数，$\omega=\alpha c$，ω表示频率，c表示波速．代入方程（2.4）可得：

$$\left\{\left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2)+i\omega-i\alpha\bar{u}\right](D^2-\alpha^2)+i\alpha\bar{u}''\right\}v(y)=0\tag{2.5}$$

其中，$D=d/dy$．

对于时间模式，(2.5) 式可写为如下的形式：

$$L_0(v(y))=-i\omega L_1 v(y)$$

其中

$$L_0=\left[\frac{1}{R}(D^2-\alpha^2)-i\alpha\bar{u}\right](D^2-\alpha^2)+i\alpha\bar{u}''$$

$$L_1=D^2-\alpha^2$$

在给定α，R后，求解特征值$-i\omega$，使$v(y)$有非零解，该解就是线性问题扰动速度的解．

由推导的过程可知，这一问题可作如下的解释，设扰动速度的线性解为

$$\tilde{\boldsymbol{u}}=A(t)\boldsymbol{u}_1(y)e^{i\alpha x}+\text{c.c.}$$

其中$A(t)$为复的幅值，代入方程（2.4）可得：

$$L_0[A(t),\ v_1(y)]=\frac{\partial}{\partial t}L_1[A(t)\cdot v_1(y)]$$

由此可得 $$L_0[v_1(y)]=\frac{1}{A(t)}\frac{dA(t)}{dt}L_1[v_1(y)] \tag{2.6}$$

对于给定的α，R，要求$v_1(y)$有非零解，则有

$$\frac{1}{A(t)}\frac{dA(t)}{dt}=-i\omega$$

这样就得到了$A(t)$的线性演化方程。

$$\frac{dA(t)}{dt}=-i\omega A(t) \tag{2.7}$$

其中$-i\omega$就是方程（2.4）的特征值，方程（2.7）的解就是扰动幅值$a(t)=|A(t)|$随时间演化的线性解。即精确到一阶小量的解。

现在考虑非线性的情况，确定精确到三阶小量的幅值演化的方程（对于更高阶的情况，可以进行同样的讨论）。精确到三阶小量的扰动速度的形式一般地可设为下列形式：

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}=&A(t)\boldsymbol{u}_1(y)e^{i\alpha x}+A(t)\cdot\overline{A(t)}\boldsymbol{u}_{20}(y)+A(t)A(t)\boldsymbol{u}_{22}(y)e^{i2\alpha x}\\&+A(t)A(t)\overline{A(t)}\boldsymbol{u}_{31}(y)e^{i\alpha x}+A(t)A(t)A(t)\boldsymbol{u}_{33}(y)e^{i3\alpha x}+\text{c.c.}\end{aligned}$$

有因子$e^{i\alpha x}$的项所满足的方程为：

$$\begin{aligned}L_0(A(t)v_1+A(t)A(t)\overline{A(t)}v_{31})=&\frac{\partial}{\partial t}L_1(A(t)v_1+A(t)A(t)\overline{A(t)}v_{31})\\&+A(t)A(t)\overline{(At)}f\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中， $f=F(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_{20})+F(\boldsymbol{u}_{20},\ \boldsymbol{u}_1)+F(\overline{\boldsymbol{u}}_1,\ \boldsymbol{u}_{22})+F(\boldsymbol{u}_{22},\ \overline{\boldsymbol{u}}_1)$

$F(\boldsymbol{u}_l,\ \boldsymbol{u}_k)$可由把$\tilde{\boldsymbol{u}}_l=\boldsymbol{u}_l\exp[i\alpha_l x]$，$\tilde{\boldsymbol{u}}_k=\boldsymbol{u}_k\exp[i\alpha_k x]$代入$\mathscr{F}(\tilde{\boldsymbol{u}}_l,\tilde{\boldsymbol{u}}_k)$后得到。$F$与$\mathscr{F}$有如下关系：

$$\mathscr{F}(\tilde{\boldsymbol{u}}_l,\ \tilde{\boldsymbol{u}}_k)=F(\boldsymbol{u}_l,\ \boldsymbol{u}_k)\exp[i(\alpha_l+\alpha_k)x] \tag{2.9}$$

$\overline{\boldsymbol{u}}$表示$\boldsymbol{u}_1$的共轭函数。

由特征值理论可知，f可分解为两部分，$-BL_1v_1$和$f+BL_1v_1$，前一部分可激发出基本扰动v_1，后一部分产生与基本扰动v_1直合的扰动。B的确定可由对应的伴随方程的解v_1^*与f做内积得到，即

$$\langle v_1^*,\ f+BL_1v_1\rangle=0,\quad B=-\langle v_1^*,\ f\rangle/\langle v_1^*,\ L_1v_1\rangle$$

这样方程（2.8）的解可分为两部分，即与基本波直合的v_{31}满足的方程：

$$\begin{aligned}L_0[A(t)A(t)\overline{A(t)}v_{31}(y)]=&\frac{d}{dt}(A(t)\cdot A(t)\overline{A(t)})L_1v_{31}\\&+A(t)A(t)\overline{A(t)}(f+BL_1v_1)\end{aligned} \tag{2.10}$$

以及与基本波对应的部分：

$$L_0(A(t)v_1(y))=\frac{dA(t)}{dt}L_1[v_1(y)]-B\cdot A(t)A(t)\overline{A(t)}L_1v_1(y) \tag{2.11}$$

由方程（2.11）可以得到：

$$L_0v_1(y)=\frac{1}{A(t)}\left(\frac{d}{dt}A(t)-B\cdot A(t)\cdot A(t)\cdot\overline{A(t)}\right)L_1v_1$$

由于v_1是非零解，可以推出

$$\frac{1}{A(t)}\left(\frac{d}{dt}A(t)-B\cdot A(t)\cdot A(t)\overline{A(t)}\right)=-i\omega$$

即 $$dA(t)/dt=-i\omega A(t)+B\cdot A(t)A(t)\overline{A(t)} \tag{2.12}$$

这就就考虑了非线性情况精确到三阶小量的幅值演化方程。要注意的是，B是由对应于$-i\omega$的伴随方程的解作内积得到的。

对平面Poiseulle流进行的计算表明，用这种方法得到的结果与用直接数值模拟得到的结果符合得很好。

参 考 文 献

[1] Reynolds, W.C. and M.C. Potter, Finite amplitude instability of parallel shear flows, *J.F.M.*, 27 (1967), 465—492.

[2] Itoh, N., Spatial growth of finite wave disturbances in parallel and nearly parallel flows, Part I. Theoretical analysis and the numerical results for plane Poiseuille flow, *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.* 17 (1974), 160—174.

[3] Itoh, N., Nonlinear stability of parallel flows with subcritical Reynolds number, Part 1. An asymptotic theory vaild for small amplitude disturbances, *J.F.M.*, 82 (1977), 455—467.

[4] Davey, A., On Itoh's finite amplitude stability theory for pipe flow, *J. F. M.*, 86 (1978), 695—703.

[5] Zhou, H.(周恒), On the nonlinear theory of stability of plane Poiseuille flow in subcritical range, *Proc. Soc. Roy. Lond.* A., 318 (1982), 407—418.

[6] Herbert, T., On perturbation methods in nonlinear stability theory, *J.F.M.*, 126 (1983), 167—186.

The Re-Examination of Determining the Coefficient of the Amplitude Evolution Equation in the Nonlinear Theory of the Hydrodynamic Stability

Luo Ji-sheng

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin)

Abstract

One of the key problems in the nonlinear theory of the hydrodynamic stability is to determine the law of the evolution of the disturbance velocity amplitude. The methods, which have been obtained, can only be used for quasi-neutral flow and have some artificial factors. In this paper, a method is proposed for this problem.

Key words disturbance velocity amplitude, Landau coefficient, solvability condition