应用数学和力学，第15卷第8期（1994年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

光引力限制性三体问题的平动点*

郑学塘　郁丽忠　覃一平

（南京理工大学应用物理系）（昆明 中国科学院云南天文台）

（董金柱推荐，1992年11月6日收到）

摘　要

本文研究两个主星体的质量缩减因子q_1，$q_2 \in (-\infty, 1]$的光引力限制性三体问题．文中给出一种平动点的个数估计和位置计算的分析方法．结果表明对于不同的q_1和q_2可有1～7个平动点．作为应用，文末还讨论了太阳系类似彗尾尘埃物质的运动．

关键词　光引力　质量缩减因子　平动点

一、引　言

恒星（包括太阳）对其附近运动的天体不仅具有引力，还通过微粒辐射等对它们存在光压力．光压力F_p与引力F_g方向相反、形式相同，即都与距离平方成反比．因此当天体同时受到恒星引力和光压力作用时可以用一个等效力即光引力来表示．通常太阳系和恒星系中小天体（特别是尘埃物质）是在这二种力同时作用下运动的，因此研究天体在光引力作用下的运动问题是一个既现实而又重要的问题．

我们可以将光引力写为

$$F = F_g - F_p = qF_g \tag{1.1}$$

其中$q = 1 - F_p/F_g$是常数，称为质量缩减因子．

利用(1.1)式不难得到

$$q = 1 - \frac{A\kappa P}{a\rho M} \tag{1.2}$$

式中M和P是恒星的质量和光度，a和ρ是运动天体的半径和密度，κ是恒星光压效率因子；$A = 3/16\pi CG$是常数，在C·G·S制中$A = 2.9838 \times 10^{-5}$．对于太阳有

$$q_\odot = 1 - 5.7396 \times 10^{-5} \frac{\kappa}{a\rho} \tag{1.3}$$

对于一般天体，例如行星由于a较大，$q \sim 1$；对于小天体，例如小行星和卫星等有$0 < q < 1$；但对于空间尘埃物质由于a很小，可使$q < 0$，例如彗星中Ⅰ型彗尾是由一些大小在微米量级的尘埃颗粒组成，这时有$-1.2 < q < 0.5$．对于一些处于爆发状态的超新星由于在短

* 国家自然科学基金资助项目．
1992年6月7日第一次收到．

时间内可释放出大量的能量，这样使 q 更小．因此 q 可以在 $(-\infty,1]$ 区间内取值．Радзиевский[1~5]等研究了光引力限制性三体问题得到共面平动点可能存在的区域．本文进一步研究当两个主星体的质量缩减因子 $q_1,q_2\in(-\infty,1]$ 时的光引力限制性三体问题，并给出直线平动点和共面平动点个数估计和位置计算的分析方法．另外还将结果应用到太阳系讨论类似彗尾尘埃物质的运动．

二、运动方程及其特解

利用文[6]或[7]中的方法，不难得到小天体在两个主星体（它们的坐标分别为 $-\mu$ 和 $-\mu$）的光引力作用下在旋转系中正则型无量纲的运动方程是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_y},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_z}\\&\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \frac{dp_y}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad \frac{dp_z}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

上式中，广义动量

$$p_x=\frac{dx}{dt}-y,\quad p_y=\frac{dy}{dt}+x,\quad p_z=\frac{dz}{dt}\tag{2.2}$$

Hamilton 函数

$$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+yp_x-xp_y-\left[\frac{q_1(1-\mu)}{r_1}+\frac{q_2\mu}{r_2}\right]\tag{2.3}$$

其中 $\mu=M_2/(M_1+M_2)\,(M_2\leqslant M_1)$，而

$$r_1=[(x+\mu)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}},\quad r_2=[(x+\mu-1)^2+y^2+z^2]^{\frac{1}{2}}\tag{2.4}$$

(2.1)式有一个积分是

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{q_1(1-\mu)}{r_1}-\frac{q_2\mu}{r_2}=C\tag{2.5}$$

另外，还有一组特解，它们满足

$$\left.\begin{aligned}&x-\frac{q_1(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3}-\frac{q_2\mu(x+\mu-1)}{r_2^3}=0\\&y-\frac{q_1(1-\mu)}{r_1^3}y-\frac{q_2\mu}{r_2^3}y=0\\&\frac{q_1(1-\mu)}{r_1^3}z+\frac{q_2\mu}{r_2^3}z=0\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

利用(2.6)式可以求出特解，确定光引力限制性三体问题中平动点的位置．当 q_1 与 q_2 同号时，由(2.6)式的第三式有 $z=0$，这时所有的平动点都在 xy 平面内．相应 $y=0$ 的是直线平动点，$y\neq0$ 的是三角平动点．当 q_1 与 q_2 异号时，由(2.6)式的第二式有 $y=0$，这时可得在 xz 平面内也存在有平动点即共面平动点．如果两个主星体相互作椭圆运动，则可利用文[8]所给出的运动方程得到类似的结果，例如这时在波动坐标系中也有共面平动点．

三、平动点的个数估计和位置计算

1. 共面平动点

由(2.6)式的第一和第三式，有

$$\frac{q_1(1-\mu)}{r_1^3}+\frac{q_2\mu}{r_2^3}=0 \tag{3.1}$$

和

$$x+\frac{q_2\mu}{r_2^3}=0 \tag{3.2}$$

由(3.1)式有

$$\frac{r_1}{r_2}=-\left[\frac{q_1(1-\mu)}{q_2\mu}\right]^{1/3}=k \tag{3.3}$$

由于q_1与q_2异号，故 k 是一个大于零的常数。

利用(2.4)，(3.2)和(3.3)式不难得到共面平动点的位置是

$$x=-\frac{q_2\mu}{q_2^3},\quad z=\pm\sqrt{r_2^2-\frac{1}{4}[1+(1-k^2)r_2^2]^2} \tag{3.4}$$

其中r_2是共面平动点与小主星体之间的距离，它满足

$$(1-k^2)r_2^5+(2\mu-1)r_2^3-2q_2\mu=0 \tag{3.5}$$

由于$r_2-r_1\leqslant 1$，则(3.4)式中有$r_2^2\geqslant[1+(1-k^2)r_2^2]^2/4$。对于确定的$\mu_1$，$q_1$和$q_2$，可以利用数值方法由(3.5)式计算出$r_2$，然后再代入(3.4)式得到共面平动点在$xz$平面上的位置，它们是以$x$轴为对称的。由于$q_1$和$q_2$必须异号，不失一般可令$q_1<0$，$q_2>0$。(3.5)式是$r_2$ 的 5 次方程，当$k>1$，即

$$0<q_2<-\frac{1-\mu}{\mu}q_1$$

时，(3.5)式的系数不变号，无正实根，这时没有共面平动点；当$k<1$，即

$$-\frac{\mu}{1-\mu}q_2<q_1<0$$

时，(3.5)式的系数变号一次，它有1个正实根r_2，这时可从(3.4)式求出2个共面平动点L_6和L_7。如果$q_1>0$，$q_2<0$，当$k<1$，即

$$0<q_1<-\frac{\mu}{1-\mu}q_2$$

时，(3.5)式的系数变号 2 次，它可能有2个正实根，这时可从 (3.4) 式求出 4 个共面平动点L_6，L_7，L_8和L_9。

2. 三角平动点

由(2.6)式的第一和第二式可以得到对于$y\neq 0$，$z=0$的解应有

$$\frac{q_1}{r_1^3}-\frac{q_2}{r_2^3}=0,\quad 1-\frac{q_1(1-\mu)}{r_1^3}-\frac{q_2\mu}{r_2^3}=0 \tag{3.6}$$

或者

$$r_1=q_1^{1/3},\quad r_2=q_2^{1/3} \tag{3.7}$$

由(3.7)式显然可以看出：当两个主星体的质量缩减因子满足 $q_1>0$，$q_2>0$和 $q_1^{1/3}+q_2^{1/3}\geqslant 1$

时，光引力限制性三体问题才有三角平动点，因此得到这样结论：在光引力限制性三体问题中，共面平动点和三角平动点不会并存的．利用(2.4)和(3.7)式可得三角平动点的位置是

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(1+q_1^{2/3}-q_2^{2/3})-\mu \\ y &= \pm\left[q_2^{2/3}-\frac{1}{4}(1-q_1^{2/3}+q_2^{2/3})^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

3．直线平动点

由(2.6)式的第一式可以得到对于$y=0$，$z=0$的解有

$$x-\frac{q_1(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3}-\frac{q_2\mu(x+\mu-1)}{|x+\mu-1|^3}=0 \tag{3.9}$$

(3.9)式有二个奇点：$x=-\mu$和$x=1-\mu$，因此我们可以分为三个区间Ⅰ$(-\infty,-\mu)$，Ⅱ$(-\mu,1-\mu)$和Ⅲ$(1-\mu,\infty)$进行讨论．在这三个区间内，(3.9)式分别化为

$$\varphi_1(x)=x+\frac{q_1(1-\mu)}{(x+\mu)^2}+\frac{q_2\mu}{(x+\mu-1)^2}=0 \tag{3.10}$$

$$\varphi_2(x)=x-\frac{q_1(1-\mu)}{(x+\mu)^2}+\frac{q_2\mu}{(x+\mu-1)^2}=0 \tag{3.11}$$

$$\varphi_3(x)=x-\frac{q_1(1-\mu)}{(x+\mu)^2}-\frac{q_2\mu}{(x+\mu-1)^2}=0 \tag{3.12}$$

由(3.11)式可以得到

$$\left.\begin{aligned} \varphi_2'(x) &= 1+\frac{2q_1(1-\mu)}{(x+\mu)^3}-\frac{2q_2\mu}{(x+\mu-1)^3}, \\ \varphi_2''(x) &= -\frac{6q_1(1-\mu)}{(x+\mu)^4}+\frac{6q_2\mu}{(x+\mu-1)^4} \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

在区间Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ内我们可将平动点的位置分别写为

$$x_1=-\mu-\xi_1,\quad x_2=1-\mu-\xi_2,\quad x_3=1-\mu+\xi_3 \tag{3.14}$$

由于$x_1<-\mu$，$-\mu<x_2<1-\mu$和$x_3>1-\mu$故有$\xi_1>0$，$0<\xi_2<1$和$\xi_3>0$．将(3.14)式分别代入(3.10)～(3.12)式后可得

$$\xi_1^5+(2+\mu)\xi_1^4+(1+2\mu)\xi_1^3+[(1-q_2)\mu-q_1(1-\mu)]\xi_1^2-2q_1(1-\mu)\xi_1-q_1(1-\mu)=0 \tag{3.15}$$

$$\xi_2^5-(3-\mu)\xi_2^4+(3-2\mu)\xi_2^3-[(1-q_1)(1-\mu)+q_2\mu]\xi_2^2+2q_2\mu\xi_2-q_2\mu=0 \tag{3.16}$$

$$\xi_3^5+(3-\mu)\xi_3^4+(3-2\mu)\xi_3^3+[(1-q_1)(1-\mu)-q_2\mu]\xi_3^2-2q_2\mu\xi_3-q_2\mu=0 \tag{3.17}$$

由于$q_1,q_2\in(-\infty,1]$，因此可以根据它们的符号分为四种情形：

(1) $0<q_1<1, 0<q_2<1$．这时(3.15)和(3.17)式的系数变号1次，因此在区间Ⅰ和Ⅲ内有1个正实根．在区间Ⅱ由(3.11)和(3.13)式有$x\to-\mu^+$，$\varphi_2(x)\to-\infty$，$x\to1-\mu^-$，$\varphi_2(x)\to+\infty$和$\varphi_2'(x)>0$．这意味着(3.11)式只有1个实根．因此这时有3个平动点L_1,L_2和L_3，利用(3.15)～(3.17)式对于给定的q_1,q_2和μ值可以算出它们的位置．

(2) $q_1<0, 0<q_2<1$．这时(3.15)式的系数不变号，而(3.17)式的系数变号1次，因此

在区间Ⅰ内无正实根，在区间Ⅲ内有1个正实根．在区间Ⅱ有 $x\to-\mu^+$，$\varphi_2(x)\to+\infty$ 和 $x\to 1-\mu^-$，$\varphi_2(x)\to+\infty$ 以及 $\varphi_2''(x)>0$．显然相应于 $\varphi_2'(x)=0$ 的 x 值如果使 $\varphi_2(x)<0$，$\varphi_2(x)=0$，$\varphi_2(x)>0$，则分别有2个、1个和无实根．因此对于这种情形最多可以有3个平动点 L_{21}，L_{22} 和 L_3．利用(3.16)和(3.17)式可以算出它们的位置．

（3） $0<q_1<1$，$q_2<0$．这时(3.15)式的系数变号1次，而(3.17)式的系数不变号，因此在区间Ⅰ内有1个正实根，在区间Ⅲ内无正实根．在区间Ⅱ有 $x\to-\mu^+$，$\varphi_2(x)\to-\infty$ 和 $x\to 1-\mu^-$，$\varphi_2(x)\to-\infty$ 以及 $\varphi_2''(x)<0$．相应于 $\varphi_2'(x)=0$ 的 x 值，如果使 $\varphi_2(x)>0$，则有2个实根；使 $\varphi_2(x)=0$ 则只有1个实根；使 $\varphi_2(x)<0$，则无实根．因此这时最多只有3个平动点 L_1，L_{21} 和 L_{22}，利用(3.15)和(3.16)式可以算出它们的位置．

（4） $q_1<0$，$q_2<0$．这时(3.15)和(3.17)式的系数都不变号，因此在区间Ⅰ和Ⅲ内都无正实根．在区间Ⅱ，(3.16)式的系数变号四次并有 $x\to-\mu^+$，$\varphi_2(x)\to+\infty$ 和 $x\to 1-\mu^-$，$\varphi_2(x)\to-\infty$．这样要求 $\xi_2<1$ 的正实根只能有1个或者3个，如果相应于 $\varphi_2'(x)=0$ 的 x 值能使 $\varphi_2(x)$ 既为正又为负，($\varphi_2(x)>0$，$\varphi_2(x)<0$)，这时可有3个正实根．因此对于这种情形最多也只有3个平动点 L_{21}，L_{22} 和 L_{23}，利用(3.16)式可以算出它们的位置．

四、结 论 和 应 用

1． 由于三角平动点和共面平动点不可能同时并存，因此在光引力限制性三体问题中至多只有7个平动点．

2． 当 $q_1>0$，$q_2>0$ 时有3个或5个平动点．如果 $q_1^{1/3}+q_2^{1/3}<1$，则只有3个直线平动点；如果 $q_1^{1/3}+q_2^{1/3}\geqslant 1$，则有3个直线平动点和2个三角平动点．当 $q_1=q_2=1$ 时化为经典限制性三体问题．

3． 当 $q_1<0$，$q_2>0$ 时有1～3个或3～5个平动点．如果 $k>1$ 即

$$q_1<-\frac{\mu}{1-\mu}q_2$$

则只有1～3个直线平动点；如果 $k<1$ 即

$$q_1>-\frac{\mu}{1-\mu}q_2$$

则可有1～3个直线平动点和2个共面平动点．

4． 当 $q_1>0$，$q_2<0$ 时有3～5个或1～3和5～7个平动点．如果 $k>1$ 即

$$q_1>-\frac{\mu}{1-\mu}q_2$$

则有1～3个直线平动点和2个共面平动点；如果 $k<1$ 即

$$q_1-\frac{\mu}{1-\mu}q_2$$

则有1～3个直线平动点或1～3个直线平动点和4个共面平动点．

5． 当 $q_1<0$，$q_2<0$ 时有1～3个平动点，它们全是直线平动点．

我们将本文得到的结果应用到太阳系可以讨论彗尾尘埃的运动．

太阳系中，类似彗尾尘埃物质在太阳引力、光压力和木星的引力作用下的运动问题可以处理成光引力限制性三体问题．这时 $q_2=1$，$\mu=0.9538\times10^{-3}$，并取 $\kappa=1$．设某些尘埃颗粒

的半径是0.5×10^{-4}cm，密度是1.1474g/cm^3，则由(1.3)式可得$q_1=-0.4532\times10^{-3}$。

由(3.3)式有$k=0.7801$，再代入(3.5)式，利用微分改正法可以算出共面平动点与木星的距离是$r_2=1.5973$或8.3104AU。将它们代入(3.4)式后可得L_6和L_7的位置是

$$\begin{cases} x=-0.2340\times10^{-3} \quad \text{或} \quad -1.2175\times10^{-3} \quad \text{AU} \\ z=\pm1.2461 \qquad\qquad \text{或} \quad \pm6.4832 \qquad\qquad \text{AU} \end{cases}$$

由于$q_1<0$，因此这时没有三角平动点。将q_1，q_2和μ值代入(3.13)式，求出使$\varphi_2'(x)=0$的$x=0.0957$，由于$q_1<0$，$q_2>0$而$x>0$，从(3.11)式显然有$\varphi_2(x)>0$，这时无实根，因此在区间Ⅱ内没有直线平动点。将q_1，q_2和μ值代入(3.17)式后，采用迭代法解出$\xi_3=0.0304$，将它代入(3.14)式后可得在区间Ⅱ内直线平动点L_3的位置是$x_3=1.0295$或者5.3563AU。因此这种尘埃颗粒运动总共只有3个平动点，它们是L_3，L_6和L_7。

本文曾得到钱伟长教授的关心和帮助，另外董金柱教授对本文也提出了许多十分有益的建议。作者对他们深表谢意。

参考文献

[1] Радзиевский В. В., Пространственный случай ограниченной задачи трех излучающи гравитирующих тел, *Астр. Журн.*, 30(3) (1953), 265—273.

[2] Kunitsyn, A. L. and A. T. Tureshbaev, On the collinear libration points in the photogravitational three-body problem, *Celest. Mech.*, 35(2) (1985), 105—112.

[3] Лукьянов Л. Г., О поверхностях нулевой скорости в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел, *Астр. Журн.*, 65(6) (1988), 1308—1318.

[4] El-Shaboury, S. M., Existence of libration points in the restricted problem of three bodies with radiation pressure, *Earth, Moon, Planets*, 48(3) (1990), 243—250.

[5] Kumar, V. and R. K. Choudhry, Nonlinear stability of the triangular libration points for the photogravitational elliptic restricted problem of three bodies, *Celest. Mech.*, 48(4) (1990), 299—317.

[6] Szebehely, V., *Theory of Orbits*, Academic Press, New York and London (1967), 16.

[7] 郑学塘、倪彩霞，《天体力学和天文动力学》，北京师范大学出版社，北京 (1989)，112.

[8] 郑学塘，行星际火箭和人造行星卫星的轨道设计问题，空间科学学报，11(1) (1991)，40—45.

The Libration Points in Photogravitational Restricted Three-Body Problem

Zheng Xue-tang Yu Li-zhong

(Dept. of Applied Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing)

Qin Yi-ping

(Yunnan Observatory, Academia Sinica, Kunming)

Abstract

The photogravitational restricted three-body problem in which the mass reduction factors of two primaries $q_1, q_2 \in (-\infty, 1]$ are studied and an analytic method to estimate the number of libration points and to calculate their location is given in this paper. The results show that in photogravitational restricted three-body problem, the number of libration points is from one to seven for different q_1 and q_2. As application, the motion of dust drain like comet tail in the solar system is also discussed.

Key words photogravitation, mass reduction factor, libration point