具有非紧无限维策略空间的抽象经济的平衡*

丁协平

（四川师范大学）

庄德铭

（Mount Saint Vincent University，加拿大）

（1993年9月1日收到）

摘　要

我们推广了Tulcea的抽象经济平衡存在定理到非紧策略空间．我们的定理也改进了Tian的最近结果．

关键词　抽象经济　平衡　C_t-优化的

一、引　言

最近Tian[3]对具有无限维策略空间，具有可数无限多个经济人和不具有有序选择的抽象经济提供了一有趣的平衡存在结果．Tian的结果是Yannelis-Prabhakar[6]的存在定理的推广．然而Tian[3]的主要定理（定理2）含有一小小的缺陷．在本文中，我们将利用Tian的主要思路推广Tulcea[5]关于紧抽象经济的平衡存在定理到非紧设置．我们的定理改进了Tian的结果和修正了他的证明．

二、记号和定义

令A表集，2^A表A的一切子集的族．如果A是矢量空间的子集，我们将用$\mathrm{co}(A)$表A的凸包．令X和Y是两个拓扑空间和S,T：$X\to 2^Y$是对应，则$\mathrm{cl}S$，$\mathrm{sn}T$：$X\to 2^Y$是如下定义的对应：$(\mathrm{cl}S)(x)=\{y\in Y:(x,y)\in \mathrm{cl}_{X\times Y}\mathrm{graph}(S)\}$和$(S\cap T)(x)=S(x)\cap T(x)$，对每一$x\in X$．其中$\mathrm{graph}(S)=\{(x,y)\in X\times Y:y\in S(x)\}$和$\mathrm{cl}_{X\times Y}B$是$B$在$X\times Y$内的闭包，称对应$F:X\to 2^Y$是上半连续的(u．s．c.)如果对$Y$的每一开子集$V$，集$\{x\in X:F(x)\cap V\neq\phi\}$在$X$内是开集；称$F$有开下截口如果对每一$y\in Y$，集$F^{-1}(y)=\{x\in X:y\in F(x)\}$在$X$内是开集．

按照Shafer-Sonnenschein[2]和Tulcea[5]，一抽象经济是三元组 的一族$\mathscr{E}=(X_i,$

---

* 本工作受国家自然科学基金和加拿大Mount Saint Vincent 大学研究基金资助，在第一作者访问加拿大期间完成．

本工作受加拿大NSERC和Mount Saint Vincent 大学研究基金资助．

$A_i, P_i)_{i\in I}$其中I是有限或无限个经济人的集．对每一$i\in I$，X_i是选择集，$A_i: X=\prod_{i\in I}X_i\to 2^{X_i}$是约束对应．$P_i: X\to 2^{X_i}$是经济人$i\in I$的选择对应．称点$x^*=\{x_i^*\}_{i\in I}\in X$是$\mathscr{E}$的平衡点如果对每一$i\in I$，$x_i^*\in\overline{A_i(x^*)}$和$A_i(x^*)\cap P_i(x^*)=\phi$其中$\overline{A_i(x^*)}$表$A_i(x^*)$在$X_i$内的闭包．对每一$i\in I$，令$X_i$是拓扑矢量空间的非空子集．对每一$i\in I$，我们将用$C_i$（见Borglin-Keiding[1]）表满足下列条件的一切对应$\Psi: X\to 2^{X_i}$的集：

(i) 对每一$x\in X$，$\Psi(x)$是凸的，

(ii) Ψ有开下截口，

(iii) 对每一$x=\{x_i\}_{i\in I}$，$x_i\notin\Psi(x)$．

一对应$\varphi: X\to 2^{X_i}$被说成是C_i-优化的，如果对每一具有$\varphi(x)\neq\phi$的$x\in X$，存在x的一邻域$N(x)$和$\Psi_x\in C_i$使得对每一$z\in N(x)$，

$$\varphi(z)\subset\Psi_x(z).$$

三、一 个 例 子

Tian[3]陈述了下面定理：

定理1 设$\mathscr{E}=(X_i, A_i, P_i)_{i\in I}$是抽象经济，对每一$i\in I$满足：

(i) X_i是局部凸Hausdorff拓扑矢量空间的非空凸可度量化子集，

(ii) 对每一$x\in X$，$A_i(x)$是非空凸集，

(iii) 对应$A_i^*: X\to 2^{X_i}$由$A_i^*(x)=\overline{A_i(x)}$定义是上半连续的且对每一$x\in X$ $\overline{A_i(x)}$是紧集．

(iv) A_i和P_i都有开下截口，

(v) 对每一$x\in X$，$x_i\notin \mathrm{co}(P_i(x))$，

(vi) 存在非空紧凸集$C_i\subset X_i$使得：

(vi.a) $A_i(C)$被包含在一紧凸集$D_i\subset X_i$中，其中$C=\prod_{i\in I}C_i$，

(vi.b) 对一切$x\in X_{-i}\times Z_i$，$A_i(x)\cap Z_i\neq\phi$，其中$Z_i=\mathrm{co}(\{D_i\cup C_i\})$和$X_{-i}=\prod_{j\neq i}X_j$，

(vi.c) 对每一$x_i\in Z_i\backslash C_i$和$x_{-i}\in X_{-i}$存在$y_i\in A_i(x)\cap Z_i$使得$y_i\in P_i(x)$．则$\mathscr{E}$有一平衡点．

在此定理的证明中Tian定义对应$K_i: Z\to 2^{Z_i}$如下：$K_i(x)=A_i(x)\cap Z$，$\forall x\in Z$．然后他主张由$K_i^*(x)=\overline{A_i(x)}\cap Z_i$定义的对应$K_i^*: Z\to 2^{Z_i}$是u.s.c.和应用Yannelis-Prabharkar[6]的定理来得到所需要的结果．然而在此定理的假设下，K_i^*可以不是u．s．c．我们用R^2中的一简单例子再说明这一事实．令$X=[-1,1]\times[-1,1]$和$Z=\{(x,y)\in X: x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\}$．定义$A: X\to 2^X$如下：

$$A(x,y)=\begin{cases}\{(x,y)\in X: x^2+y^2\leqslant 1, x<0\}\cup\{(0,-1)\} & (\text{如果}(x,y)=(0,0))\\ \{(x,y)\in X: x^2+y^2\leqslant 1, x\leqslant 0\} & (\text{如果}(x,y)\neq(0,0))\end{cases}$$

显然Z是X的非空紧凸子集且对每一$(x,y)\in X$，$A(x,y)$是非空凸集．因为对每一$(x,y)\in X$，

$$\overline{A(x,\ y)}=\{(x,y)\in X: x^2+y^2\leqslant 1,\ x\leqslant 0\},$$

由$A^*(x,y)=\overline{A(x,\ y)}$定义的对应$A^*: X\to 2^X$在$X$上是u．s．c．．显然$A$有开下截口．

由定义对每一$(x,y)\in X$，有

$$A(x,\ y)\cap Z=\begin{cases}\{(0,-1)\} & (\text{如果}(x,y)=(0,0))\\ \{(0,y): -1\leqslant y\leqslant 1\} & (\text{如果}(x,y)\neq(0,0))\end{cases}$$

和$A(x,y)\cap Z=\overline{A(x,y)\cap Z}$. 显然由$K^*(x,y)=\overline{A(x,y)}\cap Z$, $\forall(x,y)\in Z$定义的对应K^*: $Z\to 2^Z$不是u.s.c.

四、平衡的存在性

下面结果是Tulcea[5]的定理4.

定理2 设$\mathscr{E}=(X_i,A_i,P_i)_{i\in I}$是抽象经济使得对每一$i\in I$,

(i) X_i是拓扑矢量空间E的非空紧凸子集,

(ii) A_i有开下截口使得对每一$x\in X$, $A_i(x)$非空凸和$(\mathrm{cl}A_i)(x)=A_i^*(x)$,

(iii) $A_i\cap P_i$是C_i-优化的,

(iv) $\{x\in X:(A_i\cap P_i)(x)\neq\phi\}$是$X$的开子集. 则$\mathscr{E}$有一平衡点.

仔细分析Tulcea[5]的定理4我们注意到其中假设(4.4)蕴含假设(4.3). 因此假设(4.3)是不必要的.

下面结果是定理2在放松紧性条件下的推广.

定理3 设$\mathscr{E}=(X_i,A_i,P_i)_{i\in I}$是抽象经济使得对每一$i\in I$,

(i) X_i是拓扑矢量空间E的非空凸子集,

(ii) A_i有开下截口使得对每一$x\in X$, $A_i(x)$是凸集,

(iii) $A_i\cap P_i$是C_i-优化的,

(iv) 存在X_i的非空紧凸子集Z_i和Z_i的非空子集C_i使得

(iv.a) $A_i(C)\subset Z_i$, 其中$C=\Pi_{i\in I}C_i$,

(iv.b) 对每一$x\in Z=\Pi_{i\in I}Z_i$, $A_i(x)\cap Z_i\neq\phi$,

(iv.c) 由$B_i^*(x)=\overline{A_i}(x)\cap Z_i$, $\forall x\in Z$定义的对应$B_i^*:Z\to 2^{Z_i}$在Z上是u.s.c.,

(iv.d) $\{x\in Z:A_i(x)\cap P_i(x)\cap Z_i\neq\phi\}$是$Z$中开集,

(iv.e) 对每一具有$x_i\in Z_i\backslash C_i$的$x\in Z$, 存在$y_i\in A_i(x)\cap Z_i$使得$y_i\in P_i(x)$.

则$\mathscr{E}$在Z内有一平衡点.

证明 对每一$i\in I$定义对应B_i,Q_i: $Z\to 2^{Z_i}$如下:

$$B_i(x)=A_i(x)\cap Z_i \text{ 和 } Q_i(x)=P_i(x)\cap Z_i,\ (\forall x\in Z).$$

则对每一$i\in I$, 我们有

(1) 由(ii)和(iv.b), 对每一$x\in Z$, $B_i(x)$非空凸,

(2) 对每一$y_i\in Z_i$,

$$\begin{aligned}B_i^{-1}(y_i)&=\{x\in Z:y_i\in B_i(x)\}\\&=\{x\in Z:y_i\in A_i(x)\cap Z_i\}\\&=\{x\in Z:y_i\in A_i(x)\}\\&=Z\cap A_i^{-1}(y_i).\end{aligned}$$

因此由(ii), $B_i^{-1}(y_i)$在Z中是开集, 即B_i有开下截口,

(3) 因Z_i是紧的, 由(iv.c)对每一$x\in Z$, $(\mathrm{cl}B_i)(x)=B_i^*(x)$ (见Tulcea[5], p.268).

(4) 对每一具有$B_i(x)\cap Q_i(x)\neq\phi$的$x\in Z$, $A_i(x)\cap P_i(x)\neq\phi$. 由(iii), 存在$x$在$X$中的一邻域$N(x)$和$\Psi_x\in C_i$使得对每一$z\in N(x)$, $A_i(z)\cap P_i(z)\subset\Psi_x(z)$. 令$N_1(x)=N(x)\cap Z$和定义对应$\Psi_x':Z\to 2^{Z_i}$如下:

$$\Psi'_z(z)=\Psi_z(z)\cap Z_i \qquad (\forall z\in Z).$$

容易看出$\Psi'_z\in C_i$和$B_i(z)\cap Q_i(z)=A_i(z)\cap P_i(z)\cap Z_i\subset\Psi_z(z)\cap Z_i=\Psi'(z)$，$\forall z\in N_1(x)$。因此$B_i\cap Q_i$是$C_i$-优化的。

（5）　由(iv.d)，$\{x\in Z: B_i(x)\cap Q_i(x)\neq\phi\}$是$Z$内开集。因此抽象经济$\mathscr{E}'=(Z_i, B_i, Q_i)_{i\in I}$满足定理2的一切假设，存在$x^*\in Z$使得对每一$i\in I$，$x_i^*\in\overline{B_i(x^*)}$和$B_i(x^*)\cap Q_i(x^*)=\phi$。假设存在$i_0\in I$使得$x_{i_0}^*\notin C_i$。从(iv.e)推得存在$y_{i_0}\in A_{i_0}(x^*)\cap Z_{i_0}$使得$y_{i_0}\in P_{i_0}(x^*)$且因此$B_{i_0}(x^*)\cap Q_{i_0}(x^*)=A_{i_0}(x^*)\cap P_{i_0}(x^*)\cap Z_{i_0}\neq\phi$这与对每一$i\in I$，$B_i(x^*)\cap Q_i(x^*)=\phi$相矛盾。因此$x^*\in C$。由(iv.a)，对每一$i\in I$，$A_i(x^*)\subset Z_i$。由此推得对每一$i\in I$，

$$x_i^*\in\overline{A_i(x^*)}\ \text{和}\ A_i(x^*)\cap P_i(x^*)=\phi.$$

即x^*是$\mathscr{E}=(X_i, A_i, P_i)_{i\in I}$的一平衡点。

注1　如果X_i是紧凸集，由令$C_i=Z_i=X_i$，定理3的条件(iv.a)，(iv.b)和(iv.e)自动满足，条件(iv.c)等价于对每一$x\in X$，$(\mathrm{cl}A_i)(x)=A_i^*(x)$和条件(iv.d)化归定理2的条件(iv)。因此定理3的确是定理在放松紧性条件下的推广。

注2　在定理3中，如果条件(iii)和(iv.d)由下面更强的条件代替：P_i有开下截口和对每一$x\in X$，$x_i\notin\mathrm{co}(P_i(x))$，则结论更成立。因此定理3也推广了Tulcea[5]的系2，Toussaint[4]的定理2.5和Yannelis-Prabhakar[6]的定理6.1到非紧策略空间。定理3也顺次在下列几方便修正和推广了Tian的定理2：

(1) I不必是可数无限的，

(2) X_i可以是非度量化的，

(3) 策略空间E可以是非局部凸Hausdoff的。

参 考 文 献

[1] Borglin, A. and H. Keiding, Existence of equilibrium actions and of equilibrium, *J. Math. Econom.*, 3(1976), 313—316.

[2] Shafer, W. and H. Sonnenschein, Equilibrium in abstract economics without ordered preferences, *J. Math Econom.*, 2(1975), 345—348.

[3] Tian, G., Equilibrium in abstract economics with a noncompact infinite dimensional strategy space, an infinite number of agents and without ordered preferences, *Econom. Letters*, 33(1990), 203—206.

[4] Toussaint, S., On the existence of equilibria in economics with infinite many commodities and without ordered preference, *J. Econom. Theory*, 33(1984), 98—115.

[5] Tulcea, C. I., On the approximation of upper semicontinuous correspondences and the equilibrium of the generalized games, *J. Math. Anal. Appl.*, 136(1988), 267—289.

[6] Yannelis, N. C. and N. D. Prabhakar, Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces, *J. Math. Econom*, 12(1983), 233—245.

Equilibrium in Abstract Economics with a Non-Compact Infinite Dimensional Strategy Space

Ding Xie-ping (*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Zhuang De-ming (*Mount Saint Vincent University, Canada*)

Abstract

We generalize an existence theorem of equilibrium of abstract economics by Tulcea to a non-compact strategy space. Our theorem also improves a recent result of Tian.

Key words abstract economics, equilibrium, C_i-majoized