应用数学和力学，第15卷 第7期（1994年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非牛顿流体偏心环空螺旋流的解析解*

张海桥　吴继周

（大庆石油学院）

摘　要

石油和化工中许多问题需要求解非牛顿流体偏心环空螺旋流.本文全面地研究了幂律流体和宾汉流体在偏心环空中层流螺旋流的流动规律与流动状态的判别.在理论上，根据流体力学原理，运用数学方法，在作者同心环空螺旋流的理论基础上，通过对偏心环空螺旋流流场的无限细分法，给出了该流场的视粘度分布、速度分布、流量和压降方程；进而建立了判别流态的稳定性参数.

关键词　幂律流体　偏心环空　螺旋流　宾汉流体

一、引　言

近年来，随着工程技术的发展，计算技术的提高，人们对非牛顿流体环空螺旋流的研究日趋重视.如石油工业中的钻井作业，钻井液（非牛顿流体）在钻柱和井眼构成的环形空间中的流动，由于钻柱本身的的旋转和压力梯度的作用，就是一种螺旋流动.开展这种流动规律的研究，不仅有理论价值，在应用上也有重要的意义.

1955年，R. S. Rivlin[1]首先得到了粘弹性流体同心环空螺旋流的速度分布，其表达式是一个非常复杂的偏微分方程组；1959年，B. D. Coleman 和 W. Noll[2]得到了简单流体同心环空螺旋流的速度分布和流量的数学模型，其中都含有流体承受的力矩和切应力项，使得结果很难用于工程实际当中去；1960年，A. G. Fredrickson[3]也得到了粘弹性流体同心环空螺旋流的速度分布和流量公式，但公式里含有一个待定的视粘度分布函数；1976年，R. E. Walker[4]讨论了钻井液同心环空螺旋流的流态问题，建立了Z值表达式，并给出了Z的临界值为800.但是，这个Z值表达式是个经验公式，这就使其应用范围受到很大限制.

本文作者[5],[6],[7]近年来，就钻井液同心环空螺旋流和圆管螺旋流给出了较完整的结果，且表达式简单，计算方便，很容易应用到工程实际中去.该项研究已通过专家鉴定.

根据石油钻井现场的实际情况，在钻井进尺过程中，由于种种原因，钻柱和井眼不可能是同心的，实际构成的是偏心环形空间.展开对偏心环空螺旋流的研究，不仅有重大的理论意义，而且会更符合实际的需要.

关于偏心环空螺旋流的理论，目前尚未见到，作者在文献[10]中给出了偏心环空螺旋流

* 钱伟长推荐.1991年10月4日收到第一稿，1994年3月4日收到修改稿.

场的无限细分法，本文在此基础上，利用作者的同心环空螺旋流的结果，建立起偏心环空螺旋流的理论。

二、偏心环空螺旋流所满足的方程组

1. 问题的假设条件

设纯粘无弹的、不可压的幂律流体或宾汉流体在图1所示的无限长的垂直放置的两个半径不等的非同轴圆柱所构成的环形空间中做稳定的等温层流螺旋流动。环形空间外管半径为R_2，内管半径为R_1，内管以等角速度Ω_i旋转，而外管静止不动。作用在液体上的压力梯度为$-P$，且平行于z轴。

在图1所示的柱系(r,θ,z)下，液体质点运动的速度矢量$\mathbf{v}$三个分量为

$$v_r=0,\quad v_\theta=r\omega(r,\theta),\quad v_z=u(r,\theta)$$

其中 ω，u是环空中距z轴为r，偏角为θ的流体质点旋转角速度和轴向速度。

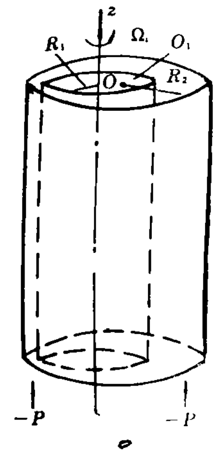

图 1

2. 本构方程[8]

幂律液体的本构方程为

$$\mathbf{T}=\eta\mathbf{A}_1 \tag{2,1}$$

宾汉液体是一类带有屈服应力的非牛顿流体，其本构方程为

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{A}_1=0 && \left(\text{当}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathbf{T}^2<\tau_0^2\right)\\ &\mathbf{T}=(\eta_p+\tau_0/|\,\mathrm{II}\,|)\mathbf{A}_1 && \left(\text{当}\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathbf{T}^2\geqslant\tau_0^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

式中 $\mathbf{T}$为偏应力张量，$\mathbf{A}_1$为 Rivlin-Ericksen 张量，η为视粘度，η_p为塑性粘度，τ_0为屈服应力，II为$\mathbf{A}_1$的第二不变量，且$\mathrm{II}=\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathbf{A}_1^2\right]^{\frac{1}{2}}$。

幂律液体的η又可表示为

$$\eta=K(\,\mathrm{II}\,)^{n-1} \tag{2.3}$$

其中 K为稠度系数，n为流性指数。

3. 应力张量及其分量

我们讨论的是不可压，各向同性的流体，故应力张量$\mathbf{\Pi}$可以写成

$$\mathbf{\Pi}=-p\,\mathbf{I}+\mathbf{T} \tag{2.4}$$

式中 p为静压力，标量；$\mathbf{I}$为单位张量。

由应变率张量$\mathbf{A}_1$的定义

$$A_{ij}=\nabla_i v_j+\nabla_j v_i$$

和连续性方程，不难得到$\mathbf{A}_1$为主对角线上皆为零的三阶对称方阵

$$A_{rr}=A_{\theta\theta}=A_{zz}=0$$

$$A_{r\theta}=A_{\theta r}=r\frac{\partial\omega}{\partial r}$$

$$A_{\theta z}=A_{z\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$A_{rz}=A_{zr}=\frac{\partial u}{\partial r}$$

式中 A_{ij}为$\mathbf{A}_1$的协变物理分量，v_i为$\mathbf{v}$的协变分量，∇_i为Hamilton算子∇的协变分量．进而得到

$$\mathrm{I}=\left[\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

由(2.1)式、(2.4)式和$\mathbf{A}_1$易知幂律液体的应力张量Π的分量为

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{rr}=\pi_{\theta\theta}=\pi_{zz}=-p,\\&\pi_{r\theta}=\pi_{\theta r}=\eta r\frac{\partial \omega}{\partial r},\quad \pi_{rz}=\pi_{zr}=\eta\frac{\partial u}{\partial r}\\&\pi_{\theta z}=\pi_{z\theta}=\eta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

由(2.2)式、(2.4)式和$\mathbf{A}_1$易知宾汉液体应力张量Π的分量为

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{rr}=\pi_{\theta\theta}=\pi_{zz}=-p\\&\pi_{r\theta}=\pi_{\theta r}=(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I}|)r\frac{\partial \omega}{\partial r}\\&\pi_{rz}=\pi_{zr}=(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I}|)\frac{\partial u}{\partial r}\\&\pi_{\theta z}=\pi_{z\theta}=(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I}|)\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

4. 运动方程组

由运动方程

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt}=\rho\mathbf{f}+\nabla\cdot\Pi$$

和假设条件，并注意重力作用及$\mathbf{f}$在r向、θ向上均为零，在z向上为$-g$，则不难得到幂律液体或宾汉液体偏心环空螺旋流在柱坐标系下所满足的偏微分方程组

$$\left.\begin{aligned}&-\rho r\omega^2=\frac{\partial \pi_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \pi_{r\theta}}{\partial \theta}\\&0=\frac{2\pi_{r\theta}}{r}+\frac{\partial \pi_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \pi_{\theta\theta}}{\partial \theta}\\&\rho\omega\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\pi_{rz}}{r}+\frac{\partial \pi_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \pi_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \pi_{zz}}{\partial z}-\rho g\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

其中 ρ为液体密度，$\mathbf{f}$为单位质量的液体所受的质量力．

特别，如果是同心环空螺旋流，则与θ无关，仅是r的函数，那么，(2.8)式变成了同心环空螺旋流所满足的方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\pi_{rr}}{\partial r}+\rho r\omega^2=0\\&\frac{\partial\pi_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\pi_{r\theta}}{r}=0\\&\frac{\partial\pi_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\pi_{zz}}{\partial z}+\frac{\pi_{rz}}{r}-\rho g=0\end{aligned}\right\}\tag{2.8$'$}$$

可以证明

$$P=-\left(\frac{\partial\pi_{zz}}{\partial z}-\rho g\right)$$

为常数，它就是环空层流螺旋流的压力梯度.

由(2.6)式和(2.8)式，得到幂律液体偏心环空层流螺旋流所满足的方程组

$$\left.\begin{aligned}&-\rho r\omega^2=\frac{\partial(-p)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\eta r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\\&0=\frac{2}{r}\left(\eta r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\eta r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial(-p)}{\partial\theta}\\&\rho\omega\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{1}{r}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\eta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+P\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

式中

$$\eta=K\left[\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

由(2.7)式和(2.8)式，得到宾汉液体偏心环空层流螺旋流所满足的方程组

$$\left.\begin{aligned}&-\rho r\omega^2=\frac{\partial(-p)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{1}{\partial\theta}\left[(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I\!I}|)r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right]\\&0=\frac{2}{r}(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I\!I}|)r\frac{\partial\omega}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I\!I}|)r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right]+\frac{1}{r}\frac{\partial(-p)}{\partial\theta}\\&\rho\omega\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{1}{r}(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I\!I}|)\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left[(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I\!I}|)\frac{\partial u}{\partial r}\right]\\&\qquad+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I\!I}|)\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]-P\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

式中

$$\mathrm{I\!I}=\left[\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

三、偏心环空螺旋流流场的无限细分法

偏心环空螺旋流的速度分布不仅与r有关，同时还与角θ有关. 对于幂律液体，ω，u满足方程组 (2.9)；对于宾汉液体，ω，u满足方程组 (2.10). 这两个方程组很繁杂，为方便起见，我们把偏心环空无限细分成无穷多个小曲边四边形. 如图2所示，从原点O出发，引出一束射线即可. 其中每个四边形的一组对边是内、外圆周的圆弧，另一组对边是两直线段.

今任意固定$\theta=\theta_0$，则相应有一个长度OB_0(记$B_0=OB_0$)，相应地环空间隙为$h_0=B_0-R_1$．现设偏心距$OO_1=\varepsilon$，则显然有

$$B_0=\varepsilon\cdot\cos\theta_0+\sqrt{R_2^2-\varepsilon^2\cdot\sin^2\theta_0} \tag{3.1}$$

一般地，当$\theta=\theta_n$时，有

$$\left.\begin{aligned}&B_n=\varepsilon\cdot\cos\theta_n+\sqrt{R_2^2-\varepsilon^2\cdot\sin^2\theta_n}\\&\qquad\qquad\qquad(n=0,1,2,\cdots,)\\&h_n=B_n-R_1\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

显然，环空最大空隙为$R_2-R_1+\varepsilon$；最小环空间隙为$R_2-R_1-\varepsilon$。

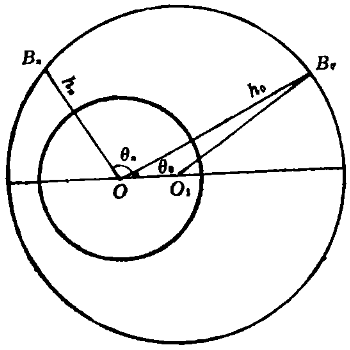

图 5

今若求当$\theta=\theta_0$时的偏心环空层流螺旋流的各力学量，那么，由于角θ固定了，诸力学量仅与r有关，而r在h_0上变化．所以，诸力学量在h_0上所取的值，就相当于以z轴为对称轴，R_1不变，再以$B_0=R_1+h_0$为半径做圆柱面，同内圆柱构成的同心环空层流螺旋流的各力学量的值。

综上所述，求不同的的$\theta=\theta_n(n=0,1,2,\cdots,)$的偏心环空螺旋流的各力学量，就相当于求解无穷多个同心环空螺旋流的问题．这无穷多个同心环空内管半径始终为R_1，外管半径分别为$B_n=R_1+h_n(n=0,1,2,\cdots)$．这种思想就是偏心环空螺旋流流场的无限细分法，根据它，偏心环空螺旋流的问题就可以借助于同心环螺旋流的方法进行解析求解了．

四、偏心环空层流螺旋流的解析解

1．视粘度分布函数

现在求任给一个角度$\theta\in[0,2\pi]$时的宾汉液体和幂律液体的视粘度分布．

(1) 宾汉液体的视粘度

由(3.1)式，对任给的角θ有

$$B=B(\theta)=\varepsilon\cos\theta+\sqrt{R_2^2-\varepsilon^2\sin^2\theta} \tag{3.1}$$

以R_1为内管半径，以$B(\theta)$为外管半径做一个同心环空．由(2.8)′的后两式有

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{r\theta}=\frac{D}{r^2}\\&\pi_{rz}=\frac{1}{2}Rr+\frac{C}{r}\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

式中 D，C为积分常数，$r\in[R_1,\ B(\theta)]$

为方便起见，令

$$\xi=\xi(\theta)=\frac{r}{B(\theta)},\quad k=k(\theta)=\frac{R_1}{B(\theta)} \tag{*}$$

$$0<\xi(\theta)<1,\quad 0<k(\theta)<1$$

则由(4.1)式有

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{r\theta}=\frac{\beta(\theta)}{\xi^2(\theta)},\quad \beta(\theta)=\frac{D}{B^2(\theta)}\\&\pi_{rz}=\frac{RB(\theta)[\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta)]}{2\xi(\theta)},\quad \lambda^2(\theta)=-\frac{2C}{PB^2(\theta)}\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

此时，由于θ固定了，已变成内管半径为R_1，外管半径为$B(\theta)$的同心环空螺旋流的问题了，所以，ω，u仅是$r\in[R_1, B(\theta)]$的函数了，从而(2.5)式变为

$$\mathrm{I}=\left[\left(r\frac{d\omega}{dr}\right)^2+\left(\frac{du}{dr}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{B^2(\theta)}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2+\xi^2(\theta)\left(\frac{d\omega}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.2}$$

由(2.7)式有

$$\pi_{r\theta}=(\eta_p+\tau/|\mathrm{I}|)\xi(\theta)\frac{d\omega}{d\xi}$$

$$\pi_{rz}=(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I}|)\frac{1}{B(\theta)}\ \frac{du}{d\xi}$$

进而有

$$\left.\begin{aligned}\xi^2(\theta)\left(\frac{d\omega}{d\xi}\right)^2&=\pi^2_{r\theta}/(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I}|)^2\\ \frac{1}{B^2(\theta)}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2&=\pi^2_{rz}/(\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I}|)^2\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

据(4.2)，(4.3)两式得到

$$\eta=\eta_p+\tau_0/|\mathrm{I}|=\eta_p+\tau_0\eta\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

最终得到宾汉液体偏心环空层流螺旋流的视粘度

$$\eta=\eta(\xi,\theta)=\frac{\eta_p}{1-\tau_0\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{-\frac{1}{2}}} \tag{4.4}$$

(2) 幂律液体的视粘度

用类似的方法，可以得到幂律液体偏心环空层流螺旋流在任意角度$\theta\in[0,2\pi]$时的视粘度表达式为

$$\eta=\eta(\xi,\ \theta)=K^{\frac{1}{n}}\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{\frac{n-1}{2n}} \tag{4.5}$$

2. 速度分布函数

(1) 宾汉液体的速度分布

任给一角度$\theta\in[0,2\pi]$，则由(4.1)′第一式，(4.3)第一式及(4.4)式，经化简得到

$$\omega=\omega(\xi,\theta)=\int_1^{\xi(\theta)}\frac{\beta(\theta)-\beta(\theta)\tau_0\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\zeta^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\zeta^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\zeta^2(\theta)}\right]^{-1/2}}{\eta_P\zeta^3(\theta)}d\zeta(\theta) \tag{4.6}$$

由(4.1)′第二式，(4.3)第二式及(4.4)式，经化简有

$u=u(\xi,\theta)$

$$=\frac{PB^2(\theta)}{2}\int_1^{\xi(\theta)}\frac{(\zeta^2(\theta)-\lambda^2(\theta))\left\{1-\tau_0\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\zeta^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\zeta^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\zeta^2(\theta)}\right]^{-1/2}\right\}}{\eta_P\zeta(\theta)}d\zeta(\theta) \tag{4.7}$$

(4.6)、(4.7)两式即为宾汉液体偏心环空层流螺旋流在角度为θ时的旋转角速度和轴向速度，其合成速度为

$$v=v(\xi,\ \theta)=\sqrt{(r\omega)^2+u^2} \tag{4.8}$$

（2） 幂律液体的速度分布

用类似的方法，由(2.6)式，(4.1)′式和(4.5)式，容易得到幂律液体偏心环空层流螺旋流在角度为θ时的速度分布为

$$\omega=\omega(\xi,\theta)=\int_1^{\xi(\theta)}\frac{\beta(\theta)d\xi(\theta)}{\xi^3(\theta)K^{1/n}\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{\frac{n-1}{2n}}} \tag{4.9}$$

$$u=u(\xi,\ \theta)=\frac{PB^2(\theta)}{2}\int_1^{\xi(\theta)}\frac{\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta)}{\xi(\theta)K^{1/n}\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{\frac{n-1}{2n}}}d\xi(\theta) \tag{4.10}$$

$$v=v(\xi,\ \theta)=\sqrt{(r\omega)^2+u^2} \tag{4.11}$$

3. 边界条件方程组

当$r=R_1$时（即$\xi(\theta)=k(\theta)$），$\omega=\Omega_i$，$u=0$，于是由(4.6)、(4.7)两式得到宾汉液体的偏心环空层流螺旋流的边界条件方程组

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_i+\beta(\theta)\int_{k(\theta)}^1\frac{1-\tau_0\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{-1/2}}{\eta_P\xi^3(\theta)}d\xi(\theta)=0\\&\int_{k(\theta)}^1\frac{(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))\left\{1-\tau_0\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{-1/2}d\xi(\theta)\right.}{\eta_P\xi(\theta)}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

同理，对于幂律液体有边界条件方程组

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_i+\beta(\theta)\int_{k(\theta)}^1\frac{d\xi(\theta)}{\xi^3(\theta)K^{1/n}\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{\frac{n-1}{2n}}}=0\\&\int_{k(\theta)}^1\frac{\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta)}{\xi(\theta)K^{1/n}\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{\frac{n-1}{2n}}}d\xi(\theta)=0\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

.12)和(4.13)式用来确定积分常数$\beta(\theta)$和$\lambda(\theta)$.

4. 流量计算

（1） 宾汉液体的体积流量

根据工程上的实际需要，只给出宾汉液体只有速梯区时的流量公式。

体积流量为

$$Q=\iint_S u d\sigma$$

式中S为偏心环空横截面积．由(4.7)式和(*)式，经化简不难得到

$$Q=-\int_0^{2\pi}\frac{PB^4(\theta)}{4}\left[\int_{k(\theta)}^1 M(\theta)d\xi(\theta)\right]d\theta \tag{4.14}$$

式中

$$M(\theta)=\frac{\xi(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))\left\{1-\tau_0\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{-1/2}\right\}}{\eta_P} \tag{4.14$'$}$$

此(4.14)式即为宾汉液体偏心环空层流螺旋流无流核时的体积流量计算公式．

（2）　幂律液体的体积流量

用完全类似的方法，由(4.10)式和(*)式可以得关于幂律液体偏心环空层流螺旋流的流量公式

$$Q=-\int_0^{2\pi}\frac{PB^2(\theta)}{4}\left[\int_{k.\theta}^1\frac{\xi(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))d\xi(\theta)}{K^{1/n}\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{\frac{n-1}{2n}}}\right]d\theta \tag{4.15}$$

5．压降方程

（1）　宾汉液体的压降方程

平均速度定义为

$$\bar{v}=Q/S,\qquad S=\pi(R_2^2-R_1^2)$$

从而由(4.14)式易知宾汉液体偏心环空螺旋流的压降方程为

$$P=\frac{-4\pi(R_2^2-R_1^2)\bar{v}}{\int_0^{2\pi}B(\theta)\left[\int_{k(\theta)}^1 M(\theta)\,d\xi(\theta)\right]d\theta} \tag{4.16}$$

（2）　幂律液体的压降方程

由平均速度定义及(4.15)式，该液体压降方程为

$$P=\frac{-4\pi(R_2^2-R_1^2)\bar{v}}{\int_0^{2\pi}B^4(\theta)\left[\int_{k(\theta)}^1\frac{\xi(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))}{\eta(\xi,\theta)}d\xi(\theta)\right]d\theta} \tag{4.17}$$

式中$\eta(\xi,\theta)$由(4.5)式给出．

五、稳定性参数

本文利用Hanks[9]的稳定性参数给出偏心环空层流螺旋流向紊流螺旋流转变的判别准则．它可用于任何与时间无关的纯粘无弹的流体在任何几何空间中的流动．

定义

$$H=\frac{|\rho\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})|}{|\nabla\cdot\mathbf{T}|} \tag{5.1}$$

显然，H表示液体流动的惯性力与粘滞力之比，这正是H的物理意义.

任给一角度θ，则由前所述，可以得到一个以z轴为对称轴，以R_1为内管半径、以$B(\theta)$为外管半径的同心环空. 从而根据作者的同心环空螺旋流的理论[5,6]得到偏心的稳定性参数

$$H=\left|\frac{\rho}{P}\left[2B(\theta)\xi(\theta)\beta^2(\theta)J_1^2(\xi,\theta)+\frac{B(\theta)\beta^2(\theta)}{\xi(\theta)\eta(\xi,\theta)}J_1(\xi,\theta)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{P^2B^3(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))}{4\xi(\theta)\eta(\xi,\theta)}J_2(\xi,\ \theta)\right]\right| \tag{5.2}$$

式中

$$J_1(\xi,\theta)=\int_1^{\xi(\theta)}\frac{d\zeta(\theta)}{\xi^3(\theta)\eta(\zeta,\theta)}\ ,\quad J_2(\xi,\theta)=\int_1^{\xi(\theta)}\frac{\zeta^2(\theta)-\lambda^2(\theta)}{\zeta(\theta)\eta(\zeta,\theta)}d\zeta(\theta)$$

对于宾汉液体，$\eta(\zeta,\theta)$由(4.4)式给出；对于幂律液体，$\eta(\zeta,\theta)$由(4.5)式给出.

命$dH(\xi,\theta)/d\xi(\theta)=0$，则得一方程

$$2\beta^2(\theta)J_1^2(\xi,\ \theta)+\frac{\beta^2(\theta)[3\eta(\xi,\theta)-\eta'(\xi,\theta)\cdot\xi(\theta)]}{\xi^2(\theta)\eta^2(\xi,\theta)}J_1(\xi,\theta)$$
$$+\frac{P^2B^2(\theta)[\eta(\xi,\theta)(\xi^2(\theta)+\lambda^2(\theta))-\eta'(\xi,\theta)\xi(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta)]}{4\eta^2(\xi,\theta)\xi^2(\theta)}J_2(\xi,\theta)$$
$$+\frac{4\beta^2(\theta)+P^2B^2(\theta)\xi^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\eta^2(\xi,\theta)\xi^4(\theta)}=0 \tag{5.3}$$

解方程(5.3)，必得一实根$\xi^*(\theta)$，使(5.2)式取得最大值

$$H_{\max}=H(\xi^*,\theta)$$
$$=\left|\frac{\rho}{P}\left[2B(\theta)\xi^*(\theta)\beta^2(\theta)J_1^2(\xi^*,\theta)+\frac{B(\theta)\beta^2(\theta)}{\xi^*(\theta)\eta(\xi^*,\theta)}J_1(\xi^*,\theta)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^{*2}(\theta)-\lambda^2(\theta))}{4\xi^*(\theta)\eta(\xi^*,\theta)}J_2(\xi^*,\theta)\right]\right| \tag{5.4}$$

对于宾汉液体，$\eta(\xi,\theta)$由(4.4)式给出，且有

$$\eta'(\xi,\theta)=\frac{\eta_P\tau_0[P^2B^2(\theta)\xi^2(\theta)(\xi^4(\theta)-\lambda^4(\theta))-8\beta^2(\theta)]}{4\xi^5(\theta)(E^{3/2}-2\tau_0E-\tau_0^2E^{1/2})}$$

式中　$E=\beta^2(\theta)/\xi^4(\theta)+P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2/4\xi^2(\theta)$. 对于幂律液体，$\eta(\xi,\theta)$由(4.5)式给出，且有

$$\eta'(\xi,\ \theta)=K^{1/n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\left[\frac{4\beta^2(\theta)+P^2B^2(\theta)\xi^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^4(\theta)}\right]^{-\frac{n+1}{2n}}$$
$$\cdot\left[-\frac{4\beta^2(\theta)}{\xi^5(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))(\xi^2(\theta)+\lambda^2(\theta))}{2\xi^3(\theta)}\right]$$

由于在任意角度为θ上的流体的偏心环空螺旋流的速度分布等于相应的同心环空螺旋流的速度分布；又据作者同心环空螺旋流的理论与实验研究得知，当$H>404$时，由层流向紊流转变. 所以，非牛顿流体偏心环空螺旋流流态的判别准数也为404.

六、计 算 步 骤

1. 视粘度和速度分布的计算步骤

对于任给一个角度$\theta\in[0,2\pi]$，由(3.1)′式算出$B(\theta)$，再由(*)式算出$k(\theta)$，然后，对于Bingham（宾汉）液体的τ_0，η_p，Ω_i和P由(4.12)式迭代出$\beta(\theta)$，$\lambda(\theta)$，最终由(4.4)，(4.6)，(4.7)和(4.8)式得到Bingham液体的视粘度分布和速度分布。

对于幂律液体的n，K，Ω_i和P，由(3.1)′式算出$B(\theta)$，由(*)式算出$k(\theta)$，再由(4.13)式迭代出$\beta(\theta)$，$\lambda(\theta)$，最终由(4.5)，(4.9)，(4.10)和(4.11)式得到幂律液体的视粘度分布和速度分布。

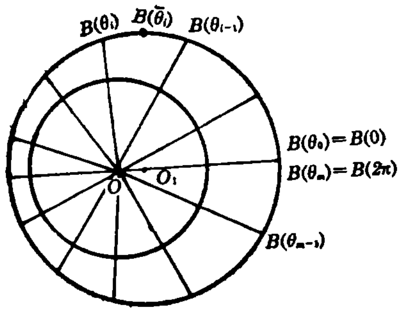

图 3

2. 流量的计算步骤

如图3所示，将$[0,2\pi]m$等分，相应地把偏心环空分成m份。于是有

$$\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}=\frac{2\pi}{m}\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

现在考虑第$i(i=1,m)$份的流量，仿照(4.14)和(4.15)式推导过程，对于Bingham液体有

$$\overline{\Delta Q_i}=-\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i}\frac{PB^4(\theta)}{4}\left[\int_{k(\theta)}^{1}M(\theta)d\xi(\theta)\right]d\theta \tag{6.1}$$

式中 $M(\theta)$的定义见(4.14)′。

对于幂律液体有

$$\Delta Q_i=-\int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i}\frac{PB^4(\theta)}{4}\left[\int_{k,\theta}^{1}\frac{\xi(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))d\xi(\theta)}{K^{1/n}\left[\frac{\beta^2(\theta)}{\xi^4(\theta)}+\frac{P^2B^2(\theta)(\xi^2(\theta)-\lambda^2(\theta))^2}{4\xi^2(\theta)}\right]^{\frac{n-1}{2n}}}\right]d\theta \tag{6.2}$$

从而对于Bingham液体，当任给一个角度$\bar{\theta}_i\in[\theta_{i-1},\theta_i]$，且$\tau_0$，$\eta_p$，$R_1$，$R_2$，$\Omega_i$，$P$和$e$已知时，先由(3.1)′算出$B(\bar{\theta}_i)$，由(*)式算出$k(\bar{\theta}_i)$，由(4.12)迭代出$\beta(\bar{\theta}_i)$，$\lambda(\bar{\theta}_i)$，再由(6.1)式算出里层积分值，记作$\bar{A}(\bar{\theta}_i)$，最后由(6.1)式得到

$$\overline{\Delta Q_i}=-\frac{\pi PB^4(\bar{\theta}_i)}{2m}\bar{A}(\bar{\theta}_i)$$

进而得到Bingham液体偏心环空层流螺旋流的流量为

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\overline{\Delta Q_i}=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi PB^4(\bar{\theta}_i)}{2m}\bar{A}(\bar{\theta}_i) \tag{6.3}$$

同理，对于幂律液体，任给一个角度$\bar{\theta}_i\in[\theta_i,\theta_{i-1}]$，且$n$，$K$，$R_1$，$R_2$，$\Omega_i$，$P$和$e$已知时，由(3.1)′式算出$B(\bar{\theta}_i)$，由(*)式算出$k(\bar{\theta}_i)$，由(4.13)式迭代出$\beta(\bar{\theta}_i)$，$\lambda(\bar{\theta}_i)$，再由

(6.2)式算出里层积分值，记作$A(\bar{\theta}_i)$，最后由(6.2)式得到

$$\Delta Q_i=-\frac{\pi PB^4(\bar{\theta}_i)}{2m}A(\bar{\theta}_i)$$

进而得到幂律液体偏心环空层流螺旋流的流量为

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\Delta Q_i=-\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi PB^4(\bar{\theta}_i)}{2m}A(\bar{\theta}_i) \tag{6.4}$$

显然，当m越大时，上述计算的流量越精确。

3. 压降的计算步骤

将$[0,2\pi]$ m等分，任给m个角度$\bar{\theta}_i\in[\theta_{i-1},\theta_i]$ $(i=1,2,\cdots,m)$，对于Bingham液体，当τ_0，η_p，Q_i，$\bar{v}$，R_1，R_2和ε已知时，由(3.1)′式算出$B(\bar{\theta}_i)$，由(*)式算出$k(\bar{\theta}_i)$；然后假定一个P值，由(4.12)式迭代出$\beta(\bar{\theta}_i)$，$\lambda(\bar{\theta}_i)$；由此算出(4.16)式分母的里层积分，记作$A(\bar{\theta}_i,P)$。最后将得到的这组P，$\beta(\bar{\theta}_i)$，$\lambda(\bar{\theta}_i)$代入压降方程(4.16)验算，若满足

$$P\approx\frac{-4\pi(R_2^2-R_1^2)\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{m}B^4(\bar{\theta}_i)A(\bar{\theta}_i,P)\Delta\theta} \tag{6.5}$$

则这个P即为所求。若不满足(6.5)，则重新假定P值，而$\bar{\theta}_i$不变，由(4.12)式再迭代出$\beta(\bar{\theta}_i)$，$\lambda(\bar{\theta}_i)$，直到P，$\beta(\bar{\theta}_i)$，$\lambda(\bar{\theta}_i)$满足了(6.5)式为止。将所得到的压力梯度P代入

$$h_f=-PL/\rho g \tag{6.6}$$

即可算出压降h_f。其中L为环空实验段长，ρ为液体密度，g为重力加速度。

用完全类似的方法，可以计算出幂律液体偏心环空层流螺旋流动的压降。

4. 稳定性参数的计算步骤

任给一角度$\theta\in[0,2\pi]$，由(3.1)′式算出$B(\theta)$，由(*)式算出$k(\theta)$；然后，对于Bingham液体的τ_0，η_p，Ω_i和P由(4.12)式迭代出$\beta(\theta)$，$\lambda(\theta)$，进而算出$J_1(\xi,\theta)$，$J_2(\xi,\theta)$，最后由(5.2)式算出Bingham液体的H值分布。

对于幂律液体的n，K，Ω_i和P由(4.13)式迭代出$\beta(\theta)$，$\lambda(\theta)$，进而得到$J_1(\xi,\theta)$，$J_2(\xi,\theta)$，最后由(5.2)式算出幂律液体的H值分布。

七、结　束　语

本文利用作者的同心环空螺旋流的理论和偏心环空螺旋流流场的无限细分法，对偏心环空中的任意一点(r,θ)，则通过$\xi=\xi(\theta)=r/B(\theta)$，能得到非牛顿流体偏心环空螺旋流的$\eta(\xi,\theta)$，$\omega(\xi,\theta)$，$u(\xi,\theta)$，$v(\xi,\theta)$，$Q$，$P$和$H(\xi,\theta)$及$H_{max}$的解析表达式。这比直接研究方程组(2.9)和(2.10)要容易和精确得多。

参　考　文　献

[1] Rivlin, R. S., Further Remarks on the stress-Deformation Relations for isotropic materials, *J. Rat. Mech. Anal.*, 4(1955), 681.

[2] Coleman, B. D. and W. Noll, Helical Flow of general fluids, *J. Appl. Phys.*,

30(1959), 1508.
[3] Fredrickson, A. G., Helical flow of viscoelastic fluids, *Chem. Eng. Sci.*, 11 (1960), 252.
[4] Walker, R. E., Hydraulics limits are set by flow restrictions, *Oil Gas J.*, 74(40)(1976), 87.
[5] Zhang, H. Q. and Cui, H. Q., The Helical Flow of the Power Law Fluid in an Annular Space, *Proceedings of the international conference on nonlinear mechanics*(Shanghai), (1985), 834—839.
[6] Zhang, H. Q. and Cui, H. Q., Analytical Solutions of the Helical Flow of the Power Law Fluid in Pipes, *Proceedings of the international symposium on multiphase flows*(Hangzhou, 1987), 491—495.
[7] 张海桥、崔海清，一类带屈服应力的粘性流体在钻柱中流动的数学模型，大庆石油学院学报，1(1990), 86—94.
[8] 陈文芳，非牛顿流体的一些本构方程，力学学报，1(1983), 16—26.
[9] Hanks, R. W., The laminar-turbulent transition for flow in pipes, concentric Annuli, and paralled plates, *A. I. ch. E. J.*, 26(1)(1980), 152.
[10] 张海桥，钻井液偏心环空螺旋流的无限细分法，大庆石油学院学报，2(1991), 104—114.

Analytical Solutions of the Helical Flow of Non-Newtonian Fluid in Eccentric Annular Space

Zhang Hai-qiao Wu Ji-zhou

(Daqing Petroleum Institute, Anda)

Abstract

Many problems in petroleum and chemical industry can be reduced to the solutions of the helical flow of Non-Newtonian fluid in eccentric annular space. This paper studies the flow law of the laminar helical flow of the power law fluid and Bingham fluid in eccentric annular space and the determination of the flow state. In theory, by the principle of the fluid mechanics, with methematical methods, based on our theory of the helical flow in concentric annular space and through the infinite subdivision method for the flow field of eccentric annular space helical flow, the apparent viscosity distribution, the velocity distribution, the flow rate and the pressure drop equation of this field can be given, and then the stability parameter, characterizing the transition from larminar to turbulent flow, is established.

Key words Power law fluid, eccentric annular space, helical flow, Bingham fluid