

# 区间参数结构振动问题的矩阵摄动法\*

邱志平 陈塑寰 刘中生

(长春 吉林工业大学计算力学中心, 1993年12月3日收到)

## 摘 要

当结构的参数具有不确定性时, 结构的固有频率也将具有某种程度的不确定性。本文讨论了区间参数结构的振动问题, 将区间参数结构的特征值问题归结为两个不同的特征值问题来求解。提出了求解区间参数结构振动问题的矩阵摄动方法。数值运算结果表明, 本文所提出方法具有运算量小, 结果精度高等优点。

**关键词** 固有频率 区间参数 矩阵摄动

## 一、引 言

具有确定性参数的结构振动理论已发展得相当成熟。然而, 在实际工程中, 由于大量不确定信息的存在, 如制造误差、测量误差, 使得所获得的结构参数的数值往往是近似的。以此近似的结构参数为基础, 所求得的结构固有频率显然是不准确的。因此, 如能给出这种不精确固有频率的一种有用的估计, 无论在理论上还是在实际应用上都是有意义的。目前, 大致有三种描述不确定性的结构参数, 它们是: 随机参数、模糊参数和区间参数。有关随机参数和模糊参数的结构振动问题已有很多文献进行了讨论<sup>[4-7]</sup>。而对具有区间参数结构的振动问题则很少有人涉及到。如果结构参数的不确定性用区间来描述, 显然, 结构的固有频率也将是区间形式的。本文将讨论如何计算具有区间参数结构振动系统特征值的上下界, 也就是讨论如何求解广义区间特征值问题。

## 二、广义区间特征值问题

在实际的工程动力分析中, 当结构的刚度矩阵 $K$ 和质量矩阵 $M$ 受到不确定性影响时, 如何求解方程 $Ku = \lambda Mu$ 是有工程意义的, 也就是说, 在具体的计算中, 当结构的刚度矩阵 $K$ 和质量矩阵 $M$ 的元素 $k_{ij}$ 和 $m_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ 具有一定的偏差时, 如何确定特征值 $\lambda_i$ 的偏差。

考虑结构振动的特征值问题

\* 唐立民推荐。  
国家自然科学基金资助项目  
1992年11月30日第一次收到。

$$Ku = \lambda Mu \quad (2.1)$$

其中矩阵  $K$  和  $M$  的变化范围为

$$\underline{K} \leq K \leq \bar{K} \quad \text{或} \quad \underline{k}_{ij} \leq k_{ij} \leq \bar{k}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

$$\underline{M} \leq M \leq \bar{M} \quad \text{或} \quad \underline{m}_{ij} \leq m_{ij} \leq \bar{m}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

式中  $K = (k_{ij})$  为刚度矩阵,  $M = (m_{ij})$  为质量矩阵,  $\lambda$  是特征值而  $u$  为其相应的特征向量.  $K$  和  $M$  都是对称的, 且  $K$  为半正定的,  $M$  为正定的.  $\underline{K} = (\underline{k}_{ij})$  和  $\bar{K} = (\bar{k}_{ij})$  分别为刚度矩阵的下界和上界, 而  $K = (k_{ij})$  的取值是不确定的, 其取值范围为 (2.2) 式;  $\underline{M} = (\underline{m}_{ij})$  和  $\bar{M} = (\bar{m}_{ij})$  分别为质量矩阵的下界和上界, 而  $M = (m_{ij})$  的取值是不确定的, 其取值范围为 (2.3) 式.

借助于区间矩阵表示法<sup>[1~3]</sup>, (2.2) 和 (2.3) 式可写成

$$K \in K', \quad M \in M' \quad (2.4)$$

式中  $K' = [\underline{K}, \bar{K}]$  为半正定区间矩阵<sup>[8]</sup>,  $M' = [\underline{M}, \bar{M}]$  为正定区间矩阵.

利用 (2.4) 式, (2.1)、(2.2) 和 (2.3) 式可方便地合写成

$$K'u = \lambda M'u \quad (2.5)$$

方程 (2.5) 称为广义区间特征值问题<sup>[3]</sup>.

为理解问题的方便, 区间特征值问题可叙述成: 在已知区间矩阵  $K'$  和  $M'$  的中点  $K^0 = (\bar{K} + \underline{K})/2$ ,  $M^0 = (\bar{M} + \underline{M})/2$  以及区间矩阵  $K'$  和  $M'$  的不确定量  $\Delta K = (\bar{K} - \underline{K})/2$ ,  $\Delta M = (\bar{M} - \underline{M})/2$  的条件下, 如何确定满足矩阵集合  $K' = [\underline{K}, \bar{K}] = \{K : |K - K^0| \leq \Delta K\}$  和  $M' = [\underline{M}, \bar{M}] = \{M : |M - M^0| \leq \Delta M\}$  所有可能组合矩阵  $K$  和  $M$  所决定的、满足方程  $Ku = \lambda Mu$  的区间特征值  $\lambda'$ , 即

$$\lambda' = (\lambda'_i) = [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i], \quad \lambda'_i = [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

其中  $\underline{\lambda}$  和  $\bar{\lambda}$  分别为下面集合的下界和上界

$$\Gamma = \{\lambda : \lambda \in R, Ku = \lambda Mu, u \neq 0, K \in K', M \in M'\} \quad (2.7)$$

式中

$$\underline{\lambda}_i = \min_{K \in K', M \in M'} \lambda_i(\langle K, M \rangle) \quad (2.8)$$

$$\bar{\lambda}_i = \max_{K \in K', M \in M'} \lambda_i(\langle K, M \rangle) \quad (2.9)$$

而<sup>[9,10]</sup>

$$\lambda_i(\langle K, M \rangle) = \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T K u}{u^T M u} \quad (2.10)$$

在矩阵约束 (2.2) 和 (2.3) 条件下, 考虑结构振动的瑞利商

$$\lambda_i = \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T K u}{u^T M u} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.11)$$

利用区间分析中的区间扩张<sup>[1,2]</sup>, (2.11) 式变为

$$\lambda'_i = \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T K' u}{u^T M' u} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

由区间的中心表示法<sup>[1,2]</sup>, 刚度区间矩阵和质量区间矩阵可写成

$$K' = K^0 + \Delta K e_\Delta \quad (2.13)$$

$$M' = M^0 + \Delta M e_\Delta \quad (2.14)$$

式中,  $e_\Delta = [-1, 1]$ ,  $K^0 = (\bar{K} + \underline{K})/2$ ,  $\Delta K = (\bar{K} - \underline{K})/2$ ,  $M^0 = (\bar{M} + \underline{M})/2$ ,  $\Delta M =$

$(\bar{M}-\underline{M})/2$ .

将(2.13)和(2.14)式代入(2.12)式中, 并将(2.12)式写成区间形式

$$\begin{aligned} \lambda_i^I &= \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T(K^o + \Delta K e_\Delta)u}{u^T(M^o + \Delta M e_\Delta)u} \\ &= \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{[u^T K^o u - |u|^T \Delta K |u|, u^T K^o u + |u|^T \Delta K |u|]}{[u^T M^o u - |u|^T \Delta M |u|, u^T M^o u + |u|^T \Delta M |u|]} \end{aligned} \quad (2.15)$$

为计算每个特征值 $\lambda_i$ 的上下界, 我们仍引进 Deif 的假设<sup>[3]</sup>, 此假设为: 当矩阵 $K$ 和 $M$ 分别在区间 $K^I = [K, \bar{K}]$ 和 $M^I = [\underline{M}, \bar{M}]$ 变化时, 与 $\lambda_i$ 相应的特征向量各分量 $u^i$ 的符号保持不变.

设

$$S^i = \text{diag}(\text{sgn}(u_1^i), \text{sgn}(u_2^i), \dots, \text{sgn}(u_n^i)), \quad u_j^i \neq 0 \quad (2.16)$$

则有

$$S^i u^i = |u^i| > 0 \quad (2.17)$$

将 $|u| = S^i u$ 代入(2.15)式中, 得

$$\lambda_i^I = \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{[u^T(K^o - S^i \Delta K S^i)u, u^T(K^o + S^i \Delta K S^i)u]}{[u^T(M^o - S^i \Delta M S^i)u, u^T(M^o + S^i \Delta M S^i)u]} \quad (2.18)$$

由区间运算, 可得

$$\lambda_i^I = \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \left[ \frac{u^T(K^o - S^i \Delta K S^i)u}{u^T(M^o + S^i \Delta M S^i)u}, \frac{u^T(K^o + S^i \Delta K S^i)u}{u^T(M^o - S^i \Delta M S^i)u} \right] \quad (2.19)$$

考虑到下面几个表达式

$$|u|^T \Delta K |u| = u^T S^i \Delta K S^i u \geq 0 \quad (2.20)$$

$$|u|^T \Delta M |u| = u^T S^i \Delta M S^i u \geq 0 \quad (2.21)$$

$$K^o - S^i \Delta K S^i = K^o + S^i \Delta K S^i - 2S^i \Delta K S^i \quad (2.22)$$

$$M^o + S^i \Delta M S^i = M^o - S^i \Delta M S^i + 2S^i \Delta M S^i \quad (2.23)$$

从而, 有

$$\begin{aligned} &\min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T(K^o - S^i \Delta K S^i)u}{u^T(M^o + S^i \Delta M S^i)u} \\ &= \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T(K^o + S^i \Delta K S^i - 2S^i \Delta K S^i)u}{u^T(M^o - S^i \Delta M S^i + 2S^i \Delta M S^i)u} \\ &\leq \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T(K^o + S^i \Delta K S^i)u}{u^T(M^o - S^i \Delta M S^i)u} \end{aligned} \quad (2.24)$$

这样, 从(2.19)式, 可得

$$\lambda_i^I = [\underline{\lambda}_i^I, \bar{\lambda}_i^I] = \left[ \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T(K^o - S^i \Delta K S^i)u}{u^T(M^o + S^i \Delta M S^i)u}, \min_{\Phi_i \subset R^n} \max_{\substack{u \in \Phi_i \\ u \neq 0}} \frac{u^T(K^o + S^i \Delta K S^i)u}{u^T(M^o - S^i \Delta M S^i)u} \right] \quad (2.25)$$

根据区间相等的充要条件<sup>[1, 2]</sup>, 从(2.25)式可得

$$\underline{\lambda}_i = \min_{\Phi_i \subset R^n, u \in \Phi_i, u \neq 0} \max_{u \neq 0} \frac{u^T (K^0 - S^T \Delta K S^T) u}{u^T (M^0 + S^T \Delta M S^T) u} \quad (2.26)$$

$$\bar{\lambda}_i = \min_{\Phi_i \subset R^n, u \in \Phi_i, u \neq 0} \max_{u \neq 0} \frac{u^T (K^0 + S^T \Delta K S^T) u}{u^T (M^0 - S^T \Delta M S^T) u} \quad (2.27)$$

瑞利商的驻值问题完全等价于代数特征值问题<sup>[9,10]</sup>。显然, 与(2.26)式等价的特征值问题为

$$(K^0 - S^T \Delta K S^T) u_i = \underline{\lambda}_i (M^0 + S^T \Delta M S^T) u_i \quad (2.28)$$

式中  $u_i$  是与  $\underline{\lambda}_i$  相应的特征向量。

与(2.27)式等价的特征值问题为

$$(K^0 + S^T \Delta K S^T) \bar{u}_i = \bar{\lambda}_i (M^0 - S^T \Delta M S^T) \bar{u}_i \quad (2.29)$$

式中  $\bar{u}_i$  是与  $\bar{\lambda}_i$  相应的特征向量。

至此, 可得下面的结论:

如果  $K^I = [K, \bar{K}] = [K^0 - \Delta K, K^0 + \Delta K]$  是半正定区间矩阵,  $M^I = [M, \bar{M}] = [M^0 - \Delta M, M^0 + \Delta M]$  是正定区间矩阵, 而

$$S^I = \text{diag}(\text{sgn}(u_1^I), \text{sgn}(u_2^I), \dots, \text{sgn}(u_n^I)), \quad u_j^I \neq 0 \quad (2.30)$$

取在方程

$$K^0 u^I = \lambda_i M^0 u^I \quad (2.31)$$

相应的第  $i$  个特征向量  $u^I$  上, 且在  $K^I$  和  $M^I$  中保持不变, 则矩阵  $K$ ,  $K \in K^I$  和  $M$ ,  $M \in M^I$  的特征值  $\lambda_i$  的变化区间为

$$\lambda_i^I = [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i] \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.32)$$

式中特征值下界  $\underline{\lambda}_i$  满足方程

$$(K^0 - S^T \Delta K S^T) u_i = \underline{\lambda}_i (M^0 + S^T \Delta M S^T) u_i \quad (2.33)$$

特征值上界  $\bar{\lambda}_i$  满足方程

$$(K^0 + S^T \Delta K S^T) \bar{u}_i = \bar{\lambda}_i (M^0 - S^T \Delta M S^T) \bar{u}_i \quad (2.34)$$

### 三、区间特征值的矩阵摄动公式

尽管前面的结论可以确定出区间参数结构特征值的上下界。但是, 对每个区间特征值  $\lambda_i^I$ , 需要计算两个不同的特征值问题。而每个特征值问题的解中, 只有一个特征解是有用的。所以, 要针对区间特征值问题的特点, 找出适于求解区间参数结构特征值上下界的算法。

在矩阵摄动公式中, 如果取  $K_0 = K^0$ ,  $K_1 = \pm S^T \Delta K S^T$ ,  $M_0 = M^0$ ,  $M_1 = \pm S^T \Delta M S^T$ , 则可用矩阵摄动方法计算区间特征值的上界  $\bar{\lambda}_i$  和下界  $\underline{\lambda}_i$ 。

现将有关公式归纳如下:

对特征值的上界  $\bar{\lambda}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 有

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_{0i} + \varepsilon \bar{\lambda}_{1i} + \varepsilon^2 \bar{\lambda}_{2i} \quad (3.1)$$

$$\bar{u}_i = u_{0i} + \varepsilon \bar{u}_{1i} + \varepsilon^2 \bar{u}_{2i} \quad (3.2)$$

式中  $\bar{\lambda}_{1i}$  和  $\bar{u}_{1i}$  分别是上界特征值和相应的特征向量的一阶摄动量

$$\bar{\lambda}_{1i} = u_{0i}^T (S^T \Delta K S^T + \lambda_{0i} S^T \Delta M S^T) u_{0i} \quad (3.3)$$

$$\bar{u}_{1i} = \sum_{k=1}^n \bar{C}_{1k} u_{ok} \quad (3.4)$$

$$\bar{C}_{1k} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{oi} - \lambda_{ok}} [u_{ci}^T (S^T \Delta K S^T + \lambda_{oi} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T) u_{oi}], & i \neq k \\ \frac{1}{2} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{oi}, & i = k \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\quad (3.6)$$

而  $\bar{\lambda}_{2i}$  和  $\bar{u}_{2i}$  分别是上界特征值和相应的特征向量的二阶摄动量

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{2i} = & u_{ci}^T S^T \Delta K S^T \bar{u}_{1i} + \lambda_{oi} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T \bar{u}_{1i} \\ & - \bar{\lambda}_{1i} u_{ci}^T M^o \bar{u}_{1i} + \bar{\lambda}_{1i} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{oi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\bar{u}_{2i} = \sum_{k=1}^n \bar{C}_{2k} u_{ok} \quad (3.8)$$

$$\bar{C}_{2k} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{oi} - \lambda_{ok}} [u_{ci}^T S^T \Delta K S^T \bar{u}_{1i} + \lambda_{oi} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T \bar{u}_{1i} \\ \quad - \bar{\lambda}_{1i} u_{ci}^T M^o \bar{u}_{1i} + \lambda_{1i} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{oi}], & i \neq k \\ \frac{1}{2} (\bar{u}_{1i}^T M^o \bar{u}_{1i} - u_{ci}^T S^T \Delta M S^T \bar{u}_{1i} - \bar{u}_{1i}^T S^T \Delta M S^T u_{oi}), & i = k \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\quad (3.10)$$

对特征值的下界  $\hat{\lambda}_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 有

$$\hat{\lambda}_i = \lambda_{oi} + \varepsilon \hat{\lambda}_{1i} + \varepsilon^2 \hat{\lambda}_{2i} \quad (3.11)$$

$$u_i = u_{oi} + \varepsilon u_{1i} + \varepsilon^2 u_{2i} \quad (3.12)$$

式中  $\hat{\lambda}_{1i}$  和  $u_{1i}$  分别是下界特征值和相应的特征向量的一阶摄动量

$$\hat{\lambda}_{1i} = -u_{ci}^T (S^T \Delta K S^T + \lambda_{oi} S^T \Delta M S^T) u_{oi} \quad (3.13)$$

$$u_{1i} = \sum_{k=1}^n \underline{C}_{1k} u_{ok} \quad (3.14)$$

$$\underline{C}_{1k} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{oi} - \lambda_{ok}} [-u_{ci}^T (S^T \Delta K S^T - \lambda_{oi} S^T \Delta M S^T) u_{oi}], & i \neq k \\ -\frac{1}{2} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{oi}, & i = k \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\quad (3.16)$$

而  $\hat{\lambda}_{2i}$  和  $u_{2i}$  分别是下界特征值和相应的特征向量的二阶摄动量

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{2i} = & -u_{ci}^T S^T \Delta K S^T u_{1i} - \lambda_{oi} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{1i} \\ & - \hat{\lambda}_{1i} u_{ci}^T M^o u_{1i} - \hat{\lambda}_{1i} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{oi} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$u_{2i} = \sum_{k=1}^n \underline{C}_{2k} u_{ok} \quad (3.18)$$

$$\underline{C}_{2k} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{oi} - \lambda_{ok}} [-u_{ci}^T S^T \Delta K S^T u_{1i} - \lambda_{oi} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{1i} \\ \quad - \hat{\lambda}_{1i} u_{ci}^T M^o u_{1i} + \hat{\lambda}_{1i} u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{oi}], & i \neq k \\ -\frac{1}{2} (u_{1i}^T M^o u_{1i} + u_{ci}^T S^T \Delta M S^T u_{1i} + u_{1i}^T S^T \Delta M S^T u_{oi}), & i = k \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\quad (3.20)$$

## 四、数值例子

下面用例题来说明如何求解区间参数结构系统的特征值上下界及其特征向量。如图1所示的5层框架结构，其结构区间参数分别为：

刚度参数的上下界为：（单位：N/m）

$$k_1^l = [2000, 2020], k_1^u = [1800, 1850]$$

$$k_2^l = [1600, 1630], k_2^u = [1400, 1420]$$

$$k_3^l = [1200, 1210], k_3^u = [1000, 1008]$$

质量参数的上下界为（单位：kg）

$$m_1^l = [29, 31], m_1^u = [26, 28], m_2^l = [26, 28],$$

$$m_2^u = [24, 26], m_3^l = [17, 19]$$

而刚度区间矩阵为：

$$K^I = \begin{bmatrix} [3800, 3870] - [1800, 1850] & & & & \\ -[1800, 1850] & [3400, 3480] - [1600, 1630] & & & \\ & -[1600, 1630] & [3000, 3050] - [1400, 1420] & & \\ & & -[1400, 1420] & [2600, 2630] - [1200, 1210] & \\ & & & -[1200, 1210] & [1200, 1210] \end{bmatrix}$$

质量区间矩阵为：

$$M^I = \begin{bmatrix} [29, 30] & & & & \\ & [26, 28] & & & \\ & & [26, 28] & & \\ & & & [24, 26] & \\ & & & & [17, 19] \end{bmatrix}$$

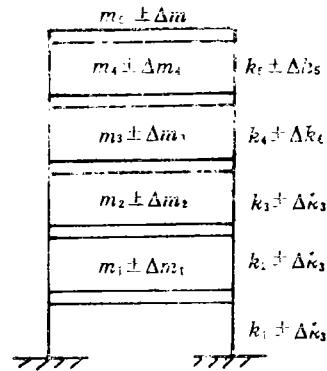


图1 框架结构系统

为了便于比较，现将框架由精确方法所求得特征值的下界和上界及其特征向量列在表1和表2，一阶摄动特征值的下界和上界以及相应的特征向量列在表3和表4，二阶摄动特征值的下界和上界以及相应的特征向量列在表5和表6。在表3，4，5和6中还列有摄动法所求区间特征值和精确法所求区间特征值之间的相对误差值。

表1 精确特征值的下界及其特征向量

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$\lambda_1$	0.46166E+01	0.40643E+02	0.98180E+02	0.15784E+03	0.20951E+03
$\nu_1$	0.32552E-01	-0.79295E-01	-0.10071E+00	-0.88518E-01	0.82234E-01
	0.64346E-01	-0.10888E+00	-0.41179E-01	0.53757E-01	-0.12312E+00
	0.92170E-01	-0.61089E-01	0.99695E-01	0.64123E-01	0.97278E-01
	0.11247E+00	0.45510E-01	0.64018E-01	-0.12761E+00	-0.53462E-01
	0.12235E+00	0.12873E+00	-0.11545E+00	0.85110E-01	0.25228E-01

从表中，可以看到：摄动方法不但适于求解区间参数结构的特征值问题，而且求解的精度也是比较高的。例如，对第5个特征值的下界  $\lambda_5$ ，一阶摄动误差为：5.42%，而二阶摄动误差则减少为：0.279%。

表2 精确特征值的上界及其特征向量

	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$
$\bar{\lambda}_i$	0.78303E+01	0.47820E+02	0.10940E+03	0.17400E+03	0.23008E+03
$u_i$	0.31117E-01	-0.82752E-01	-0.10813E+00	-0.89522E-01	0.84609E-01
	0.62976E-01	-0.11416E+00	-0.41900E-01	0.56912E-01	-0.12817E+00
	0.93953E-01	-0.66494E-01	0.10308E+00	0.66373E-01	0.10072E+00
	0.11905E+00	0.44033E-01	0.63923E-01	-0.13303E+00	-0.60860E-01
	0.13266E+00	0.13308E+00	-0.11903E+00	0.92080E-01	0.27260E-01

表3 一阶摄动特征值的下界及其特征向量

	$\underline{\lambda}_1$	$\underline{\lambda}_2$	$\underline{\lambda}_3$	$\underline{\lambda}_4$	$\underline{\lambda}_5$
$\underline{\lambda}_i$	0.45623E+01	0.40495E+02	0.97966E+02	0.15753E+03	0.20915E+03
误差	0.54275E-01	0.14733E+00	0.21423E+00	0.31794E+00	0.36542E+00
$u_i$	0.32528E-01	-0.79261E-01	-0.10061E+00	-0.88503E-01	0.82234E-01
	0.64307E-01	-0.10886E+00	-0.41246E-01	0.53670E-01	-0.12307E+00
	0.92119E-01	-0.61114E-01	0.99607E-01	0.64182E-01	0.97213E-01
	0.11240E+00	0.45407E-01	0.64130E-01	-0.12754E+00	-0.58381E-01
	0.12227E+00	0.12858E+00	-0.11536E+00	0.84924E-01	0.25147E-01

表4 一阶摄动特征值的上界及其特征向量

	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$
$\bar{\lambda}_i$	0.77702E+01	0.47661E+02	0.10917E+03	0.17366E+03	0.22969E+03
误差	0.60132E-01	0.15948E+00	0.23101E+00	0.34654E+00	0.39366E+00
$u_i$	0.31090E-01	-0.82709E-01	-0.10803E+00	-0.89505E-01	0.84611E-01
	0.62931E-01	-0.11414E+00	-0.41977E-01	0.56814E-01	-0.12812E+00
	0.93893E-01	-0.66522E-01	0.10298E+00	0.66443E-01	0.10065E+00
	0.11897E+00	0.43917E-01	0.64052E-01	-0.13296E+00	-0.60771E-01
	0.13257E+00	0.13293E+00	-0.11895E+00	0.91862E-01	0.27167E-01

表5 二阶摄动特征值的下界及其特征向量

	$\underline{\lambda}_1$	$\underline{\lambda}_2$	$\underline{\lambda}_3$	$\underline{\lambda}_4$	$\underline{\lambda}_5$
$\underline{\lambda}_i$	0.46194E+01	0.40649E+02	0.98188E+02	0.15786E+03	0.20953E+03
误差	0.27910E-02	0.58042E-02	0.80806E-02	0.13653E-01	0.13582E-01
$u_i$	0.32554E-01	-0.79299E-01	-0.10072E+00	-0.88519E-01	0.82233E-01
	0.64349E-01	-0.10888E+00	-0.41174E-01	0.53762E-01	-0.12312E+00
	0.92174E-01	-0.61087E-01	0.99700E-01	0.64118E-01	0.97280E-01
	0.11248E+00	0.45517E-01	0.64010E-01	-0.12761E+00	-0.58466E-01
	0.12236E+00	0.12873E+00	-0.11545E+00	0.85133E-01	0.25234E-01

表6 二阶摄动特征值的上界及其特征向量

	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_3$	$\bar{\lambda}_4$	$\bar{\lambda}_5$
$\bar{\lambda}_1$	0.78272E+01	0.47814E+02	0.10939E+03	0.17399E+03	0.23007E+03
误差	0.30658E-02	0.63465E-02	0.87071E-02	0.14946E-01	0.14660E-01
$u_1$	0.31115E-01	-0.82748E-01	-0.10814E+00	-0.89521E-01	0.84609E-01
	0.62973E-01	-0.11416E+00	-0.41905E-01	0.56906E-01	-0.12817E+00
	0.93948E-01	-0.66496E-01	0.10308E+00	0.66379E-01	0.10072E+00
	0.11904E+00	0.44026E-01	0.63932E-01	-0.13303E+00	-0.60856E-01
	0.13266E+00	0.13307E+00	-0.11903E+00	0.92068E-01	0.27254E-01

## 五、结 论

基于特征向量各分量符号的不变性, 本文得到了具有区间参数结构振动问题特征值的求解公式。根据区间特征值问题的特点, 矩阵摄动方法能用来确定区间参数结构振动系统特征值的上下界。数值例子说明本方法的求解精度是令人满意的。

在区间分析中, 广义区间特征值问题不能转化为标准区间特征值问题, Deif<sup>[3]</sup>曾对标准区特征值问题导出了类似于本文中的求解公式。有关求解区间特征值问题的一般性方法还亟做更进一步的研究。

## 参 考 文 献

- [1] Moore, R., *Method and Applications of Interval Analysis*, SIAM. Publ., Philadelphia (1979).
- [2] Alefeld, G. and J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York (1983).
- [3] Deif, A., *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers* (2nd Edition), Abacuss Press (1991), 262—281.
- [4] Chen Su-huan, *Matrix Perturbation Theory in Structural Dynamics*, International Academic Publishers (1993).
- [5] Ben-Haim, Y. and I. Elishakoff, *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, Elsevier, New York (1990).
- [6] Wang Guang-yuan and Qu Jin-ping, Fuzzy random vibration of muti-degree-freedom hysteretic systems subjected to earthquakes, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15(5) (1987).
- [7] Huang Wen-hu, Vibration of some structures with random parameters, *AIAA J.*, 20 (1982), 1001—1008.
- [8] Shi, Z.C. and W.B. Gao, A necessary and sufficient condition for the positive-definiteness of interval symmetric matrices, *Int. J. Control*, 43(1) (1986), 325—328.
- [9] Franklin, J. N., *Matrix Theory*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1968), 141—193.
- [10] Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York (1970), 60—64.



## Matrix Perturbation Method for the Vibration Problem of Structures with Interval Parameters

Qiu Zhi-ping Chen Su-huan Liu Zhong-sheng

*(The Centre of Computational Mechanics, Jilin University of Technology, Changchun)*

### Abstract

When the parameters of the structures are uncertain, the structural natural frequencies become uncertain. In this paper, we deal with the vibration problem of the structure with interval parameters, the eigenvalue problem of the structures with interval parameters is transferred into two different eigenvalue problems to be solved. The perturbation method is applied to the vibration problem of the structures with interval parameters, the numerical results show that the proposed method is sufficiently accurate and needs little computational efforts.

**Key words** natural frequency, interval parameter, matrix perturbation