应用数学和力学，第15卷第6期(1994年6月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

粘性流体动力学的混合协调元和混合杂交非协调元变分法*

沈孝明

(上海电视大学宝山分校，1992年9月12日收到)

摘 要

本文提出并论证了粘性正压流体流动的混合协调有限元变分原理，在论证中发现应力协调条件会自然满足。同时提出论证了有关的混合杂交非协调有限元广义变分原理，这能够简化粘性流动的非协调元计算。

关键词 粘性流体力学 计算流体力学 变分原理 有限元法 混合协调元 混合杂交非协调元

一、引 言

粘性流体力学的变分原理是一个颇有难度的研究课题[1]，近年来陆续取得了部份成果[1]~[8].它们都是研究全场问题的.有鉴于分区变分方法"对于有限元计算特别有用"([3]，第522页)，它可作为"有限元计算的基础定理"([3]，第467页)，本文提出并论证了粘性正压流体动力学的混合协调元和混合杂交非协调元的变分方法，以满足粘性流体动力学有限元计算的需要.

二、基本方程组与有限元的划分

1. 基本方程组及边界条件

对于粘性正压流体，有

$$\partial\rho/\partial t+\rho u_{k,k}+\rho_{,k}u_k=0,\qquad 在V内 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})=0,\qquad 在V内 \tag{2.2}$$

$$p-\varphi(\rho)=0,\qquad 在V内（正压流体物态方程） \tag{2.3}$$

$$\rho\partial u_i/\partial t+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\sigma_{ij,j}=0,\qquad 在V内 \tag{2.4}$$

$$u_i=0,\qquad 在\Gamma_s上（固定边界） \tag{2.5}$$

---

* 钱伟长推荐.

第二届(北京)国际流体力学学术会议论文，北京(1993，7).
1991年12月2日第一次收到.

$$u_i-\bar{u}_i=0, \qquad 在\Gamma_u上（供“水”口边界） \tag{2.6}$$

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i=0, \qquad 在\Gamma_\sigma上（受力边界） \tag{2.7}$$

其中$\Gamma_s+\Gamma_u+\Gamma_\sigma=\Gamma$为体积区域$V$的全部边界面．文中采用笛卡尔张量符号．

钱伟长教授在文[5]中建立了粘性正压流体流动的全场问题的功率消耗Π_{pc}的驻值原理及有关的广义变分原理，这无疑是一个重要的贡献．泛函

$$\Pi_{pc}=\Pi_{0c}+\int_V \frac{1}{4\mu}(\sigma_{ij}\sigma_{ij}-3p^2)dV-\int_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_iu_id\Gamma \tag{2.8}$$

其中，

$$\delta\Pi_{0c}=\int_V\left\{\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_ku_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i-p\delta u_{k,k}\right\}dV \tag{2.9}$$

文[5]考虑线性的物态方程$p=k(\rho/\rho_0-1)$，本文则考虑正压流体一般的物态方程$p-\varphi(\rho)=0$.

2．有限元的划分

设把流动区域V划分成N个子区域$V^{(1)},V^{(2)},\cdots,V^{(N)}$，把与小区域$V^{(\alpha)}$相邻接的子区域的编号记作$\alpha'$，并定义集$I_\alpha=\{\alpha'|V^{(\alpha')}与V^{(\alpha)}有公共界面\}$．以$\Gamma^{(\alpha\alpha')}$表示$V^{(\alpha)}$与$V^{(\alpha')}$的公共交界面，并令$\Gamma_{I_\alpha}=\bigcup_{\alpha'\in I_\alpha}(\Gamma^{(\alpha\alpha')})$．子区域$V^{(\alpha)}$的全部边界面$\Gamma^{(\alpha)}$由$\Gamma_s^{(\alpha)}$，$\Gamma_u^{(\alpha)}$，$\Gamma_\sigma^{(\alpha)}$以及$\Gamma_{I_\alpha}$组成．对于某些$V^{(\alpha)}$，边界面$\Gamma_s^{(\alpha)}$，$\Gamma_u^{(\alpha)}$，$\Gamma_\sigma^{(\alpha)}$三者可能有的是空集．定义空集上的面积分为零．

例如，若在$V^{(\alpha)}$上考虑，则由(2.8)式、(2.9)式，可得

$$\Pi_{pc}^{(\alpha)}=\Pi_{0c}^{(\alpha)}+\int_{V^{(\alpha)}}\frac{1}{4\mu^{(\alpha)}}[\sigma_{ij}^{(\alpha)}\sigma_{ij}^{(\alpha)}-3(p^{(\alpha)})^2]dV$$
$$-\int_{\Gamma_\sigma^{(\alpha)}}\bar{f}_i^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)}d\Gamma \tag{2.10}$$

其中，

$$\delta\Pi_{0c}^{(\alpha)}=\int_{V^{(\alpha)}}\left\{\left[\rho^{(\alpha)}\frac{\partial u_i^{(\alpha)}}{\partial t}+\rho^{(\alpha)}u_k^{(\alpha)}u_{i,k}^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha)}\bar{F}_i^{(\alpha)}\right]\delta u_i^{(\alpha)}$$
$$-p^{(\alpha)}\delta u_{k,k}^{(\alpha)}\right\}dV \tag{2.11}$$

下面要用到这两个表达式．

3．交界面协调条件$(\alpha=1,2,\cdots,N)$

$$u_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha')}=0, \qquad 在\Gamma^{(\alpha\alpha')}上，\forall\alpha'\in I_\alpha \tag{2.12}$$

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}+\sigma_{ij}^{(\alpha')}n_j^{(\alpha')}=0, \qquad 在\Gamma^{(\alpha\alpha')}上，\forall\alpha'\in I_\alpha \tag{2.13}$$

$$p^{(\alpha)}-p^{(\alpha')}=0(或者\rho^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha')}=0, \qquad 在\Gamma^{(\alpha\alpha')}上，\forall\alpha'\in I_\alpha \tag{2.14}$$

对于正压流体，交界面上压力协调条件与质量密度协调条件两者只需一个即可．

三、混合协调元变分原理

定理1 在$V^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,2,\cdots,N)$上满足连续性方程(2.1)式、应力流速压力关系(2.2)式

和物态方程(2.3)式，并且在$\Gamma_s^{(a)}$上满足边界条件(2.5)式，在$\Gamma_\sigma^{(a)}$上满足边界条件(2.6)式，在交界面$\Gamma^{(a,a')}$上满足协调条件(2.12)式和(2.14)式的一切可能流动$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$中，使得下列有限元泛函Π_{VBF1}取驻值的$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$，必定是粘性正压流体流动问题的真实流动：

$$\Pi_{\mathrm{VBF1}}=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iint_{V^{(a)}}\left[\frac{1}{4\mu^{(a)}}\left(\sigma_{ij}^{(a)}\sigma_{ij}^{(a)}-3p^{(a)}p^{(a)}\right)\right]dV+\Pi_{0c}^{(a)}\right.$$

$$\left.-\int_{\Gamma_\sigma^{(a)}}\bar{f}_i^{(a)}u_i^{(a)}d\Gamma\right\} \tag{3.1}$$

其中

$$\delta\Pi_{0c}^{(a)}=\int_{V^{(a)}}\left\{\left[\rho^{(a)}\frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial t}+\rho^{(a)}u_k^{(a)}u_{i,k}^{(a)}-\rho^{(a)}F_i^{(a)}\right]\delta u_i^{(a)}\right.$$

$$\left.-p^{(a)}\delta u_{k,k}^{(a)}\right\}dV \tag{3.2}$$

证明 由约束条件(2.2)式得

$$\sigma_{ij}^{(a)}\delta\sigma_{ij}^{(a)}=3p^{(a)}\delta p^{(a)}+2\mu^{(a)}p^{(a)}\delta u_{k,k}^{(a)}+2\mu^{(a)}\sigma_{ij}^{(a)}\delta u_{i,j}^{(a)} \tag{3.3}$$

计算变分$\delta\Pi_{\mathrm{VBF1}}$并利用(3.3)式化简后得

$$\delta\Pi_{\mathrm{VBF1}}=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iint_{V^{(a)}}\left\{\left[\rho^{(a)}\frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial t}+\rho^{(a)}u_k^{(a)}u_{i,k}^{(a)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\rho^{(a)}F_i^{(a)}\right]\delta u_i^{(a)}+\sigma_{ij}^{(a)}\delta u_{i,j}^{(a)}\right\}dV-\int_{\Gamma_\sigma^{(a)}}\bar{f}_i^{(a)}\delta u_i^{(a)}d\Gamma\right\} \tag{3.4}$$

利用分部积分和格林公式以及边界条件(2.5)式、(2.6)式，可得

$$\int_{V^{(a)}}\sigma_{ij}^{(a)}\delta u_{i,j}^{(a)}dV=\int_{V^{(a)}}-\sigma_{ij,j}^{(a)}\delta u_i^{(a)}dV+\int_{\Gamma_\sigma^{(a)}}\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}\delta u_i^{(a)}d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_{I_a}}\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}\delta u_i^{(a)}d\Gamma \tag{3.5}$$

利用上式及协调条件(2.12)式，化简(3.4)式，得

$$\delta\Pi_{\mathrm{VBF1}}=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iint_{V^{(a)}}\left\{\left[\rho^{(a)}\frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial t}+\rho^{(a)}u_k^{(a)}u_{i,k}^{(a)}-\rho^{(a)}F_i^{(a)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\sigma_{ij,j}^{(a)}\right]\delta u_i^{(a)}\right\}dV+\int_{\Gamma_\sigma^{(a)}}\left(\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}-\bar{f}_i^{(a)}\right)\delta u_i^{(a)}d\Gamma\right\}$$

$$+\sum_{\{a,a'\}}\int_{\Gamma^{(a,a')}}\left(\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}+\sigma_{ij}^{(a')}n_j^{(a')}\right)\delta u_i^{(a)}d\Gamma \tag{3.6}$$

式中$\delta u_i^{(a)}$在$V^{(a)}$内，$\delta u_i^{(a)}$在$\Gamma_\sigma^{(a)}$上，$\delta u_i^{(a)}$在$\Gamma^{(aa')}$上都是独立任意的，故得驻值条件

$$\rho^{(\alpha)}\partial u_i^{(\alpha)}/\partial t+\rho^{(\alpha)}u_k^{(\alpha)}u_{i,k}^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha)}F_i^{(\alpha)}-\sigma_{ij,j}^{(\alpha)}=0,\qquad 在V^{(\alpha)}上 \tag{3.7}$$

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-\bar{T}_i^{(\alpha)}=0,\qquad 在\Gamma_\sigma^{(\alpha)}上 \tag{3.8}$$

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}+\sigma_{ij}^{(\alpha')}n_j^{(\alpha')}=0,\qquad 在\Gamma^{(\alpha\alpha')}上，一切\{\alpha,\alpha'\} \tag{3.9}$$

证毕.

应用 由证明过程可知，交界面上面力连续条件(3.9)式是自然满足的，所以，只要事先能保证交界面上的速度和压力是连续的，那么粘性正压流体流动的功率消耗Π_{pc}驻值原理[6]就可以分区进行计算.

四、混合杂交的非协调元变分原理

定理2 在$V^{(\alpha)}(\alpha=1,2,\cdots,N)$上满足连续性方程(2.1)式、应力流速压力关系(2.2)式和物态方程(2.3)式，并且在$\Gamma_u^{(\alpha)}$上满足边界条件(2.5)式、在$\Gamma_\sigma^{(\alpha)}$上满足边界条件(2.6)式的一切可能流动$p^{(\alpha)}$，$\rho^{(\alpha)}$，$u_i^{(\alpha)}$，$\sigma_{ij}^{(\alpha)}$中，使得下列有限元泛函Π_{VBF2}取驻值的$p^{(\alpha)}$，$\rho^{(\alpha)}$，$u_i^{(\alpha)}$，$\sigma_{ij}^{(\alpha)}$，必定是粘性正压流动问题的正确解：

$$\Pi_{VBF2}=\sum_{\alpha=1}^{N}\left\{\int_{\Gamma I_\alpha}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)(\sigma_{ij}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-\sigma_{ij}^{(\alpha')}n_j^{(\alpha')})(u_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha')})\right.\right.$$

$$\left.\left.+c(p^{(\alpha)}-p^{(\alpha')})(\rho^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha')})\right]d\Gamma\right\}+\Pi_{VBF1} \tag{4.1}$$

式中c为x的任意正定（或负定）函数，但是系数$(-1/4)$是"责（值）无旁贷"即唯一的.

证明 计算一阶变分$\delta\Pi_{VBF2}$，利用约束条件(2.2)式及(3.3)式，边界条件(2.5)式、(2.6)式及(3.5)式，化简整理后得

$$\delta\Pi_{VBF2}=\sum_{\alpha=1}^{N}\left\{\int_{V^{(\alpha)}}\left\{\left[\rho^{(\alpha)}\frac{\partial u_i^{(\alpha)}}{\partial t}+\rho^{(\alpha)}u_k^{(\alpha)}u_{i,k}^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha)}F_i^{(\alpha)}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sigma_{ij,j}^{(\alpha)}\right]\delta u_i^{(\alpha)}\right\}dV+\int_{\Gamma_\sigma^{(\alpha)}}(\sigma_{ij}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-\bar{T}_i^{(\alpha)})\delta u_i^{(\alpha)}d\Gamma\Big\}$$

$$+\sum_{\{\alpha,\alpha'\}}\int_{\Gamma^{(\alpha\alpha')}}\left\{\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}+\sigma_{ij}^{(\alpha')}n_j^{(\alpha')})(\delta u_i^{(\alpha)}+\delta u_i^{(\alpha')})\right.$$

$$-\frac{1}{2}(u_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha')})(\delta\sigma_{ij}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-\delta\sigma_{ij}^{(\alpha')}n_j^{(\alpha')})+c(p^{(\alpha)}-p^{(\alpha')})(\delta\rho^{(\alpha)}$$

$$\left.-\delta\rho^{(\alpha')})+c(\rho^{(\alpha)}-\rho^{(\alpha')})(\delta p^{(\alpha)}-\delta p^{(\alpha')})\right\}d\Gamma \tag{4.2}$$

由此得驻值条件为(3.7)式、(3.8)式、(3.9)式及(2.12)式、(2.14)式. 证毕.

应用 用本定理可以简化非协调有限元的计算，因为本定理避免了增加待定的拉格朗日

乘子。而系数$(-1/4)$的唯一性与分部积分法及格林公式有关。$c\neq 0$，为可随意选取的权重

五、混合协调元广义变分原理

定理3 在$V^{(a)}(a=1,2,\cdots,N)$上满足连续性方程(2.1)式和物态方程(2.3)式，并且在交界面上满足协调条件(2.12)式和(2.14)式的一切可能流动$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$中，使得下列有限元泛函$\Pi_{\mathrm{VBF_3}}$取驻值的$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$，必定是粘性正压流动问题的真实流动：

$$\Pi_{\mathrm{VBF_3}}=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iint_{V^{(a)}}-\frac{1}{2\mu^{(a)}}\sigma_{ij}^{(a)}\left[\sigma_{ij}^{(a)}+p^{(a)}\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu^{(a)}u_{k,k}^{(a)}\delta_{ij}\right.\right.$$

$$\left.-\mu^{(a)}(u_{i,j}^{(a)}+u_{j,i}^{(a)})\right]dV-\int_{\Gamma_\sigma^{(a)}}\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}u_i^{(a)}d\Gamma$$

$$\left.-\int_{\Gamma_u^{(a)}}\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}(u_i^{(a)}-\bar{u}_i^{(a)})d\Gamma\right\}+\Pi_{\mathrm{VBF_1}} \tag{5.1}$$

其中$\Pi_{\mathrm{VBF_1}}$见(3.1)及(3.2)式。

证明 计算变分$\delta\Pi_{\mathrm{VBF_3}}$（略）利用分部积分和格林公式，化简整理后，得

$$\delta\Pi_{\mathrm{VBF_3}}=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iint_{V^{(a)}}\left(\left[\rho^{(a)}\frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial t}+\rho^{(a)}u_k^{(a)}u_{i,k}^{(a)}-\rho^{(a)}\bar{F}_i^{(a)}-\sigma_{ij,j}^{(a)}\right.\right.\right.$$

$$\left.+\left(p^{(a)}+\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(a)}\right)_{,i}\right]\delta u_i^{(a)}-\frac{1}{2\mu^{(a)}}\left[\sigma_{ij}^{(a)}+p^{(a)}\delta_{ij}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\mu^{(a)}u_{k,k}^{(a)}\delta_{ij}-\mu^{(a)}(u_{i,j}^{(a)}+u_{j,i}^{(a)})\right]\delta\sigma_{ij}^{(a)}-\frac{1}{2\mu^{(a)}}\left[3p^{(a)}\right.$$

$$\left.\left.+\sigma_{kk}^{(a)}\right]\delta p^{(a)}\right)dV+\int_{\Gamma_t^{(a)}}\left[-u_i^{(a)}n_j^{(a)}\delta\sigma_{ij}^{(a)}\right.$$

$$\left.-\left(p^{(a)}+\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(a)}\right)n_i^{(a)}\delta u_i^{(a)}\right]d\Gamma-\int_{\Gamma_u^{(a)}}\left[\left(u_i^{(a)}-\bar{u}_i^{(a)}\right)n_j^{(a)}\delta\sigma_{ij}^{(a)}\right.$$

$$\left.+\left(p^{(a)}+\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(a)}\right)\delta u_i^{(a)}n_i^{(a)}\right]d\Gamma+\int_{\Gamma_\sigma^{(a)}}\left[(\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}-\bar{f}_i^{(a)})\right.$$

$$\left.\left.-\left(p^{(a)}+\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(a)}\right)n_i^{(a)}\delta u_i^{(a)}\right]d\Gamma\right\}+\sum_{\{aa'\}}\int_{\Gamma_{aa'}}\left\{\left[\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}\right.\right.$$

$$\left.+\sigma_{ij}^{(a')}n_j^{(a')}\right]\delta u_i^{(a)}-\left[\left(p^{(a)}+\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(a)}\right)n_i^{(a)}+\left(p^{(a')}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{(a')}\right)n_i^{(a')}\right]\delta u_i^{(a)}\right\}d\Gamma \tag{5.2}$$

其驻值条件$\delta\Pi_{VBF_3}=0$给出

$$\sigma_{kk}^{(a)}+3p^{a}=0 \qquad 在V^{(a)}内及\Gamma^{a}上 \tag{5.3}$$

设物理量足够连续可微，所以(5.3)式在V^{a}的边界上也成立。利用(5.3)式，对其余驻值条件化简后，得

$$\sigma_{ij}^{(a)}+p^{a}\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu^{(a)}u_{k,k}^{(a)}\delta_{ij}-\mu^{(a)}(u_{i,j}^{(a)}+u_{j,i}^{(a)})=0, \qquad 在V^{(a)}上 \tag{5.4}$$

$$\rho^{(a)}\partial u_i^{(a)}/\partial t+\rho^{(a)}u_k^{(a)}u_{i,k}^{(a)}-\rho^{(a)}\bar{F}_i^{(a)}-\sigma_{ij,j}^{(a)}=0, \qquad 在V^{(a)}上 \tag{5.5}$$

$$u_i^{(a)}=0 \qquad 在\Gamma_s^{(a)}上 \tag{5.6}$$

$$u_i^{(a)}-\bar{u}_i^{(a)}=0 \qquad 在\Gamma_u^{(a)}上 \tag{5.7}$$

$$\sigma_{ij}^{a}n_j^{(a)}-\bar{f}_i^{(a)}=0 \qquad 在\Gamma_\sigma^{(a)}上 \tag{5.8}$$

$$\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}+\sigma_{ij}^{(a')}n_j^{(a')}=0 \qquad 在\Gamma^{(aa')}上 \tag{5.9}$$

证毕。

应用 由证明过程可知，交界面上应力协调条件(5.9)式是自然满足的。因此只要事先能保证速度和压力（密度）是连续的，那么粘性正压流体流动的广义变分原理[5]就可以分区进行计算。约束条件(2.2)式和边界条件已经被放松，这给允许函数的设计带来方便，不过增加了泛函的复杂性。

(5.1)式与文[5]的(8.10)式相对照，有两处正负号不同。

六、混合杂交非协调元广义变分原理

定理4 在$V^{(a)}(\alpha=1,2,\cdots,N)$上满足连续性方程(2.1)式和物态方程(2.3)式的一切可能流动$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$中，使得下列有限元泛函Π_{VBF_4}取驻值的$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$，必定为粘性正压流动问题的正确解：

$$\Pi_{BVF_4}=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iint_{\Gamma_{I_a}}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}-\sigma_{ij}^{(a')}n_j^{(a')})(u_i^{(a)}-u_i^{(a')})\right.\right.$$

$$\left.\left.+c(p^{(a)}-p^{(a')})(\rho^{a}-\rho^{(a')})\right]d\Gamma\right\}+\Pi_{VBF_3} \tag{6.1}$$

证明概要 计算变分$\delta\Pi_{BVF_4}$，化简整理后，得

$$\delta\Pi_{VBF_4}=\sum_{a=1}^{N}\left\{\iint_{V^{(a)}}\left(\left[\rho^{(a)}\frac{\partial u_i^{(a)}}{\partial t}+\rho^{a}u_k^{(a)}u_{i,k}^{a}-\rho^{(a)}\bar{F}_i^{(a)}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\sigma_{ij,j}^{a}+\left(p^{a}+\frac{1}{3}\sigma_{kk}^{a}\right)_{,i}\right]\delta u_i^{(a)}-\frac{1}{2\mu^{a}}\left[\sigma_{ij}^{a}+p^{a}\delta_{ij}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\mu^{a}u_{k,k}^{a}\delta_{ij}-\mu^{a}(u_{i,j}^{a}+u_{j,i}^{a})\right]\delta\sigma_{ij}^{a}-\frac{1}{2\mu^{a}}[3p^{a}$$

$$+\ \sigma_{kk}^{(a)}\ ]\delta p^{(a)}\Big)\ dV+\int_{\Gamma_s^{(a)}}\Big[-u_i^{(a)}n_j^{(a)}\ \delta\sigma_{ij}^{(a)}$$

$$-\Big(p^{(a)}+\frac{1}{3}\ \sigma_{kk}^{(a)}\Big)n_i^{(a)}\delta u_i^{(a)}\Big]\ d\Gamma-\int_{\Gamma_u^{(a)}}\Big[(u_i^{(a)}$$

$$-\bar{u}_i^{(a)})n_j^{(a)}\ \delta\sigma_{ij}^{(a)}\ +\Big(\ p^{(a)}+\frac{1}{3}\ \sigma_{kk}^{(a)}\Big)n_i^{(a)}\delta u_i^{(a)}\Big]\ d\Gamma\Big\}$$

$$+\sum_{\{aa'\}}\int_{\Gamma^{aa'}}\Big\{\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^{(a)}\ n_j^{(a)}\ +\ \sigma_{ij}^{(a')}n_j^{(a')})(\delta u_i^{(a)}+\delta u_i^{(a')})\ -\frac{1}{2}(u_i^{(a)}$$

$$-u_i^{(a')})\ (\delta\sigma_{ij}^{(a)}n_j^{(a)}-\delta\sigma_{ij}^{(a')}n_j^{(a')})+c(p^{(a)}-p^{(a')})\ (\delta\rho^{(a)}-\delta\rho^{(a')})$$

$$+c(\rho^{(a)}-\rho^{(a')})\ (\delta p^{(a)}-\delta p^{(a')})\ \Big\}d\Gamma \qquad (6.2)$$

其驻值条件给出(5.3)式、(5.4)式、(5.5)式、(5.6)式、(5.7)式、(5.8)式、(5.9)式及(2.12)式和(2.14)式. 式中c为x的任意正定（或负定）已知函数.

应用 用本定理可以简化非协调有限元的计算，因为它避免了引入待定的拉格朗日乘子. 有限元泛函表达式(6.1)式中的系数(−1/4)是唯一的，而$c\neq0$为权重，可随意调节.

七、混合协调元的完全的广义变分原理

定理5 在满足交界面上协调条件(2.12)式和(2.14)式的一切可能流动$p^{(a)},\rho^{(a)},u_i^{(a)},\sigma_{ij}^{(a)}$中，使得下列有限元泛函$\Pi_{VBF5}$取驻值的$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$，必定是粘性正压流体流动问题的精确解：

$$\Pi_{VBF5}=\sum_{a=1}^{N}\Big\{\int_{V^{(a)}}\lambda\Big[\frac{\partial\rho^{(a)}}{\partial t}+(\rho^{(a)}u_k^{(a)})_{,k}\Big](p^{(a)}-\varphi(\rho^{(a)}))dV\Big\}+\Pi_{VBF3} \qquad (7.1)$$

其中Π_{VBF3}见(5.1)式.

证明 不难作出，略.

应用 除了速度协调条件和压力（或密度）协调条件之外，其它约束条件都已被放松，而且并不增加待定的拉格朗日乘子. 因此，本定理给计算带来简便. $\lambda\neq0$为“权重”，可随意调节.

八、混合杂交非协调元的完全的广义变分原理

定理6 在一切于$V^{(a)}(a=1,2,\cdots,N)$上连续且足够光滑的$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$中，凡使得下列有限元泛函

$$\Pi_{VBF6}=\Pi_{VBF5}+\sum_{a=1}^{N}\Big\{\int_{\Gamma_{I_a}}\Big[\Big(-\frac{1}{4}\Big)(\sigma_{ij}^{(a)}\ n_j^{(a)}-\ \sigma_{ij}^{(a')}\ n_j^{(a')})$$

$$\cdot(u_i^{(a)}-u_i^{(a')})+c(p^{(a)}-p^{(a')})(\rho^{(a)}-\rho^{(a')})\Big]d\Gamma\Big\} \tag{8.1}$$

取驻值的$p^{(a)}$，$\rho^{(a)}$，$u_i^{(a)}$，$\sigma_{ij}^{(a)}$，必定为粘性正压流动问题的精确解．$c\neq0$，为x的任意正定（或负定）的参数函数．

证明 略

应用 (8.1)式中，系数$(-1/4)$是唯一的．而$c\neq0$为权重，可随意选取．本定理用半解析法和有限元法求解所带来的好处是显然的．可简化非协调杂交元的计算．

九、结 语

本文提出并论证了粘性正压流体动力学的混合协调有限元和混合杂交非协调有限元的变分方法．这是粘性正压流体动力学有限元计算的基础定理．在混合协调元变分原理的论证中发现，只要事先能够保证速度和压力是协调的，那么有关的变分就可以分区进行计算，在相邻有限元交界面上面力矢量之协调条件会自然地满足，而无须引进拉氏乘子．进而建立的混合杂交非协调元变分原理，能够简化粘性流体动力学非协调元的计算，因为它们不需要增加待定的拉格朗日乘子．

应该指出，定理3、定理4、定理5和定理6的泛函Π_{VBF_3}，Π_{VBF_4}，Π_{VBF_5}，Π_{VBF_6}中的自变函数$\sigma_{ij}^{(a)}$应该限制在对称张量范围内，其理由见文献[2]．

本文全部结果，适用于定常流动和"准定常"流动．对于非定常流动，限于篇幅，另文论述．

本文诸泛函中的参数λ和c，可以为坐标矢量x的任意正定函数（或负定函数），它们是一种"权重"，可以随用户之需要而任意调节．在弹性力学全场问题情形，泛函中含有的可供任意调节的权函数有一定的价值和意义[9]，并且其变分原理被[9]称为"新颖的变分原理"．在本文建立的粘性正压流体动力学的分区变分原理中出现的这些权函数，也有类似的价值和意义．

参 考 文 献

[1] 刘高联，流体力学变分原理及有限元法研究进展，上海力学，10(3) (1989)，73—80.

[2] 沈孝明，粘性正压流体流动的广义功率消耗原理和广义变分原理，华东工学院学报，(2) (1989)，45—51.

[3] 钱伟长，《变分法及有限元》，科学出版社 (1980).

[4] 沈孝明，粘性流动的最大功率消耗原理不成立——论自然条件不参加变分兼论变分的定义及运算法则，北京大学学报，26(3) (1990)，291—297；《中国力学学会第四届全国流体力学会议论文集》，北京大学出版社 (1989).

[5] 钱伟长，粘性流体动力学的变分原理和广义变分原理，应用数学和力学，5(3) (1984)，305—322.

[6] Tonti, E., Variational formulation for every nonlinear probem, *Int. J. Engrg. Sci.*, 22(11/22) (1984), 1343—1371

[7] Ecer, A., Variational formulation of viscous flows, *Int. J. Num. Meth. in Engrg.*, 15 (1980), 1355—1361.

[8] Ecer, A., et al., *Symp. on Numerical Methods for Compressible Flows*, ASME, Winter Annual Meeting, California, USA (1986).

[9] 梁如玉，弹性力学广义混合变分原理及有限元，固体力学学报，9(2) (1988)，153—164.

Mixed Compatible Element and Mixed Hybrid Incompatible Element Variational Methods in Dynamics of Viscous Barotropic Fluids

Shen Xiao-ming

(Baoshan Branch of Shanghai TV University, Shanghai)

Abstract

This paper presents and proves the mixed compatible finite element variational principles in dynamics of viscous barotropic fluids. When the principles are proved, it is found that the compatibility conditions of stress can be naturaly satisfied. The generalized variational principles with mixed hybrid incompatible finite elements are also presented and proved, and they can reduce the computation of incompatible elements in dynamics of viscous barotropic lows.

Key words mechanics of viscous fluids, computational fluid mechanics, variational principl, finite element method, mixed compatible element, mixed hybrid incompatible element