

粘塑性流体在旋转圆盘上的流动*

范 椿

(中国科学院力学研究所, 1992年2月24日收到)

摘 要

本文对两种情况导出了描述粘塑性流体在旋转圆盘上流动的基本方程。分别用摄动方法和数值方法得到了方程的解。这就有可能去计算薄膜的厚度分布。经计算发现有两种类型的厚度分布。对于粘度和屈服应力都与径向坐标 r 无关的粘塑性流体, 厚度 h 随 r 的增加而减小。对于粘度和屈服应力都是时间和 r 的函数的Bingham流体, 厚度 h 随 r 的增加而增加。

关键词 旋转圆盘上的流动 粘塑性流体 薄膜厚度分布

一、引 言

在许多工业部门需要在表面涂上一层薄膜, 而旋转甩涂是一种简单而广泛使用的技术。在表面涂上一层流体, 再高速旋转一个很短的时间, 可以得到一个光滑而均匀一致的薄膜。Fmslic等^[1], Acrivos等^[2]和Malsumoto等^[3]分别研究了牛顿流体, 幂律流体和Bingham流体在旋转圆盘上的流动。本文考虑(1)稀悬浮液体, 我们认为它是粘度随时间变化的粘塑性流体和(2)浓悬浮液体, 我们认为它是粘度和屈服应力都随时间和径向坐标变化的Bingham流体在旋转圆盘上的流动。

二、运动方程, 连续方程和本构方程

我们选择柱坐标系 (r, θ, z) , 坐标原点选在圆盘的中心。假定速度的物理分量是:

$$v_r = \bar{u}, \quad v_\theta = r\Omega, \quad v_z = w \quad (2.1)$$

其中 Ω 是圆盘的角速度, 是一常数。

我们引进下列无量纲量:

$$\begin{aligned} r &= \bar{r}/a, \quad z = \bar{z}/h_0, \quad t = (h_0/a)\Omega\bar{t}; \\ u &= \bar{u}/h_0\Omega, \quad w = a\bar{w}/h_0^2\Omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

这里 a 是圆盘的半径, h_0 是在 $\bar{r}=a$ 处的薄膜初始厚度, 并且 $h_0/a \ll 1$, 全部无量纲量是同一量级。 \bar{t} 是时间。

假定流动是轴对称的 ($\partial/\partial\theta=0$), 则运动方程是

* 卞荫贵推荐

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left[\frac{h_0^2 \Omega^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) - ar \Omega^2 \right] \\ & = -\frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{a} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{h_0} \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{ar} \\ & 2\rho h_0 \Omega^2 u = \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{r\theta}) + \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial z} T_{z\theta} \\ & \rho \left[\frac{h_0^2 \Omega^2}{a} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = -\frac{1}{h_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{ar} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}) + \frac{1}{h_0} \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \end{aligned} \right\} (2.3)$$

其中 ρ 是密度, P 是标量, T_{ij} 是应力张量的物理分量, T_{ij} 的量级由本构方程决定.

无量纲化的连续方程是

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

其边界条件是,

(1) 在圆盘上无滑移

$$\text{在 } z=0 \text{ 处, } u=w=0 \quad (2.5)$$

(2) 在自由表面, 剪切应力为零

$$\text{即在 } z=h=\bar{h}/h_0 \text{ 处, } T_{ij}=0 \quad (i \neq j) \quad (2.6)$$

这里 \bar{h} 是任何时间 t , 不同位置 r 的薄膜厚度.

粘塑性流体的本构方程是

$$\left. \begin{aligned} T_{ij} &= \left\{ K(r, t) \left| \frac{1}{2} A_{st} A_{ts} \right|^{(n-1)/2} + \bar{\tau}_y(r, t) / \left| \frac{1}{2} A_{st} A_{ts} \right|^{1/2} \right\} A_{ij} \\ & \quad \left(\text{对于 } \frac{1}{2} T_{st} T_{ts} \geq \bar{\tau}_y^2 \right) \\ A_{ij} &= 0 \quad \left(\text{对于 } \frac{1}{2} T_{st} T_{ts} < \bar{\tau}_y^2 \right) \end{aligned} \right\} (2.7)$$

这里 $K(r, t)$ 是模量指数, n 是幂律指数, $\bar{\tau}_y = \bar{\tau}_y(r, t)$ 是屈服应力, A_{ij} 是 Rivlin-Ericksen 张量的物理分量.

由方程(2.1)我们可以得到 A_{ij} 的表达式如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \frac{h_0 \Omega}{a} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{h_0^2 \Omega}{a^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \Omega \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 2 \frac{h_0 \Omega}{a} \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{h_0^2 \Omega}{a^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \Omega \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 2 \frac{h_0 \Omega}{a} \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

三、薄膜厚度的微分方程

在我们的实际问题中, $A_{rr}/A_{rz} = h_0/a \ll 1$.

方程(2.8)中的 A_{rz} 分量包括两项, 第一项比第二项小 $(h_0/a)^2$ 的量级, 故可以忽略.

$$A_{rz} = \Omega \partial u / \partial z \quad (3.1)$$

而 rr , $A_{\theta\theta}$, 都比 A_{rz} 小 h_0/a 的量级, 在我们的计算中都可以忽略, 近似于零. 由本构方程(2.7)可知, T_{rz} 与 T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, T_{zz} 的量级比较和 A_{rz} 与 A_{rr} , $A_{\theta\theta}$, A_{zz} 的量级比较是相同的. 所

以 T_{rr} , $T_{\theta\theta}$, T_{zz} 在我们的计算中都可以忽略, 只剩下 T_{rz} . 于是, 本构方程 (2.7) 可简化为

$$\left. \begin{aligned} T_{rz} &= \bar{\tau}_y(r, t) \operatorname{sgn}(\partial u / \partial z) + K(r, t) (\Omega \partial u / \partial z)^n, \quad |T_{rz}| \geq \bar{\tau}_y \\ \partial u / \partial z &= 0, \quad |T_{rz}| < \bar{\tau}_y \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中 $\operatorname{sgn}(\partial u / \partial z) = +1$ 或 -1 , 符号和 $\partial u / \partial z$ 的符号相同.

运动方程 (2.3) 可以简化为

$$-\rho a h_0 \Omega^2 r = \partial T_{rz} / \partial z \quad (3.3)$$

从方程 (3.3) 我们可以看到, 由于离心力而产生的运动是离心力和粘性力的平衡. 这一运动是由一个在 r 方向的剪切运动加上一个在 θ 方向的刚体旋转运动组成.

将屈服应力无量纲化 $\tau_y = \bar{\tau}_y / K_0 \Omega^n$,

方程 (3.2) 和 (3.3) 以及边界条件 (2.5) 和 (2.6) 的解是

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[\frac{K_0 R e r}{K(r, t)} \right]^{1/n} \frac{n}{1+n} \{ \xi^{1/n+1} - (\xi - z)^{1/n+1} \} \quad (\xi \geq z \geq 0) \\ u &= \left[\frac{K_0 R e r}{K(r, t)} \right]^{1/n} \frac{n}{1+n} \xi^{1/n+1}, \quad (h \geq z > \xi) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

这里 $Re = \rho a h_0 \Omega^{2-n} / K$ 是雷诺数, $K_0 = K(r, t)|_{t=0, r=r_0}$ 是初始模量指数, ξ 是液体状态和固体状态的交界面:

$$\xi = h - \tau_y / Re r \quad (3.5)$$

因为 ξ 不能是负的, 故流动区域被限制在 $r \geq r_y$, 这里

$$r_y = \tau_y / Re h \quad (3.6)$$

为了决定在任何时间 t 的薄膜厚度 h , 在任何固定点 r 对连续方程 (2.4) 从 0 到 h 积分, 也就是, 我们对于 z 从 $z=0$ 到 $z=h$ 积分:

$$\int_0^\xi \frac{u}{r} dz + \int_\xi^h \frac{u}{r} dz + \int_0^\xi \frac{\partial u}{\partial r} dz + \int_\xi^h \frac{\partial u}{\partial r} dz + \int_0^\xi \frac{\partial w}{\partial z} dz + \int_\xi^h \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (3.7)$$

根据积分号下的微分法则可知:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\xi(r)} u(r, z) dz &= \int_0^{\xi(r)} \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} dz + u(r, \xi) \frac{\partial \xi}{\partial r} - u(r, 0) \\ \frac{\partial}{\partial r} \int_{\xi(r)}^{h(r)} u(r, z) dz &= \int_{\xi(r)}^{h(r)} \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} dz + u(r, h) \frac{\partial h}{\partial r} - u(r, \xi) \frac{\partial \xi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

这里 $u(r, 0) = 0$ (在壁面无滑移条件).

根据在自由面和交界面上的运动学条件可知

$$\left. \begin{aligned} w \Big|_{z=\xi} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + u(r, \xi) \frac{\partial \xi}{\partial r} \\ w \Big|_{z=h} &= \frac{\partial h}{\partial t} + u(r, h) \frac{\partial h}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

将 (3.8), (3.9) 代入 (3.7) 可得

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\int_0^\xi u(r, z) dz + \int_\xi^h u(r) dz + \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\xi u(r, z) dz + \frac{\partial}{\partial r} \int_\xi^h u(r) dz \right] = 0 \quad (3.10)$$

将速度分布 $u(r, z)$ 的表达式方程 (3.4) 代入方程 (3.10), 经过一些计算, 可得下述二种

情况下的薄膜厚度的微分方程:

情况1 稀悬浮液体, 即: 模量指数 $K(r, t) = K(t)$, 屈服应力 $\tau_y(r, t) = \text{常数}$ 的粘塑性流体的情况,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left[\frac{K_0 Re}{K(t)} \right]^{1/n} \left(h - \frac{\tau_y}{Re r} \right)^{1/n} r^{1/n} h \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{1+2n} \left[\frac{K_0 Re}{K(t)} \right]^{1/n} r^{1/n-1} \left(h - \frac{\tau_y}{Re r} \right)^{1/n} \cdot \left[(1+n)h^2 + \frac{n}{1+n} h \frac{\tau_y}{Re r} + \frac{n^2}{1+n} \left(\frac{\tau_y}{Re r} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.11)$$

情况2 浓悬浮液体, 即: 模量指数 $K(r, t) = K_0(1 + \beta r) \exp[(\alpha a/h_0)t]$, 屈服应力 $\tau_y(r, t)$ 随 r, t 而变化的 Bingham 流体 (即 $n=1$) 的情况, 其中 β 是常数, 本文为了简单, 取 $\beta=1$ 的情况:

$$\frac{\partial h}{\partial T} + \frac{rh}{1+r} \left[h - \frac{\tau_y}{Re r} \right] \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{h - \tau_y/Re r}{3(1+r)^2} r \left\{ (2+r)h^2 + \left(h + \frac{\tau_y}{Re r} \right) \left[\left(r + \frac{1}{2} \right) \frac{\tau_y}{Re r} - \frac{3}{2} (1+r) \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_y}{\partial r} \right] \right\} = 0 \quad (3.12)$$

其中

$$T = \int_0^t Re \exp[-(\alpha a/h_0)t] dt = 0 \quad (3.13)$$

方程(3.12)中, τ_y 是 r, t 的已知函数, 所以 $\partial \tau_y / \partial r$ 也是已知函数.

四、摄动解和数值解

方程(3.11)是非线性的一阶偏微分方程, 我们用摄动方法求其近似解. 选 τ_y/Re 作为摄动参数, 由方程(3.6)可知 $\tau_y/Re = r_y h$, 由于 $r_y \approx 0.1 \sim 0.2$, $h < 1$ 都是小量, 于是 τ_y/Re 也是小量. 经过相当长的计算, 可得摄动解如下:

$$h = h_s \left(1 + \frac{3n+1}{2n+1} r_s^{1/n-1} h_s^{1/n+1} \int_0^t \left[\frac{K_0 Re}{K(t)} \right]^{1/n} dt \right)^{-(n+1)/(2n+1)} + \frac{\tau_y}{Re} \frac{1}{1+n} [1 - (r_s/r)^{1/n}] / r \quad (4.1)$$

$$r = r_s \left(1 + \frac{3n+1}{2n+1} r_s^{1/n-1} h_s^{1/n+1} \int_0^t \left[\frac{K_0 Re}{K(t)} \right]^{1/n} dt \right)^{(2n+1)/(3n+1)} \quad (4.2)$$

这里 $h_s = h_s(r_s)$ 是薄膜厚度的初始分布, 是 r_s 的函数, r_s 是初始坐标, 也是参数方程(4.1), (4.2)中的参数.

忽略方程(4.1)中的小量

$$\left(\frac{\tau_y}{Re} \right) [1 - (r_s/r)^{1/n}] / [r(1+n)]$$

可得

$$h \propto \Omega^{-m} \quad (4.3)$$

这里

$$m = (2-n)(n+1) / [n(3n+1)] \quad (4.4)$$

当 n 在 1 和 0.85 范围内时, $-m$ 在 -0.5 和 -0.705 范围内. 这一结果与 Chen^[4] 和 Meycrhofcr^[5] 的实验数据相符.

在方程(3.12)中, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 在一般情况下, $\tau_y(r, t) \rightarrow \infty$, 不是小量, 不能用摄动法, 数值解是需要的. 用特征线方法解一阶偏微分方程(3.12), 也就是, 用下列两个常微分方程代替偏微分方程(3.12)如下:

$$\frac{dh}{dT} = \frac{\tau_y/Re r - h}{3(1+r)^2} \left\{ (2+r)h^2 + \left(h + \frac{\tau_y}{Re r} \right) \cdot \left[\left(r + \frac{1}{2} \right) \frac{\tau_y}{Re r} - \frac{3}{2}(1+r) \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_y}{\partial r} \right] \right\} \quad (4.5)$$

$$\frac{dr}{dT} = \frac{h(rh - \tau_y/Re)}{1+r} \quad (4.6)$$

我们用 Runge-Kutta 法数值解上述常微分方程组(4.5)和(4.6).

为了对摄动解(4.1), (4.2)和(4.5), (4.6)的数值解相互校验, 本文计算了Bingham 流体($n=1$), $\tau_y/Re=0.05$ 是一常数小量的情况, 计算结果见表1. 摄动解和数值解二者符合得很好.

表1 摄动解和数值解的比较

T	r	h 数值解	h 摄动解
0.0000	0.160000	0.100000	0.100000
1.2560	0.283130	0.657426	0.657536
2.5120	0.389022	0.522261	0.522426
3.7680	0.485511	0.445360	0.445535
5.0240	0.575691	0.394265	0.394437
6.2800	0.661198	0.357218	0.357381
7.5360	0.743033	0.328797	0.328950
8.7919	0.821869	0.306118	0.306261
10.0479	0.898184	0.287482	0.287616
11.3039	0.972334	0.271823	0.271948
12.5599	1.04459	0.258426	0.258544

五、计算结果和讨论

本文对情况1和情况2分别作了计算, 为了便于比较, 计算中采用了相同的参数值. 情况1中的模量指数 $K(t) = K_0 \exp(\alpha a/h_0 t)$, $n=0.9$. 情况2中的屈服应力

$$\tau_y = \tau_0(\delta + r) \exp(\alpha a/h_0 t)$$

取 $\delta=0.2$. 圆盘半径, $a=20\text{cm}$, 薄膜初始厚度, $h_0=20\mu\text{m}$, $\alpha=h_0/a$, 初始模量指数 $K_0=1.2\text{g/cm sec}^{2-n}$, 密度 $\rho=1.2\text{g/cm}^3$, 薄膜的初始厚度分布 $h_s(r_s)=1$. 圆盘的角速度 $\Omega=3000\text{ rpm}$, 初始屈服应力 $\tau_0=118.4\text{ g/cm sec}^2$.

计算结果如图1, 2所示. 结果表明:

①对于情况1, 粘塑性流体的涂层厚度分布是中心厚、外圈薄, 有点象指数曲线. 这种曲线形状与 Jenckhc 等^[8]实际测量的厚度分布形状是一致的. 对于, 稀悬浮液体, 我们可以近似地认为, 粘塑性流体的粘度和屈服应力甩涂过程中不随径向坐标 r 而变化.

②对于情况2, 粘度和屈服应力都随时间和径向坐标变化的 Bingham 流体的涂层厚度分布是中心薄, 外圈厚. 这适用于浓悬浮液体. 这种厚度分布的形状和计算机的磁盘实际测

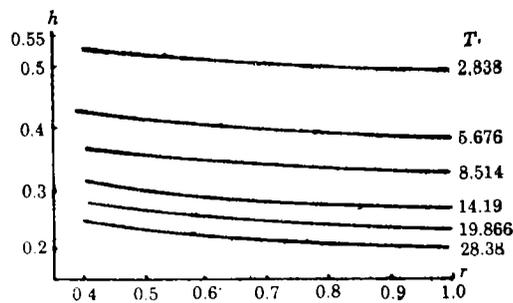


图1 对于稀悬浮液体的情况, 在不同 T 值时, 粘塑性流体的厚度作为 r 的函数

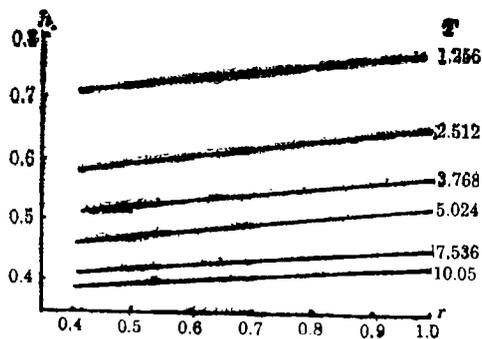


图2 对于浓悬浮液体的情况, 在不同 T 值时, Bingham流体的厚度作为 r 的函数

量的厚度分布形状是一致的。

致谢 本文的运动方程和本构方程中各项的量级比较, 采用了陈文芳教授等在文献[7]中的方法, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Emslie A. G., F. T. Bonner and L. G. Peck, Flow of a Viscous Liquid on a Rotating Disk, *J. Appl. Phys.*, 29(1958), 858.
- [2] Acrivos A., M. J. Shah and E. E. Petersen, On the flow of a non-Newtonian Liquid on a Rotating Disk, *J. Appl. Phys.*, 31(1960), 963.
- [3] Shiro Masumoto, Yoichi Takashima, et. al., Film Thickness of a Bingham Liquid on a Rotating Disk, *I. & E. C. Fundamentals*, 21 (1982), 198.
- [4] Chen B. T., Investigation of the solvent-Evaporation effect on spin coating of thin films, *Polym. Eng. Sci.*, 23 (1983), 399.
- [5] Meyerhofer D., Characteristics of Resist Films Produced by Spinning, *J. Appl. Phys.*, 49 (1978), 3993.
- [6] Jenekhe S. A. and S. B. Schuldt, Flow and Film thickness of bingham plastic liquids on a rotating disk, *Chem. Eng. Commn.*, 33 (1985), 135.
- [7] Chan Man, Fong C. F., Cai Fushi, Xu Yuanze, Flow of a casson fluid on a rotating disk, *ACTA Mechanica Sinica*, 3 (1987), 107.

Flow of a Viscoplastic Fluid on a Rotating Disk

Fan Chun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

The equations describing the flow of a viscoplastic fluid on a rotating disk are derived and are solved by perturbation technique and numerical computation respectively for 2 cases. This makes it possible to calculate the thickness distribution of film. Two kinds of distribution of thickness have been found. For the viscoplastic fluid for which both viscosity and yield stress are independent radial coordinate r , the thickness h decreases with increasing r . For a Bingham fluid for which both viscosity and yield stress are functions of time and r , the thickness h increases with increasing r .

Key words *flow on a rotating disk, viscoplastic fluid, thickness distribution of film*