

金属材料屈服准则的线性化 统一形式及其应用*

熊 慧 而

(湖南大学, 1993年2月22日收到)

摘 要

本文介绍金属材料屈服准则的线性化统一形式, 它是一族包含两个材料常数的十二边形, 文[1]所提出结果的线性化近似, 因此在应用中更显得方便. 文中应用这种线性化准则进行了松套圆筒自增强分析.

关键词 剪拉比 屈服准则 线性化统一形式

一、前 言

在常温静载条件下, 金属材料可视作(1)各向同性的; (2)塑性变形与平均应力无关; (3)无初始包氏效应. 于是, 在应力空间内, 屈服曲面与 π 平面的交线对称于 π 平面上三根主应力轴的投影及其垂线(图1). 根据屈服曲面外凸性, 可证屈服曲面以两个正六面体表面为其界限, 所有的屈服面, 包括Mises屈服面则位在此两个六面体表面之内. 其中内六面体表面为Tresca屈服面, 外六面体表面为双剪应力屈服面^[2]. 易证, 对应于Tresca, Mises及双剪应力屈服准则的剪拉比 $\lambda = \tau_s / \sigma_s$ 分别为 $1/2$, $1/\sqrt{3}$ 及 $2/3$. 这正好和大多数金属材料的实验结果相吻合, 大多数金属材料的剪拉比大致可以分为三类

$$\left. \begin{aligned} \tau_s / \sigma_s &= 0.5 \pm 5\% \\ \tau_s / \sigma_s &= 0.58 \pm 5\% \\ \tau_s / \sigma_s &= 0.68 \pm 5\% \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

由此可见, 屈服准则应包含两个材料常数, 如拉伸屈服极限 σ_s 和剪拉比 λ (或 σ_s 和 τ_s); 具有不同剪拉比的材料应采用不同的屈服函数. 对于满足上述三个基本假设且屈服面外凸的材料, 剪拉比应在 $1/2 \sim 2/3$ 之间, 即

$$2/3 \geq \lambda \geq 1/2 \quad (1.2)$$

为此, 对于这类材料建立了包含 σ_s 和 λ 两个参数且满足式(1.2)的屈服准则的统一形式^[1]. 为了应用方便, 更早一年建立了以 λ 为参数的线性化屈服函数^[3].

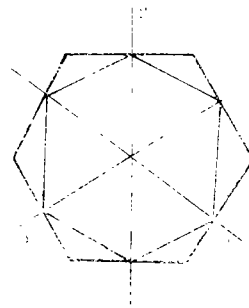


图 1

* 杨绪灿推荐.

二、屈服准则的线性化统一形式

取屈服函数 ($\sigma_i, i=1, 2, 3$, 为主应力)

$$\begin{aligned} \varphi = & \{[(1+\alpha)\sigma_1 - \sigma_2 - \alpha\sigma_3]^2 - 4k^2\} \{[(1+\alpha)\sigma_2 - \sigma_3 - \alpha\sigma_1]^2 - 4k^2\} \\ & \cdot \{[(1+\alpha)\sigma_3 - \sigma_1 - \alpha\sigma_2]^2 - 4k^2\} \{[(1+\alpha)\sigma_3 - \sigma_2 - \alpha\sigma_1]^2 - 4k^2\} \\ & \cdot \{[(1+\alpha)\sigma_2 - \sigma_1 - \alpha\sigma_3]^2 - 4k^2\} \cdot \{[(1+\alpha)\sigma_2 - \sigma_3 - \alpha\sigma_1]^2 - 4k^2\} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中 α 为任意参数, k 为材料常数。要求每个括弧中的值不大于零。于是在一般情况下, 式(2.1)表示应力空间中以 α 为参数的十二边形族。可证 α 与剪拉比有关, 及 λ 满足式(1.2), 亦即这个十二边形族的确以 Tresca 和双剪应力六边形为界限。

经过分析, 得到如下结果

$$(a) \quad \alpha \geq 1, \quad \lambda = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}, \quad \sigma_s = \frac{2k}{1+\alpha} \quad (2.2a)$$

$$(b) \quad 1 \geq \alpha \geq 0, \quad \lambda = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}, \quad \sigma_s = \frac{2k}{1+\alpha} \quad (2.2b)$$

$$(c) \quad 0 \geq \alpha \geq -1/2, \quad \lambda = \frac{1}{2+\alpha}, \quad \sigma_s = 2k \quad (2.2c)$$

$$(d) \quad -\frac{1}{2} \geq \alpha \geq -1, \quad \lambda = \frac{1}{1-\alpha}, \quad \sigma_s = 2k \quad (2.2d)$$

$$(e) \quad -1 \geq \alpha \geq -2, \quad \lambda = \frac{|\alpha|}{1-\alpha}, \quad \sigma_s = \frac{2k}{|\alpha|} \quad (2.2e)$$

$$(f) \quad -2 \geq \alpha, \quad \lambda = \left| \frac{\alpha}{1+2\alpha} \right|, \quad \sigma_s = \frac{2k}{|\alpha|} \quad (2.2f)$$

显然, λ 恒满足式(1.2)。当 α 的值使 $\lambda=1/2$ 和 $2/3$ 时, 式(2.1)分别蜕化为 Tresca 和双剪应力准则。给定材料的剪拉比, 由式(2.2)中任一式可求出 α 值及材料常数 k , 再代入式(2.1)即得到对应的线性化屈服函数。例如设 $\lambda=1/\sqrt{3}$, 由式(2.2c)可以求出 $\alpha=\sqrt{3}-2$, $k=\sigma_s/2$, 或由(2.2d)求出 $\alpha=1-\sqrt{3}$, $k=\sigma_s/2$ 。

三、应 用

设 $\lambda=1/\sqrt{3}$, 平面应力状态 ($\sigma_3=0$), 则 $\alpha=\sqrt{3}-2$, $k=\sigma_s/2$ 。代入式(2.1)得到内接于 Mises 曲面的十二边形

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{3}-1)\sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_s, \\ (\sqrt{3}-1)\sigma_2 - (\sqrt{3}-2)\sigma_1 &= \pm \sigma_s, \\ -\sigma_1 - (\sqrt{3}-2)\sigma_2 &= \pm \sigma_s, \\ -\sigma_2 - (\sqrt{3}-2)\sigma_1 &= \pm \sigma_s, \\ (\sqrt{3}-1)\sigma_1 - (\sqrt{3}-2)\sigma_2 &= \pm \sigma_s, \\ (\sqrt{3}-1)\sigma_2 - \sigma_1 &= \pm \sigma_s \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

如图 2 所示, 上式可用于薄板的极限分析。此^[9]处用于松套圆筒的自增强分析, 应用自增强

技术以提高压力容器的弹性工作压力是当前压力容器,特别是超高压容器设计中广泛采用的措施^[4],由于圆筒在内压作用下材料处于平面应力状态,采用圆柱坐标系,则恒有 $\sigma_\varphi > 0$, $\sigma_r \leq 0$ 及 $\sigma_\varphi > |\sigma_r|$,因此圆筒屈服时,应力点将位在 AA' 边上(图2),其式为

$$\sigma_\varphi - \beta\sigma_r = \sigma_s \quad (3.2)$$

$\beta = \sqrt{3} - 1 = 0.732$ 为 AA' 边的斜率.显然采用式(3.2)不会增加多少计算上的困难.设两层套筒的内、外半径依次为 R_0, R_1, R_2 ,筒间间隙为 δ (图3),预加压力为 p_A .于是经过分析运

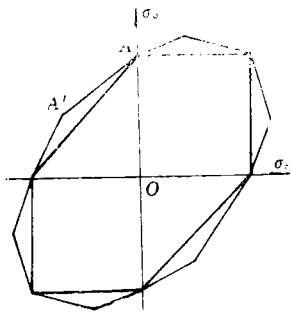


图 2

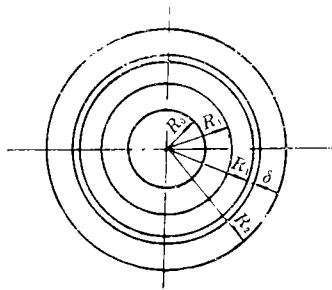


图 3

算之后,可得圆筒预加压力后,残余变形刚好使两筒叠合(消去间隙)的最小 p_A 值由下式计算

$$\begin{aligned} \frac{E\delta}{2R_1} = & \frac{\rho_1^2}{R_1^2 - \rho_1^2} \left[Cp_A - \frac{\sigma_s}{1-\beta} (1-C) - \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} p_A + \frac{A_1}{4} \left[Cp_A \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sigma_s}{1-\beta} (1-C) - \frac{\sigma_s}{A_1} (R_1^2 - \rho_1^2) \right] \left\{ \frac{1}{R_1^2 - R_0^2} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \frac{R_0^2}{R_1^2} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{R_1^2 - \rho_1^2} \left[(1-\nu) + (1+\nu) \frac{\rho_1^2}{R_1^2} \right] \right\} \right] \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$p_A = \frac{\sigma_s}{CA_1} \left[\frac{2R_1^2(R_1^2 - R_1^2)}{A_2} - \frac{A_1}{1-\alpha} (1-C) + (R_1^2 - \rho_1^2) \right] \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} C = \left(\frac{R_0}{\rho_1} \right)^{1-\beta}, \quad A_1 = (R_1^2 + \rho_1^2) + \beta(R_1^2 - \rho_1^2) \\ A_2 = (R_1^2 + R_2^2) + \beta(R_2^2 - R_1^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中 ρ_1 为内筒塑性区半径, E, ν 分别为弹性模量和泊桑比.给定 δ ,由式(3.3)、(3.4)求出内、外筒叠合为一体的最小 ρ_1 ,再代入式(3.4)即可求出最小预加压力 $(p_A)_{\min}$.显然, δ 越大, ρ_1 亦越大.为了使内筒不发生塑性流动,可令式(3.3)、(3.4)中的 $\rho_1 = R_1$,由此可求出最大的间隙值

$$\begin{aligned} \delta_{\max} = & \frac{\sigma_s R_1}{E} \left\{ \left[\frac{R_1^2 - R_1^2}{(R_1^2 + R_1^2) + \beta(R_2^2 - R_1^2)} - \frac{1-C_1}{1-\beta} \right] \cdot \left[\frac{(1-\nu)R_1^2 + (1+\nu)R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\beta^2}{C_1(R_1^2 - R_0^2)} - (\beta-\nu) + (1-\nu) + C_1(\nu-\beta) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1-C_1)[(1-\nu)R_1^2 + (1+\nu)R_0^2]}{R_1^2 - R_0^2} \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$C_1 = \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^{1-\beta} \quad (3.7)$$

使两筒同时全部屈服的极限预加压力为

$$(p_A)_{\max} = \frac{\sigma_s}{1-\beta} \left[\left(\frac{R_2}{R_0} \right)^{1-\beta} - 1 \right] \quad (3.8)$$

在式(3.4)中令 $\rho_1 = R_1$, 就得到内筒全部屈服, 外筒开始屈服时的自增强压力

$$p_A^* = \sigma_s \left[(R_2^2 + R_1^2) + \beta(R_2^2 - R_1^2) K_1^{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} (K_1^{1-\beta} - 1) \right] \quad (3.9)$$

$$K_1 = R_1/R_0.$$

四、结 论

本文介绍的金属材料屈服准则的线性化统一形式包含了两个材料参数, 从而更加真实地描述了这类材料的屈服条件. 揭示了屈服准则对于剪拉比的依赖关系, 从而否定了关于屈服准则与剪拉比无关的传统看法. 此处建议的线性化准则在应用中将显得更加方便和易于为工程人员所掌握, 同时又能保证所需的精度. 以单层圆筒受内压的弹性极限压力 p_y (保证不受材料强化的影响) 为例, 设 K 为圆筒的径比, 则按不同屈服准则的计算式为

$$p_y = \frac{\sigma_s}{2} \frac{K^2 - 1}{K^2} \quad (\text{Tresca 准则})$$

$$p_y = \frac{K^2 - 1}{\sqrt{3K^2 - 1}} \sigma_s \quad (\text{Mises 准则})$$

$$p_y = \frac{K^2 - 1}{(K^2 + 1) + \beta(K^2 - 1)} \sigma_s \quad (\text{本文线性准则})$$

其数值结果和实验值^[4]列于表1. 由此可见, 线性化准则求得的结果是令人满意的.

表 1 弹性极限压力 p_y

序 号	K	实验值 ^[4]	Mises 准则	Tresca 准则	本文结果
1	1.2635	540	547.67	509.41	531.06
2	1.2574	510	538.14	496.12	521.88
3	1.2609	500	543.62	499.92	527.13
4	1.2593	525	541.12	498.70	524.23
5	1.2621	530	545.50	502.47	528.89
6	1.2626	520	546.27	503.15	529.59
7	1.2605	540	543.00	500.32	526.91
8	1.2620	510	545.34	502.33	528.77
平 均	1.2613	521.88	543.38	501.55	527.31

参 考 文 献

- [1] 谭继锦 科学通报 7(1990).
- [2] 俞钱斌, 何丽南, 宋凌宇, 中国科学 A., (12) (1985).
- [3] 熊慧而, 湖南大学学报, 16(2)(1989).
- [4] Chu shih-chi, AD-732407 U. S. Army Weapons Commend. 10(1971).

A Linearized and Unified Yield Criterion of Metals and Its Application

Xiong Hui-er

*(Department of Engineering Mechanics,
Hu'nan University, Changsha)*

Abstract

In this paper a linearized and unified yield criterion of metals is presented, which is in a form of a set of linear functions with two parameters. The parameters are expressed in terms of tension yield stress and so-called "shear-stretch ratio" and can be readily determined from experimental data. It is shown that in stress space the set of yield functions is a set of polygons with twelve edges located between the Tresca's hexagon and twin-shear-stress hexagon⁽¹⁾. In this paper the present yield function is used to analyse the prestressing loose running fit cylinders.

Key words ratio of shear-stretch, yield criterion, linearized and unified form