应用数学和力学，第15卷第4期(1994年4月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

广义强非线性拟补问题*

李红梅　　丁协平

(成都 四川师范大学数学系，1992年10月17日收到)

摘　　要

利用本文中的算法，我们证明了广义强非线性拟补问题解的存在性及由算法产生的迭代序列的收敛性，改进和发展了Noor，Chang-Huang等人的结果．此外，也给出了求广义强非线性拟补问题的近似解的另一更一般的迭代算法并证明了由此迭代格式获得的近似解收敛于此补问题的精确解．

关键词　广义强非线性拟补问题　Hilbert空间　锥　关于g的H-李卜西兹连续映象　关于g的Ψ-强单调映象　算法

一、引　　言

补问题理论自本世纪60年代被Lemke[1]和Cottle-Dantzig[2]引入和研究以来，在许多领域中有重要应用．变分不等式和补问题有着密切联系．最近几年，变分不等式和补问题在各个方面得到推广．

1971年，Karamardian[3]证明了若变分不等式和补问题中的集是凸锥时，两类问题具有相同的解集．我们利用本文的算法证明了广义强非线性拟补问题解的存在性及由算法产生的迭代序列的收敛性，所得结果改进和发展了Noor[4]，Chang-Huang[5]等人的结果，最后，也给出了求广义强非线性拟补问题的近似解的另一算法，并证明了由算法产生的迭代序列收敛于此补问题的精确解．

二、预　　备

设H为一Hilbert空间，$(\cdot,\cdot)$和$\|\cdot\|$分别表示H的内积和范数．设K为H的一闭凸锥，K^*为K的对偶锥，即

$$K^*=\{y\in H,\ (y,x)\geqslant 0\quad 对一切x\in K\}$$

如果D是H的非空子集，$g:D\to H$是单值映象，$K,T,A:D\to 2^H$均为集值映象，所谓广义强非线性拟补问题$(T,A,g;K(x))$是指：

求$x^*\in D$，$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$使得

* 国家自然科学基金资助项目

$$g(x^*)\in K(x^*),\ u^*+v^*\in K^*(x^*)\text{和}(g(x^*)-m(x^*),u^*+v^*)=0 \tag{2.1}$$

在许多应用中，$K(x)$有如下形式：

$$K(x)=m(x)+K$$

其中$m:D\to K$为给定单值映象，$K^*(x)$为$K(x)$的极锥，即

$$K^*(x)=\{w\in H,(w,z)\geqslant 0\quad \text{对一切}z\in K(x)\}$$

且有 $$K^*(x)=(m(x)+K)^*=m^*(x)\cap K^*$$

若$m\equiv 0$，则$K(x)=K,\forall x\in D$，广义强非线性拟补问题(2.1)化归丁[6]中的问题(1.1)。

若$m\equiv 0$且$A:D\to H$为单值映象，则问题(2.1)化归Chang-Huang[5]中介绍的广义集值隐补问题，即：

求$x^*\in D$，$u^*\in T(x^*)$使得

$$g(x^*)\in K,\ u^*+A(x^*)\in K^*\text{和}(g(x^*),\ u^*+A(x^*))=0 \tag{2.2}$$

若$D\equiv K$，$g(x)=x$，对一切$x\in K$，则补问题(2.1)化归下面的广义强非线性补问题(T，A;$K(x)$)：

求$x^*\in K(x^*)$，$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$使得

$$u^*+v^*\in K^*(x^*)\text{和}(x^*-m(x^*),\ u^*+v^*)=0 \tag{2.3}$$

若$T:D\to H$为单值映象，$A\equiv 0$，$D\equiv K$，则补问题(2.1)化归下面的广义隐补问题：求$x^*\in K$使得

$$g(x^*)\in K(x^*),Tx^*\in K^*(x^*)\text{且满足}(g(x^*)-m(x^*),\ Tx^*)=0. \tag{2.4}$$

此问题曾由Noor[7]所研究。

若$m\equiv 0$，$g=I$，则问题(2.4)化为：求$x^*\in K$使得，$Tx^*\in K^*$且$(x^*,Tx^*)=0$。这一问题在Karamardian[3]中曾被讨论。

从上面可以看出，(2.2)～(2.4)均为(2.1)的特例，因此广义强非线性拟补问题($T,A,g;K(x)$)(2.1)是一类相当广泛的问题。与问题(2.1)相关，我们考虑广义强非线性拟变分不等式问题($T,A,g;K(x)$)：

求$x^*\in D$，$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$，使得：

$$g(x^*)\in K(x^*)\text{和}(g(y)-g(x^*),u^*+v^*)\geqslant 0\qquad \text{对一切}g(y)\in K(x^*) \tag{2.5}$$

至于(2.5)的各种特例，这里不再赘述，下面介绍一些定义。

定义2.1 设D是H中一给定非空子集，$g:D\to H$，$F:D\to 2^H$是两给定映象，$\Phi,\Psi:[0,\infty)\to(0,\infty)$，称

(1) F是关于g的Φ-李卜西兹连续映象，如果

$$\|u-v\|\leqslant\Phi(\|g(x)-g(y)\|)\|g(x)-g(y)\|\qquad \text{对一切}x,y\in D,\ u\in F(x),\ v\in F(y)$$

(2) F是关于g的Ψ-强单调映象，如果

$$(u-v,g(x)-g(y))\geqslant\Psi(\|g(x)-g(y)\|)\|g(x)-g(y)\|^2\qquad \text{对一切}x,y\in D,\ u\in F(x),v\in F(y)$$

如果在定义中$g(x)=x$，对$\forall x\in D$，则称F是Φ-李卜西兹连续映像和F是Ψ-强单调映象，如果$\Phi(t)=\alpha$，$\Psi(t)=\beta$，对一切$t\in[0,\infty)$，$\alpha,\beta>0$，则称F是关于g的α-李卜西兹连续映象和F是关于g的β-强单调映象。

定义2.2[5] 设$D\subset H$是给定的集合，$g:D\to H$为单值映象，$F:D\to C(H)$为集值映象，其中$C(H)$表示H的所有非空紧子集的族，称F关于g是H-李卜西兹连续的，若存在常数

$\gamma>0$，使得

$$H(F(x),F(y))\leqslant\gamma\|g(x)-g(y)\| \qquad 对一切x,y\in D$$

这里$H(\cdot,\cdot)$表$C(H)$上的 Hausdorff 度量。

设K为H的闭凸子集，P_K为投影映象，即对每一$x\in H$，$P_K(x)$是满足下述关系的唯一元：

$$\|x-P_K(x)\|=\min_{y\in K}\|x-y\|$$

则有以下的已知结果：

引理2.1[8] 设K是H的凸子集，则对给定的$z\in H$，$x=P_K(z)$当且仅当$(x-z,\ y-x)\geqslant 0$对一切$y\in K$。

引理2.2[8] 投影映象$P_K:H\to K$是非扩张的，即

$$\|P_K(u)-P_K(v)\|\leqslant\|u-v\| \qquad 对一切u,v\in H$$

引理2.3[9] 若$K(x)=m(x)+K$，则对一切$x,y\in H$

有 $$P_{K(x)}(y)=m(x)+P_K(y-m(x))$$

三、迭代算法

定理3.1 设K是H的闭凸锥，$K(x)=m(x)+K$，$\forall x\in D$，其中$m:D\to K$是单值映象和$K\subset g(D)$，则$x^*\in D$，$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$是广义强非线性拟补问题$(T,A,g;K(x))$(2.1)的解当且仅当$x^*\in D$，$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$是广义强非线性拟变分不等式$(T,A,g;K(x))$(2.5)的解。

定理3.2 设$D\subset H$为一非空子集和$K\subset g(D)$，则$x\in D$，$u\in T(x)$和$v\in A(x)$使得$g(x)\in K(x)$和$(u+v,g(y)-g(x))\geqslant 0$，对一切$g(y)\in K(x)$当且仅当$x\in D$，$u\in T(x)$，$v\in A(x)$满足下列关系：

$$g(x)=m(x)+P_K[g(x)-\rho(u+v)-m(x)]$$

这里$\rho>0$为常数。

证明 设(x,u,v)是广义强非线性拟变分不等式$(T,A,g;K(x))$(2.5)的解，即有$x\in D$，$u\in T(x)$和$v\in A(x)$，使得：

$$g(x)\in K(x),\ (u+v,g(y)-g((x)))\geqslant 0 \qquad 对一切g(y)\in K(x)$$

由假设$K\subset g(D)$有$K(x)\subset g(D)$，我们有

$$(u+v,z-g(x))\geqslant 0 \qquad 对一切z\in K(x)$$

因此对给定的$\rho>0$，上式可改写为：

$$(g(x)-(g(x)-\rho(u+v)),\ z-g(x))\geqslant 0 \qquad 对一切z\in K(x)$$

由引理2.1和引理2.3知上述不等式成立的充要条件是

$$g(x)=P_{K(x)}(g(x)-\rho(u+v))=m(x)+P_K[g(x)-\rho(u+v)-m(x)]$$

下面先讨论广义强非线性拟补问题(2.1)的迭代算法，下一节证明(2.1)解的存在性及由算法3.1所产生的迭代序列的收敛性定理。

算法3.1 设D是H的一非空子集，$g:D\to H$，$m:D\to K$，$T,A:D\to C(H)$和$K\subset g(D)$，K是H的闭凸锥。对任意给定的$x_0\in D$，选取$u_0\in T(x_0)$和$v_0\in A(x_0)$，令$w_1=m(x_0)+P_K[g(x_0)$

$-\rho(u_0+v_0)-m(x_0)]\in g(D)$ （因$m(x_0)\in K\subset g(D)$），故存在$x_1\in D$，使得$g(x_1)=w_1$。
又因$u_0\in T(x_0)\in C(H)$，$v_0\in A(x_0)\in C(H)$，由[11]知：存在$u_1\in T(x_1)$和$v_1\in A(x_1)$满足

$$\|u_1-u_0\|\leqslant H(T(x_0),T(x_1)),\ \|v_1-v_0\|\leqslant H(A(x_0),A(x_1))$$

令
$$w_2=m(x_1)+P_K[g(x_1)-\rho(u_1+v_1)-m(x_1)]\in g(D)$$

同样存在$x_2\in D$使得$g(x_2)=w_2$。
继续上述过程，我们得到序列$\{u_n\},\{v_n\}$和$\{x_n\}$如下：

$$u_n\in T(x_n),\ v_n\in A(x_n)$$
$$\|u_n-u_{n-1}\|\leqslant H(T(x_n),T(x_{n-1})),\|v_n-v_{n-1}\|\leqslant H(A(x_n),A(x_{n-1}))$$
$$g(x_{n+1})=m(x_n)+P_K[g(x_n)-\rho(u_n+v_n)-m(x_n)]$$

$n=0,1,2,\cdots$ 这里$\rho>0$为常数

特例

(1) 若g为恒等映象和$D=K$，算法3.1化为：

算法3.2 对给定$x_0\in D$，我们可获得序列$\{u_n\},\{v_n\}$和$\{x_n\}$如下：

$$u_n\in T(x_n),\ v_n\in A(x_n)$$
$$\|u_n-u_{n-1}\|\leqslant H(T(x_n),T(x_{n-1})),\|v_n-v_{n-1}\|\leqslant H(A(x_n),A(x_{n-1}))$$
$$x_{n+1}=m(x_n)+P_K[x_n-\rho(u_n+v_n)-m(x_n)]$$

这里 $\rho>0$ 为常数，$n=0,1,2,\cdots$。

(2) 若$m\equiv 0$即$K(x)=K$,对一切$x\in D$且$T:D\to H$为单值映象时，算法 3.1化为Chang-Huang[5]中算法3.1，即：

算法3.3 对给定$x_0\in D$，可获得如下序列$\{x_n\},\{v_n\}$：

$$v_n\in A(x_n),\|v_n-v_{n-1}\|\leqslant H(A(x_n),A(x_{n-1}))$$
$$g(x_{n+1})=P_K[g(x_n)-\rho(Tx_n+v_n)]$$

这里 $\rho>0$ 为常数，$n=0,1,2,\cdots$。

(3) 若$T,A:D\to H$均为单值映象，由算法3.1我们得到

算法3.4 对给定$x_0\in D$，可获得如下序列$\{x_n\}$：

$$g(x_{n+1})=m(x_n)+P_K[g(x_n)-\rho(Tx_n+Ax_n)-m(x_n)]$$

这里$\rho>0$为常数，$n=0,1,2,\cdots$。

四、存在性及收敛性

定理4.1 设D为H的一非空子集，$g:D\to H$，$m:D\to K$，$T,A:D\to C(H)$，K是H中闭凸锥且$K\subset g(D)$，假设$T:D\to C(H)$是关于g 的H-李卜西兹连续的（常数为 $\beta>0$）和关于g的Ψ-强单调映象，$A:D\to C(H)$关于g 是H-李卜西兹连续的（常数为 $\gamma>0$），$m:D\to K$关于g是μ-李卜西兹连续映象，假定存在$\rho>0$和$k\in(0,1)$，使对一切$t\in[0,\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}0\leqslant(1-2\rho\Psi(t)+\rho^2\beta^2)^{1/2}<k-\rho\gamma-2\mu(t)\\ \Psi(t)>\gamma(1-2\mu(t)),\quad \rho\gamma<k-2\mu(t)\end{array}\right\}\qquad(4.1)$$

则存在$x^*\in D$，$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$是广义强非线性拟补问题(2.1)的解且$g(x_n)\to g(x^*)$，$u_n\to u^*$和$v_n\to v^*$．这里$\{x_n\}$，$\{u_n\}$和$\{v_n\}$是由算法3.1所产生的序列。

证明 由算法3.1和引理2.2有：

$$
\begin{aligned}
\|w_{n+1}-w_n\| &= \|g(x_{n+1})-g(x_n)\| \\
&= \|m(x_n)+P_K[g(x_n)-\rho(u_n+v_n)-m(x_n)]-m(x_{n-1}) \\
&\quad -P_K[g(x_{n-1})-\rho(u_{n-1}+v_{n-1})-m(x_{n-1})]\| \\
&\leqslant \|m(x_n)-m(x_{n-1})\|+\|g(x_n)-\rho(u_n+v_n)-m(x_n) \\
&\quad -g(x_{n-1})+\rho(u_{n-1}+v_{n-1})+m(x_{n-1})\| \\
&\leqslant 2\|m(x_n)-m(x_{n-1})\|+\|g(x_n)-g(x_{n-1})-\rho(u_n-u_{n-1})-\rho(v_n-v_{n-1})\| \\
&\leqslant 2\|m(x_n)-m(x_{n-1})\|+\|g(x_n)-g(x_{n-1})-\rho(u_n-u_{n-1})\|+\rho\|v_n-v_{n-1}\|
\end{aligned}
$$

因T关于g是H-李卜西兹连续的且关于g是Ψ-强单调映象易知

$$
\begin{aligned}
\|g(x_n)-g(x_{n-1})-\rho(u_n-u_{n-1})\|^2 &= \|g(x_n)-g(x_{n-1})\|^2 \\
&\quad -2\rho(u_n-u_{n-1},g(x_n)-g(x_{n-1}))+\rho^2\|u_n-u_{n-1}\|^2 \\
&\leqslant \|g(x_n)-g(x_{n-1})\|^2-2\rho\Psi(\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|) \\
&\quad \cdot\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|^2+\rho^2(H(T(x_n),\ T(x_{n-1})))^2 \\
&\leqslant (1-2\rho\Psi(\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|)+\rho^2\beta^2)\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|^2
\end{aligned}
$$

又由A是关于g的H-李卜西兹连续映象知：

$$
\|v_n-v_{n-1}\|\leqslant H(A(x_n),A(x_{n-1}))\leqslant\gamma\|g(x_n)-g(x_{n-1})\| \tag{4.2}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\|w_{n+1}-w_n\| &\leqslant [2\mu(\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|) \\
&\quad +\sqrt{1-2\rho\Psi(\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|)+\rho^2\beta^2}+\rho\gamma]\|w_n-w_{n-1}\| \\
&= \theta(w_n-w_{n-1})\|w_n-w_{n-1}\|
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

由条件 (4.1) 知

$$
\begin{aligned}
\theta(w_n-w_{n-1}) &= 2\mu(\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|) \\
&\quad +\sqrt{1-2\rho\Psi(\|g(x_n)-g(x_{n-1})\|)+\rho^2\beta^2}+\rho\gamma<k<1
\end{aligned}
$$

故由(4.3)知 $\{w_n\}$是K中的 Cauchy 序列，从而有 $w_n\to w\in K\,(n\to\infty)$，因$K\subset g(D)$，存在$x^*\in D$使得$w=g(x^*)$，故$g(x_n)\to g(x^*)\in K$。

由(4.2)有$\|v_n-v_{n-1}\|\leqslant\gamma\|w_n-w_{n-1}\|$故$\{v_n\}$是$H$中Cauchy序列，同样$\{u_n\}$也是$H$中Cauchy序列，从而有：$u_n\to u^*$，$v_n\to v^*\in H$，当$n\to\infty$时。

令 $\quad w'=m(x^*)+P_K[g(x^*)-\rho(u^*+v^*)-m(x^*)]$

$$
\begin{aligned}
\|w_{n+1}-w'\| &= \|g(x_{n+1})-w'\| \\
&= \|m(x_n)+P_K[g(x_n)-\rho(u_n+v_n)-m(x_n)]-m(x^*) \\
&\quad -P_K[g(x^*)-\rho(u^*+v^*)-m(x^*)]\| \\
&\leqslant 2\|m(x_n)-m(x^*)\|+\|g(x_n)-g(x^*)-\rho(u_n-u^*)-\rho(v_n-v^*)\| \\
&\leqslant 2\mu(\|g(x_n)-g(x^*)\|)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\|g(x_n)-g(x^*)\| \\
&\quad +\rho\|u_n-u^*\|+\rho\|v_n-v^*\|
\end{aligned}
$$

由上面不等式易证$w_n\to w'$且因此 $w=w'$ 和

$$
g(x^*)=m(x^*)+P_K[g(x^*)-\rho(u^*+v^*)-m(x^*)]\in K(x^*) \tag{4.4}
$$

下面证明$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$。

$$
\begin{aligned}
d(u^*,T(x^*)) &\leqslant \|u^*-u_n\|+d(u_n,T(x^*)) \\
&\leqslant \|u^*-u_n\|+H(T(x_n),T(x^*)) \qquad \text{(由[10]可知)} \\
&\leqslant \|u^*-u_n\|+\beta\|g(x_n)-g(x^*)\|
\end{aligned}
$$

这里 $\quad d(u^*,T(x^*))=\inf\{\|u^*-u\|,\ \forall u\in T(x^*)\}$

因此有$d(u^*,T(x^*))=0$即$u^*\in T(x^*)$，同理可证$v^*\in A(x^*)$。

最后由定理3.1，3.2和(4.4)式知：$x^*\in D$，$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$是广义强非线性拟补问题(2.1)的解且$g(x_n)\to g(x^*)$，$u_n\to u^*$，$v_n\to v^*$（当$n\to\infty$时）。

注4.1 在定理4.1中，若$m\equiv 0$，T为单值映象且T关于g是α-强单调映象($\alpha>0$)，有$\mu(t)\equiv 0$，则条件(4.1)化为：

$$0\leqslant(1-2\rho\alpha+\rho^2\beta^2)^{1/2}<k-\rho\gamma<1-\rho\gamma,\ \alpha>\gamma,\ \rho\gamma<1$$

即$0<\rho<2(\alpha-\gamma)/(\beta^2-\gamma^2)$。此时定理4.1化归Chang-Huang[5]中定理3.1，因此，定理4.1从几个方面改进和推广了[5]中定理3.1.

注4.2 若$H=R^n$，$D=K$，T和A均为单值映象，$m\equiv 0$且g为恒等映象，则算法3.1化归Noor[4]中算法2.1，从而定理4.1也从几个方面推广了[4]中定理3.2.

五、更一般的算法

下面，我们给出广义强非线性拟补问题(2.1)的更为一般的算法5.1并证明由算法5.1产生的序列收敛于补问题(2.1)的精确解。

算法5.1 设D是H的一非空子集，K是H的闭凸锥，$g:D\to H$使得$g(D)$为凸集和$K\subset g(D)$，设$m:D\to K,T,A:D\to C(H)$和$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$满足：

$$0\leqslant\alpha_n,\ \beta_n\leqslant 1,\ \forall n\geqslant 0\text{和}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\text{发散。}$$

对任意给定$x_0\in D$，选取$\bar{u}_0\in T(x_0)$和$\bar{v}_0\in A(x_0)$

令 $$w_1'=(1-\beta_0)g(x_0)+\beta_0[m(x_0)+P_K(g(x_0)-\rho(\bar{u}_0+\bar{v}_0)-m(x_0))]\in g(D)$$

故存在$y_0\in D$使得$g(y_0)=w_1'$。

又因$\bar{u}_0\in T(x_0)\in C(H)$，$\bar{v}_0\in A(x_0)\in C(H)$，由[10]知存在

$u_0\in T(y_0)$，$v_0\in A(y_0)$满足

$$\|u_0-\bar{u}_0\|\leqslant H(T(x_0),T(y_0)),\|v_0-\bar{v}_0\|\leqslant H(A(x_0),A(y_0))$$

令 $$w_1=(1-\alpha_0)g(x_0)+\alpha_0[m(y_0)+P_K(g(y_0)-\rho(u_0+v_0)-m(y_0))]\in g(D)$$

故存在$x_1\in D$使得$g(x_1)=w_1$。

继续上述过程，得序列$\{x_n\},\{u_n\}$和$\{v_n\}$如下：

$$u_n\in T(y_n),v_n\in A(y_n),\bar{u}_n\in T(x_n),\bar{v}_n\in A(x_n)$$
$$\|u_n-\bar{u}_n\|\leqslant H(T(y_n),T(x_n)),\|v_n-\bar{v}_n\|\leqslant H(A(y_n),A(x_n))$$
$$g(x_{n+1})=(1-\alpha_n)g(x_n)+\alpha_n[m(y_n)+P_K(g(y_n)-\rho(u_n+v_n)-m(y_n))]$$
$$g(y_n)=(1-\beta_n)g(x_n)+\beta_n[m(x_n)+P_K(g(x_n)-\rho(\bar{u}_n+\bar{v}_n)-m(x_n))]$$

$n=0,1,2,\cdots$ 这里$\rho>0$为常数。

定理5.1 设D为H中非空子集，K是H的闭凸锥，$m:D\to K,T,A:D\to C(H)$和$g:D\to H$使得$g(D)$是凸集和$K\subset g(D)$。假设$T:D\to C(H)$关于g是H-李卜西兹连续（常数为$\beta>0$）和关于g是Ψ-强单调映象，$A:D\to C(H)$关于g是H-李卜西兹连续映象（常数为$\gamma>0$），$m:D\to K$关于g是μ-李卜西兹连续映象，假设定理4.1的条件(4.1)满足，若(x^*,u^*,v^*)是广义强非线性拟补问题$(T,A,g;K(x))$(2.1)的解，$\{x_n\},\{u_n\}$和$\{v_n\}$是由算法5.1产生的序列，则有：

$$g(x_n)\to g(x^*),u_n\to u^*,v_n\to v^*$$

证明 因(x^*,u^*,v^*)是广义强非线性拟补问题$(T,A,g;K(x))$(2.1)的解，则有$x^*\in D$，

$u^*\in T(x^*)$和$v^*\in A(x^*)$满足

$$g(x^*)\in K(x^*),u^*+v^*\in K^*(x^*),(u^*+v^*.g(x^*)-m(x^*))=0$$

由定理3.1和3.2有：

$$g(x^*)=m(x^*)+P_K[g(x^*)-\rho(u^*+v^*)-m(x^*)]$$

由算法5.1和引理2.2有：

$$\begin{aligned}\|g(x_{n+1})-g(x^*)\|&=\|(1-\alpha_n)g(x_n)+\alpha_n[m(y_n)+P_K(g(y_n)\\&\quad-\rho(u_n+v_n)-m(y_n))]-(1-\alpha_n)g(x^*)-\alpha_n g(x^*)\|\\&\leqslant(1-\alpha_n)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\alpha_n[2\|m(y_n)-m(x^*)\|\\&\quad+\|g(y_n)-g(x^*)-\rho(u_n-u^*)\|+\rho\|v_n-v^*\|]\end{aligned}$$

由T关于g是H-李卜西兹连续的（常数为$\beta>0$）和关于g是Ψ-强单调映象可知：

$$\begin{aligned}\|g(y_n)-g(x^*)-\rho(u_n-u^*)\|^2&=\|g(y_n)-g(x^*)\|^2\\&\quad-2\rho(u_n-u^*,g(y_n)-g(x^*))+\rho^2\|u_n-u^*\|^2\\&\leqslant[1-2\rho\Psi(\|g(y_n)-g(x^*)\|)+\rho^2\beta^2]\|g(y_n)-g(x^*)\|^2\end{aligned}$$

由m关于g是μ-李卜西兹的和算法5.1有：

$$\|m(y_n)-m(x^*)\|\leqslant\mu(\|g(y_n)-g(x^*)\|)\|g(y_n)-g(x^*)\|$$

$$\|v_n-v^*\|\leqslant H(A(y_n),A(x^*))\leqslant\gamma\|g(y_n)-g(x^*)\|$$

从而：

$$\begin{aligned}\|g(x_{n+1})-g(x^*)\|&\leqslant(1-\alpha_n)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\alpha_n[2\mu(\|g(y_n)-g(x^*)\|)\\&\quad+\sqrt{1-2\rho\Psi(\|g(y_n)-g(x^*)\|)+\rho^2\beta^2}+\rho\gamma]\|g(y_n)-g(x^*)\|\\&=(1-\alpha_n)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\alpha_n k_1\|g(y_n)-g(x^*)\|\end{aligned}$$

由条件（4.1）知

$$k_1=2\mu(\|g(y_n)-g(x^*)\|)+\sqrt{1-2\rho\Psi(\|g(y_n)-g(x^*)\|)+\rho^2\beta^2}+\rho\gamma<k<1$$

类似地有：

$$\|g(y_n)-g(x^*)\|\leqslant(1-\beta_n)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\beta_n k_2\|g(x_n)-g(x^*)\|$$

这里 $k_2=2\mu(\|g(x_n)-g(x^*)\|)+\rho\gamma+\sqrt{1-2\rho\Psi(\|g(x_n)-g(x^*)\|)+\rho^2\beta^2}<k<1$

（由条件(4.1)可知）。故：

$$\begin{aligned}\|g(x_{n+1})-g(x^*)\|&\leqslant(1-\alpha_n)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\alpha_n k_1\|g(y_n)-g(x^*)\|\\&\leqslant(1-\alpha_n)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\alpha_n k_1[(1-\beta_n)+\beta_n k_2]\|g(x_n)-g(x^*)\|\\&\leqslant(1-\alpha_n)\|g(x_n)-g(x^*)\|+\alpha_n k_1\|g(x_n)-g(x^*)\|\\&\leqslant(1-\alpha_n+\alpha_n k_1)\|g(x_n)-g(x^*)\|\\&\leqslant\prod_{j=0}^{n}[1-(1-k_1)\alpha_j]\|g(x_0)-g(x^*)\|\end{aligned}$$

因$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$发散和$1-k_1>1-k>0$，我们知$\prod\limits_{j=0}^{\infty}[1-(1-k_1)\alpha_j]=0$,因此$g(x_{n+1})\to g(x^*)$,当$n\to\infty$。

又由 $\|u_n-u^*\|\leqslant H(T(y_n),\ T(x^*))\leqslant\beta\|g(y_n)-g(x^*)\|$

$$\|v_n-v^*\|\leqslant H,(A(y_n),A(x^*))\leqslant\gamma\|g(y_n)-g(x^*)\|$$

容易推知$n\to\infty$时，$u_n\to u^*$且$v_n\to v^*$。

注5.1 由于算法(5.1)推广了众多已知算法到 Ishikawa 型迭代算法[11]，因此定理5.1推广了许多已知结果.

参 考 文 献

[1] Lemke, C. E., Bimatrix equilibrium points and mathematical programming, *Management Sci.*, 11 (1965), 681—689.

[2] Cottle, R. W. and G. B. Dantzig, Complementarity pivot theory of mathematical programming, *Linear Algebra Appl.*, 1 (1968), 163—185.

[3] Karamardian, S., Generalized complementarity problem, *J. Optim. Theory Appl*, 8 (1971), 161—168.

[4] Noor, M. A., On the nonlinear complementarity problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 123 (1987), 455—460.

[5] Chang, S. S. and N. J. Huang, Generalized multivalued implicit complementarity problem in Hilbert space, *Math. Japanica*, 36(6) (1991), 1093—1100.

[6] 丁协平,广义强非线性隐补问题解的存在性及迭代法,四川师范大学学报,16(4) (1993),30—36.

[7] Noor, M. A., General quasi-complementarity problems, *Math. Japanica*, 36(1) (1991), 113—119.

[8] Kinderlehrar, D. and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Acad. Press, New York (1980).

[9] Noor, M. A., An iterative scheme for a class of quasi variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 110 (1985), 463—468.

[10] Nadler, Jr., S. B., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 30 (1969), 475—488.

[11] Ishikawa, S., Fixed points by a new iterative method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44 (1974), 147—150.

Generalized Strongly Nonlinear Quasi-Complementarity Problems

Li Hong-mei Ding Xie-ping

(Sichuan Normal University, Chengdu)

Abstract

Using the algorithm in this paper, we prove the existence of the solutions to the generalized strongly nonlinear quasi-complementarity problems and the convergence of the iterative sequences generated by the algorithm. Our results improve and extend the corresponding results of Noor and Chang-Huang. Moreover, a more general iterative algorithm for finding the approximate solution of generalized strongly nonlinear quasi-complementarity problems is also given. It is shown that the approximate solution obtained by the iterative scheme converges to the exact solution of this quasi-complementarity problem.

Key words generalized strongly nonlinear quasi-complementarity problem, Hilbert space, cone, H-Lipschitz continuous mapping with respect to g, Ψ-strongly monotone mapping with respect to g