

# 在两相粘性跨音速喷管流动中 薄层方程的一种隐式求解方法\*

何洪庆 侯 晓 蔡体敏 吴心平

(西安 西北工业大学, 1992年 9 月18日收到)

## 摘 要

本文略去沿流动方向的粘性, 将任意曲线坐标系中无量纲化的 N-S 方程简化为薄层方程。采用隐式近似因子分解法求解气相控制方程, 采用特征线法跟踪颗粒, 然后获得两相跨音速湍流充分耦合的数值方法。其中, 颗粒尺寸是分级的, 用参考平面中的拟特征线法处理喷管的粘性亚音速进口边界条件, 湍流采用代数模型。该计算方法应用于火箭喷管两相粘流计算, 并预估了固体火箭发动机的推力和比冲, 计算与试验结果吻合很好。文中还讨论了不同颗粒尺寸、不同颗粒质量百分数和颗粒尺寸分级等对流场的影响, 分析了颗粒、二维径向分速和粘性对发动机比冲的影响。

本文的方法具有节省机时的优点, 尤其是对颗粒尺寸分级的计算, 效果更为显著。

**关键词** 薄层方程 两相粘性跨音速喷管流动 隐式格式

## 一、前 言

现代固体火箭发动机喷管中的流动是典型的两相跨音速流动。燃气的流动分析是固体火箭发动机性能计算和设计的基础, 也是众多专题研究的前提。特别是随着固体火箭发动机优化设计和 CAD 技术的发展, 迫切需要发展一套适应性强、准确度高、化费机时少的喷管流动分析程序。

国外已成功地进行了喷管的两相跨音速湍流流动计算<sup>[1]</sup>, 国内成功地进行了两相无粘跨音速喷管流动计算<sup>[2]</sup>。然而, 它们普遍采用显式格式的时间相关法。这种方法的优点是适应性强, 缺点是化费的计算机时很长。

求解 N-S 方程是当前计算流体力学中最活跃的领域之一。在众多的方法中, 显式格式以 MacCormack 的预报校正格式应用最广。显式格式的优点是编程简单, 但时间步长受稳定性准则较大的限制。

多相流动的数值模拟基本上可分成两大类: 两流体法和轨道法。轨道法跟踪颗粒轨迹, 可以认为是一种自然求解过程。其优点是处理颗粒群的方法较为简单, 可以追踪比较复杂的

\* 钱伟长推荐。

国家自然科学基金资助课题

颗粒历程,可以考察颗粒的速度和温度滑移,数值计算不会产生伪扩散,而且对多分散的颗粒群不需要增加过多的计算机内存。因此,目前轨道法获得较多的应用。其主要缺点是对颗粒的湍流扩散还缺乏较好的处理方法。两流体法的优缺点与轨道法基本相反。

本文以固体火箭喷管中的两相跨音速湍流为背景,对简化的N-S薄层方程提出一种隐式的求解格式。基本的方法是将气相N-S方程简化为薄层方程,采用隐式近似因子分解法<sup>[9]</sup>求解,结合对颗粒相的轨道法,进行充分的耦合。

具体的计算过程分五步进行:第一步是探索用隐式近似因子分解法计算无粘纯气相喷管的跨音速流动。取得成功后,第二步用同样的方法计算粘性气相喷管的跨音速流动。第三步是应用第一步的成果,结合轨道法计算无粘两相跨音速喷管流动。第四步是应用第二步和第三步的工作,计算粘性(层流及湍流)两相跨音速喷管流动。第五步是将以上四套程序应用于预估固体火箭发动机的性能,并进行分析。本文综合地反映最终成果。

## 二、任意曲线坐标系中的控制方程

多相流体力学区别于单相流体力学最重要的特点之一,就在于要处理两相间的耦合,即在研究气相和颗粒群的运动规律中要考虑颗粒群和气相间的动量、能量间的相互作用。

为了简化数学模型,对两相流作如下假设:

1. 颗粒是不可压的球体,颗粒间彼此不碰撞,不发生裂解和化学反应。
2. 颗粒所占的体积及重力效应可忽略不计,颗粒内部温度分布均匀,颗粒的运动不影响系统的压强,即颗粒相对压强没有贡献。
3. 两相间的作用力仅考虑粘性阻力,两相间的能量交换只考虑对流换热。

这些假设与文献[4]、[5]所作的假设基本相同,而文献[6]还作了气相无粘性的假设,后者的计算模型属于两相无粘流动。

下面我们叙述两相湍流模型控制方程的推导思路和结果。

对气相方程,首先,我们将忽略气流质量力和热源的平面和轴对称二维可压缩非定常平均N-S方程的矢量形式无量纲化,其次导出在任意曲线坐标系中的控制方程,然后简化为薄层方程。

将参数无量纲化,可使计算结果具有通用性。本文选择临界状态为参考状态,即取临界音速 $a_{cr}$ 、临界密度 $\rho_{cr}$ 和临界温度所对应的气体粘性系数 $\mu_{cr}$ 为速度、密度和粘性系数的无量纲参考参数,长度的无量纲参数取喉径 $R_t$ 、临界雷诺数为

$$Re_{cr} = \frac{\rho_{cr} a_{cr} R_t}{\mu_{cr}} \quad (2.1)$$

采用贴体曲线坐标系,使流场的边界自动地成为一条曲线坐标线,将物理平面的控制方程变换到计算平面上。这样做虽然使控制方程变得复杂些,但却简化了边界条件的处理,提高了某些关键区域的计算精度,且使程序具有通用性。

计算平面 $(\xi, \eta)$ 与物理平面 $(x, y)$ 间的关系为

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (2.2)$$

设 $J$ 为雅可比矩阵

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (2.3)$$

则坐标变换关系为

$$\xi_x = \frac{1}{J} y_\eta, \quad \xi_y = -\frac{1}{J} x_\eta, \quad \eta_x = -\frac{1}{J} y_\xi, \quad \eta_y = \frac{1}{J} x_\xi \quad (2.4)$$

为了使控制方程中的某些项写成较简捷的形式，定义

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \xi_x u + \xi_y v, & \bar{v} &= \eta_x u + \eta_y v \\ \bar{u}_{,i} &= \xi_x u_{,i} + \xi_y v_{,i}, & \bar{v}_{,i} &= \eta_x u_{,i} + \eta_y v_{,i} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

下标  $p$  表示颗粒参数， $i=1, 2, \dots, n$ ，是颗粒分级数，即将颗粒按其尺寸的大小分组的组数。

应用链锁规则展开 N-S 方程并整理，可得在任意曲线坐标系中无量纲化的形式。这种方程计算工作量极大，因此将它进一步简化。由于仅在垂直于壁面的方向上物体表面的薄层内具有明显的参数梯度，因此就可以将沿着物体表面流动方向的粘性忽略，仅保留垂直于流动方向的粘性项，简化后的方程被称为薄层方程<sup>[7]、[8]</sup>。在边界层流动理论中，虽然也作了类似的假设，却又将法向动量方程简化为在边界层内沿法向压强梯度为零，而薄层方程组中保留了法向动量方程，在薄层内压强沿法向是改变的。

在一般情况下，薄层不一定总是沿着  $x$  方向，而在贴体曲线坐标系中，可取  $\xi$  方向与流向一致， $\eta$  方向为法向，略去  $\xi$  方向的粘性项。

两相流中气相的薄层方程为

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \eta} + H_g + H_p = Re_c^{-1} \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial \eta} + \bar{G} \right) \quad (2.6)$$

式中

$$\bar{Q} = J \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = J \begin{bmatrix} \rho \bar{u} \\ \rho u \bar{u} + \xi_x p \\ \rho v \bar{u} + \xi_y p \\ (e+p) \bar{u} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = J \begin{bmatrix} \rho \bar{v} \\ \rho u \bar{v} + \eta_x p \\ \rho v \bar{v} + \eta_y p \\ (e+p) \bar{v} \end{bmatrix}, \quad H_g = \frac{J}{y} \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

$$H_p = J \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^n \rho_{p,i} A_{p,i} (u - u_{p,i}) \\ \sum_{i=1}^n \rho_{p,i} A_{p,i} (v - v_{p,i}) \\ \sum_{i=1}^n \rho_{p,i} \{ A_{p,i} [u(u - u_{p,i}) + v(v - v_{p,i})] + B_{p,i} (T - T_{p,i}) \} \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = J \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \left( \frac{4}{3} \eta_x^2 + \eta_y^2 \right) u_\eta + \frac{\mu}{3} \eta_x \eta_y v_\eta - J \frac{2}{3} \mu \eta_x \frac{v}{y} \\ \mu \left( \eta_x^2 + \frac{4}{3} \eta_y^2 \right) v_\eta + \frac{\mu}{3} \eta_x \eta_y u_\eta - J \frac{2}{3} \mu \eta_y \frac{v}{y} \\ \left[ \mu \gamma Pr^{-1} (\eta_x^2 + \eta_y^2) \left( \frac{e}{\rho} - \frac{u^2 + v^2}{2} \right)_\eta + \mu \left( \frac{2}{3} \eta_x^2 + \frac{1}{2} \eta_y^2 \right) (u^2)_\eta + \mu \left( \frac{1}{2} \eta_x^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \eta_y^2 \right) (v^2)_\eta + \frac{1}{3} \mu \eta_x \eta_y (uv)_\eta - J \frac{2}{3} \mu \frac{uv}{y} \eta_x - J \frac{2}{3} \mu \frac{v^2}{y} \eta_y \right] \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \frac{J}{y} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \eta_y u_\eta + \mu \eta_x v_\eta \\ 2 \mu \eta_y u_\eta - 2 \mu v / y \\ \left[ \mu \gamma Pr^{-1} \eta_y \left( \frac{e}{\rho} - \frac{u^2 + v^2}{2} \right)_\eta + \mu (\eta_y u_\eta + \eta_x v_\eta) u \right. \\ \left. + \left( \frac{4}{3} \mu \eta_y v_\eta - \frac{2}{3} \mu \eta_x u_\eta - \frac{2}{3} \mu \frac{v}{y} \right) v \right] \end{bmatrix}$$

颗粒相控制方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_{pi}}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial \rho_{pi} u_{pi}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \rho_{pi} u_{pi}}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial \rho_{pi} v_{pi}}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial \rho_{pi} v_{pi}}{\partial \xi} + \frac{\rho_{pi} v_{pi}}{y} &= 0 \\ \frac{\partial u_{pi}}{\partial t} + \bar{u}_{pi} \frac{\partial u_{pi}}{\partial \xi} + \bar{v}_{pi} \frac{\partial u_{pi}}{\partial \eta} &= A_{pi} (u - u_{pi}) \\ \frac{\partial v_{pi}}{\partial t} + \bar{u}_{pi} \frac{\partial v_{pi}}{\partial \xi} + \bar{v}_{pi} \frac{\partial v_{pi}}{\partial \eta} &= A_{pi} (v - v_{pi}) \\ \frac{\partial h_{pi}}{\partial t} + \bar{u}_{pi} \frac{\partial h_{pi}}{\partial \xi} + \bar{v}_{pi} \frac{\partial h_{pi}}{\partial \eta} &= B_{pi} (T - T_{pi}) \end{aligned} \right\} (2.7)$$

气相与颗粒相间的阻力系数  $A_{pi}$  和热交换系数  $B_{pi}$  经无量纲化后为

$$A_{pi} = \frac{9 \mu C_D^+ R_t}{2 \rho_m r_{pi}^2 a_{cr}}, \quad B_{pi} = \frac{3 \mu C_p N_u^+ R_t}{\rho_m r_{pi}^2 Pr a_{cr}} \quad (2.8)$$

$C_D^+$  和  $N_u^+$  为颗粒阻力系数和热交换系数的修正因子, 采用由 Crowe 提出, 经 Hersmen 修正, 适用于固体火箭喷管两相流动计算, 为大多数研究者乐于采用的复杂公式<sup>[9]</sup>。

对于理想气体和颗粒相, 状态方程为

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right], \quad h_{pi} = C_p T_{pi} \quad (2.9)$$

对于湍流计算, 气相控制方程使用平均的薄层方程, 还需要用适当的湍流模型来封闭方程组。本文的计算中, 湍流都属于壁面湍流。对于壁面湍流, 选用代数模型是合适的。目前, 由 Baldwin 和 Lomax<sup>[10]</sup> 提出的两层代数湍流模型已经被广泛地应用到跨音速和超音速壁面湍流计算之中<sup>[11]</sup>。本文引用该模型确定湍流粘性系数  $\mu_t$ , 并结合层流粘性系数  $\mu_L$  来计算总应力。

$$\mu = \mu_L + \mu_t \quad \frac{\mu}{Pr} = \frac{\mu_L}{Pr_L} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \quad (2.10)$$

目前, 对于气固两相湍流的湍流模型仍在研究之中, 颗粒的存在对于湍流结构的影响仍

然很不清楚。这里，假设颗粒的存在不影响原气相的湍流模型<sup>[4]、[5]</sup>。为了考察在轨道模型中颗粒群的湍流扩散，文献[12]用修正的轨道模型针对固体火箭喷管中的两相湍流进行了计算。结果表明，颗粒沿轨道两侧的扩散速度与颗粒沿轨道的流速相比是非常小的。因此，本文仍忽略颗粒的湍流扩散运动。

### 三、控制方程的解法

从气相和颗粒相控制方程可见，其中都包含着气相与颗粒相间的阻力和传热的相互作用项。正是这些项，将两相流动耦合成整体。在数值求解控制方程中，用隐式近似因子分解法求解粘性气相流场；同时将颗粒群按照尺寸的大小分组，用特征线法沿颗粒群轨迹求解凝相方程。两相耦合求解的思路是，用已得到的粘性气相流场，通过凝相方程算得颗粒参数，并获得气相方程中新的颗粒源项，再重新进行粘性气相流场计算，如此反复直至收敛。

跨音速定常薄层方程是混合型的，其非定常方程是椭圆型的。本文用非定常方程经很长时间后的解作为定常解（时间相关法），其差分格式采用隐式近似因子分解法。这种方法的基本点是对二维问题用两个方向上的一维算子的乘积代替二维算子，在计算平面上推导求解薄层方程的差分格式。本文感兴趣的是稳态解，因此，对时间取一阶差分，对空间取二阶中心差分。得到的差分方程组是块三对角方程组，用追赶法求解。

薄层方程近似因子分解的内点差分格式为

$$\begin{aligned}
 & [I + \Delta t \delta_\xi A^n - \varepsilon_1 J \nabla_\xi \Delta_\xi J^{-1}] \times [I + \Delta t \delta_\eta B^n + \Delta t C^n - \Delta t Re_{\sigma_r}^{-1} (\delta_\eta M^n + N^n) \\
 & - \varepsilon_1 J \nabla_\eta \Delta_\eta J^{-1}] \Delta Q^n = - \Delta t [\delta_\xi E^n + \delta_\eta F^n + H_\eta^n + H_\xi^n - Re_{\sigma_r}^{-1} (\delta_\eta M^n + N^n)] \\
 & - \varepsilon_0 J [(\nabla_\xi \Delta_\xi)^2 + (\nabla_\eta \Delta_\eta)^2] J^{-1} Q^n
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

这里， $I$  为单位矩阵； $\delta_\xi$ 、 $\delta_\eta$  为中心差分算子； $\nabla$ 、 $\Delta$  为向前和向后差分算子； $n$  为迭代次数指标；而  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $M$ 、 $N$  分别表示  $E$ 、 $F$ 、 $H$ 、 $S$ 、 $G$  对曲线坐标的偏导数，它们的展开式是很复杂的矩阵。为了求解过程的稳定和增加稳定性范围，在方程的左端添加了二阶人工粘性项。为了抑制非线性不稳定，在方程右端添加了四阶人工粘性项。 $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_0$  分别为二阶和四阶人工粘性的耗散系数。

颗粒方程是双曲型的，因此用其定常方程。导得在计算平面上的特征线方程为

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\eta_x u_{pi} + \eta_y v_{pi}}{\xi_x u_{pi} + \xi_y v_{pi}} \quad (3.2)$$

相容性方程为

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du_{pi}}{d\xi} &= \frac{A_{pi}}{\xi_x u_{pi} + \xi_y v_{pi}} (u - u_{pi}), & \frac{dv_{pi}}{d\xi} &= \frac{A_{pi}}{\xi_x u_{pi} + \xi_y v_{pi}} (v - v_{pi}) \\
 \frac{dh_{pi}}{d\xi} &= \frac{B_{pi}}{\xi_x u_{pi} + \xi_y v_{pi}} (T - T_{pi})
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

颗粒密度由两条颗粒轨线间的颗粒质量守恒来计算，为

$$\Delta m_{pi} = 2\pi y \bar{\rho}_{pi} (\bar{u}_{pi} \Delta y - \bar{v}_{pi} \Delta x) \quad (3.4)$$

式中参数上面的“—”表示在同一条  $\xi$  坐标线上相邻两条颗粒轨线的特征线网格结点上颗粒参数的平均值。

喷管计算域的边界包含进口亚音速、出口超音速、壁面和对称轴四类边界。

进口为亚音速流，根据物理信息在边界上的传播方向，在参考平面中分别求得气相和颗粒相的拟特征线和相容性方程，确定边界参数。对称轴是一条气流流线和颗粒轨线。壁面，对无粘流，是一条流线，采用无滑移边界条件；对粘流，认为壁面无滑移，不可穿透，且气流滞止。对它们分别推出压力与温度的关系。对颗粒，仍用特征线法确定参数。出口是超音速流，气相用内插法，颗粒相用特征线法求得参数。

初始条件，用两相平衡流作初场。

网格生成，用 Thompson 方法生成贴体网格。为了分辨粘性的影响，在喷管壁面附近，用指数规律加密网格分布。

## 四、计算结果

为了考核程序的可靠性，对标准的 JPL 喷管进行了气相无粘和粘流计算，与公布的计算和试验数据非常一致(图2~4)。为了考核程序的适用性，还进行了小喉部曲率半径、陡壁收敛段、潜入和矩形喷管的流场计算。潜入喷管流场(图5、6)与普通喷管流场(图1、3)有很大的区别。

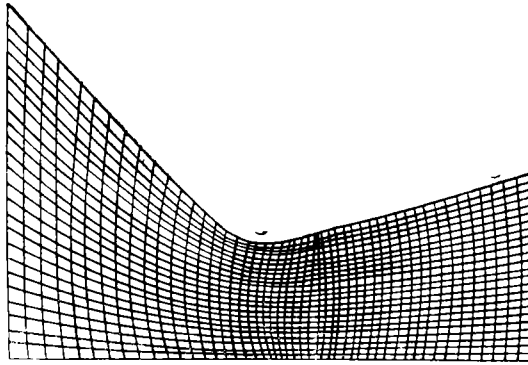


图1 网格分布

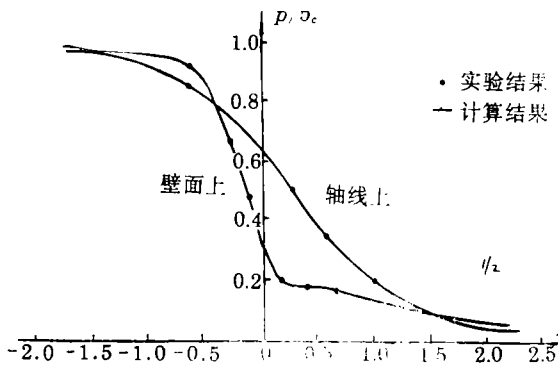


图2 壁面和轴线上的压强比( $p/p_c$ )分布

颗粒对流场有很大的影响(图7~10)。计算表明，颗粒尺寸越小，对流场的影响越明显。颗粒的质量分数越大，对流场的影响越大(图11)。

在两相流中，颗粒半径是最重要的参数之一。在实际工程问题中，颗粒尺寸具有分散

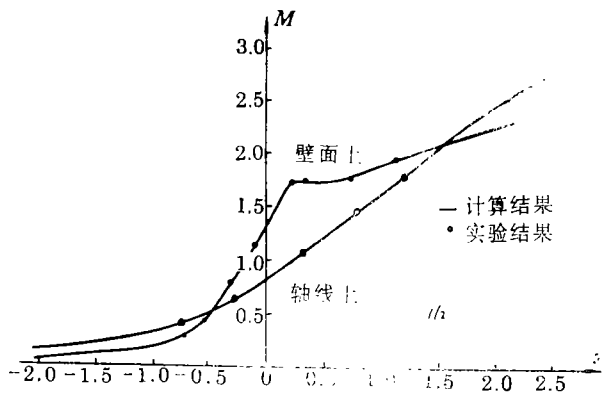


图3 壁面和轴线上马赫线分布

性。但人们为了简化计算，常采用颗粒平均尺寸。本文将颗粒尺寸分成五个等级分组进行计算，取半径为  $5\mu$ ,  $10\mu$ ,  $12\mu$ ,  $15\mu$ ,  $20\mu$ , 各占总质量百分数30%

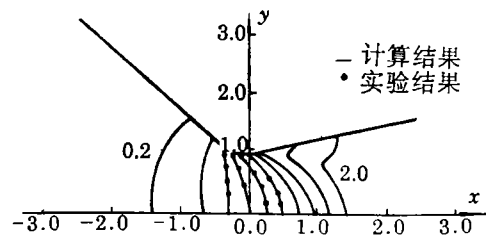


图4 等马赫数分布

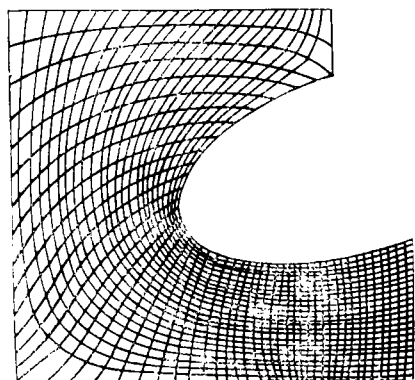


图5 网格分布

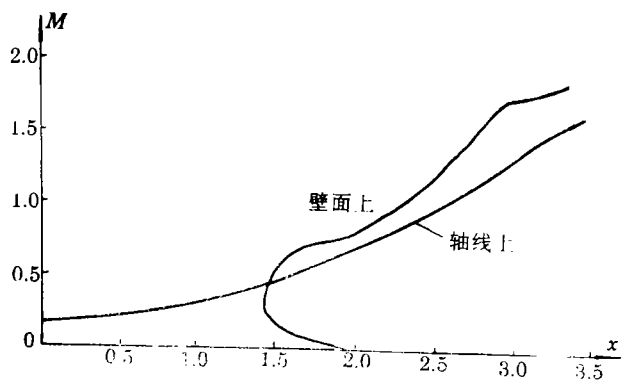


图6 壁面和轴线上马赫线分布

的1/5。相应的加权平均半径  $\bar{r}_{43} = 12.4\mu$ 。按颗粒尺寸分级和按加权平均半径计算，喷管流场的差别很明显。首先，按颗粒尺寸分五级计算时，颗粒的极限流线有五条，最外的极限流线由最小的颗粒确定，由它所确定的无粒子区一定比按加权平均颗粒半径计算的小。其次，温度分布不同，按加权平均颗粒半径计算的气相温度，在中心区附近高于按颗粒尺寸分级计算的气相温度(图12)。第三，按两种情况计算的推力不同。对所计算的喷管，按平均颗粒尺寸计算的推力偏低(是否具有普遍性，尚待研究)。

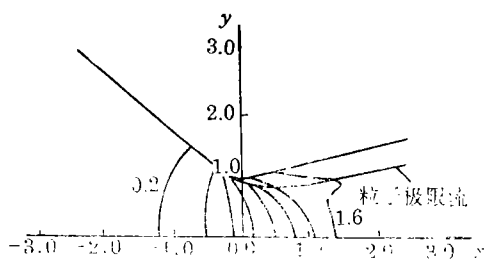


图7 颗粒半径  $r=2\mu$  的气流等马赫线分布

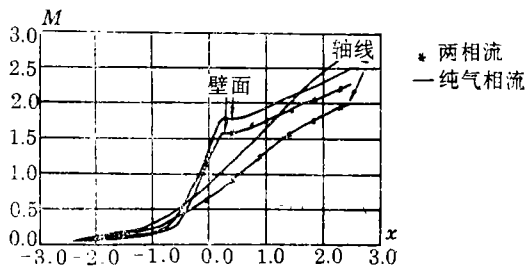


图8 纯气相流和两相流时轴线和壁面上气流马赫数的分布

图13表示粘性对流场的影响。为了进一步分辨壁面附近粘性的影响，对纯气相和颗粒质量百分数为30%而颗粒半径分别为  $2\mu$ ,  $20\mu$  的喷管流场进行了计算。结果如图14所示。由图可见，与纯气相流相比，颗粒的存在，使气流在壁面附近的速度分布陡峭程度变小，即气流与

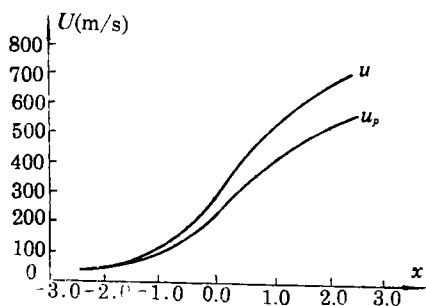


图9 颗粒半径  $r=2\mu$  时气体和颗粒在轴线上的速度分布

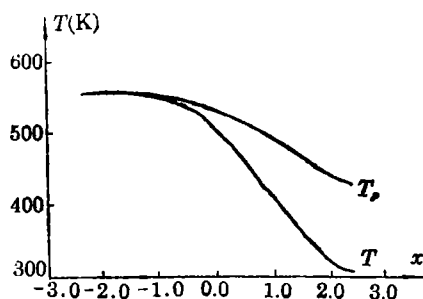


图10 颗粒半径  $r=2\mu$  时气体和颗粒在轴线上的温度分布

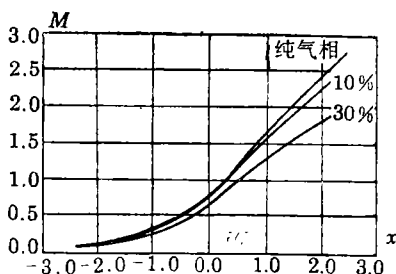


图11 纯气相流、颗粒质量百分数为10%和30%，三种情况下轴线上的气流马赫数分布

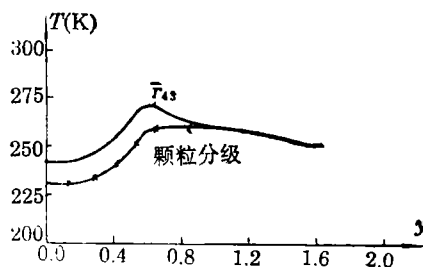


图12 喷管出口截面上气相温度分布

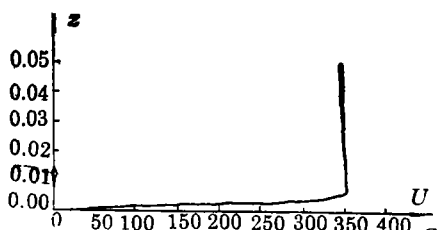


图13 喉部截面上沿壁面法向的轴向速度分布

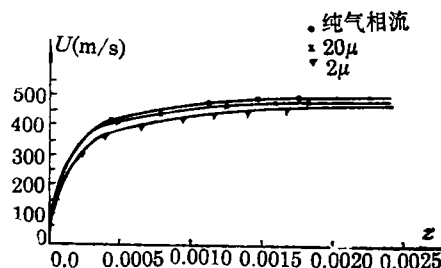


图14 喉部截面壁面附近轴向速度分布

壁面的摩擦力减小，且颗粒越小，摩擦力减小越多。这与实验研究相符合，人们把这种现象称为汤姆生效应<sup>[13]</sup>。

本文还将计算程序应用于实际的大型固体火箭发动机计算，结果如表1所示。

表1 发动机的比冲、推力的计算和试验比较

	推力(N)	推力相对误差	比冲(N·s/kg)	比冲相对误差
实 测	21819.9		$I=2321.93$	
一维两相平衡	24007.4	10.03%	$I_L=2549.36$	9.79%
二维两相平衡无粘	23402.6	7.25%	$I_A=2494.68$	7.64%
二维两相无粘	23069.7	5.73%	$I_B=2382.50$	2.61%
二维两相平衡湍流	22912.9	5.01%	$I_C=2450.31$	5.33%
二维两相湍流	22536.9	3.29%	$I_E=2340.77$	0.81%

由表1所作的计算可见，二维两相湍流预示计算最精确。此外，虽然实际发动机喷管的流动过程非常复杂，但主要影响其流动特性的因素为二维、两相和粘性效应。我们分别定



二维径向比冲损失 $\Delta I_D$ 、两向流比冲损失 $\Delta I_P$ 、粘性比冲损失 $\Delta I_V$ 、发动机总比冲损失 $\Delta I$ 、喷管总比冲损失 $\Delta I_N$ 如下:

$$\left. \begin{aligned} \Delta I_D &= I_L - I_A, \quad \Delta I_P = I_C - I_B, \quad \Delta I_V = I_A - I_C \\ \Delta I &= I_L - I, \quad \Delta I_N = I_L - I_E \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

则喷管流动过程造成的损失占发动机总损失的百分数为 $\Delta I_N/\Delta I=87.3\%$ 。两相流损失占喷管损失的百分数为 $\Delta I_P/\Delta I_N=52.5\%$ ，二维径向损失占喷管损失的百分数为 $\Delta I_D/\Delta I_N=26.2\%$ ，粘性损失占喷管损失的百分数 $\Delta I_V/\Delta I_N=21.3\%$ ，由此可见喷管二维二相粘流计算的重要性。

## 五、结 论

1. 对两相粘流的气相控制方程进行薄层简化，即可准确地获得核心流场，又可计入粘性作用。这种将喷管核心区和近壁区进行统一描述的方法与求解无粘流加边界层修正的方法相比，不需匹配条件，并可用统一的格式进行计算；与求解完整的N-S方程相比，又可以节省计算机存储单元和机时。

2. 用隐式近似因子分解格式计算薄层N-S方程是成功的。解Euler方程，CFL数可取至7左右，对解湍流，CFL数可取至500左右。对于不同的问题存在着使收敛速度最快的最佳CFL数。采用隐式计算格式大大加快了收敛速度。为了比较，图15示出了用本文的方法对颗粒半径为 $1\mu$ ，质量百分数为30%的二相粘性喷管计算的收敛史，约80次收敛。而文献[1]计算同样的问题，迭代300次方可收敛。

3. 对颗粒分级的两相粘流，用隐式时间相关法和轨道法相结合的计算方法是有效的。隐式近似因子分解法用于两相流计算，与计算纯气相流相比，在相同的条件下，稳定性几乎不受影响，即在相同的网格下，可以取相同的CFL数。因此，对颗粒分级的计算而言，更有效地节省了机时。

4. 程序经考核，准确度高。适应性强，省机时，可供工程设计使用。

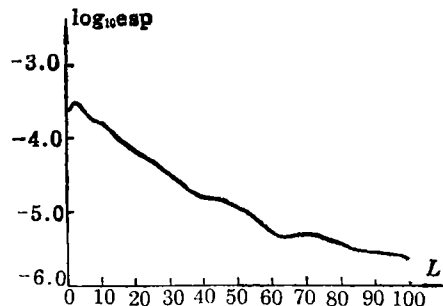


图15 收敛史

## 参 考 文 献

- [1] Shang, I. S., One- and Two-Phase Nozzle Flows, AIAA 80-272.
- [2] 方丁酉, 用时间相关法计算跨音速流场, 空气动力学学报, (2) (1985).
- [3] Beam, R. M. and R. F. Warming, An implicit finite different algorithms for hyperbolic systems in conservation law form, *J. Comput. Phy.*, 22 (1976).
- [4] Dash, S. M., D. E. Wolf, R. A. Bedding and H. S. Pergament, Analysis of two-phase flow processes in rocket exhaust plumes, *J. Spacecraft Rockets*, 22(3) (1985).
- [5] Coakley, T. J. and J. M. Champeny, Numerical Simulation of Compressible, Turbulent, Two-Phase Flow, AIAA 85-1666.

- [6] 方丁酉, 两相跨音速喷管流动, 宇航学报, (3) (1987).
- [7] Steger, J. L., Implicit finite different simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries, *AIAA J.*, 16(7) (1978).
- [8] 张涵信、余楚泽、陆林生、马占奎, 超音速、高超音速粘性气体分离流动的数值解法, 力学学报, (4)(1981).
- [9] Barger, M. E., Performance Prediction for Solid Rocket Motor Using a Particle Size Change Model, AIAA 81-1577.
- [10] Baldwin, B. S. and H. Lomax, Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows, AIAA 78-257.
- [11] Brown, E. F. and G. L. Hamilton, A survey of methods for exhaust-nozzle flow analysis, *J. Aircraft*, 13(1) (1976).
- [12] Hwang, C. J. and G. C. Chang, Numerical steady of gas particle flow in a solid rocket nozzle, *AIAA J.*, 26(6) (1988).
- [13] 张远君译, 《气体—颗粒流基础》, 国防工业出版社 (1986).

## An Implicit Algorithm of Thin Layer Equations in Viscous, Transonic, Two-Phase Nozzle Flow

He Hong-qing Hou Xiao Cai Ti-min Wu Xin-ping

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

### Abstract

Omitting viscosity along flow direction, we have simplified the dimensionless N-S equations in arbitrary curved coordinate system as the thin layer equations. Using the implicit approximate-factorization algorithm to solve the gas-phase governing equations and the characteristic method to follow the tracks of the particles, we then obtained the full coupled numerical method of the two-phase, transonic, turbulent flow. Hence, the particle size may be grouped, the subsonic boundary condition at the entry of nozzle is treated by quasi-characteristic method in reference plane and the algebraic model is used for the turbulent flow. These methods are applied in viscous two-phase flow calculation of rocket nozzle and in the prediction of thrust and specific impulse for solid propellant rocket motor. The calculation results are in good agreement with the measurement values. Moreover, the influences of different particle radius, different particle mass fraction and particle size grouped on flow field have been discussed, and the influence of particle, two-dimensional radial velocity component and viscosity on specific impulse of rocket motor have been analysed.

The method employed in this paper possesses the advantage of saving computer time. More important, the effect of the calculation of particle size being grouped is more obvious.

**Key words** thin layer equations, two-phase viscous transonic nozzle flow, implicit algorithm