

高阶球形涡的一般性质及 三阶球形涡的混沌现象*

是长春 黄永念 叶 弋 江 涛

(北京大学力学系, 1992年11月4日收到)

摘 要

讨论了 n 阶球形涡的一般性质, 找到了一族分布在同心球面上的周期轨道的代数表达式, 讨论了不动点的分布和流动的对称性. 对叠加的三阶球形涡进行了数值计算, 结果表明: 在Poincaré截面上, 伴随着岛形规则区, 出现了不同程度的浑沌(Lagrange湍流)区, 观察到了并分析了规则区和浑沌区随特征参数的变化而出现的一些有趣的现象.

关键词 Beltrami 流动 球形涡 一般性质 Poincaré 截面 混沌轨道 规则岛
数值计算

一、引 言

Beltrami流动可在特定条件下存在于湍流流场中某一局部区域内, 这是Moffatt^[1]最早提出的猜想, 并已得到一些人的支持^[2]. 从理论上讲, 因我们已找到了始终约束在某一有界区域之内的Beltrami流动的解(例如球形涡)^[3], 而且Beltrami流动满足线性方程^[4], 故很容易作无量纲化处理并使此Beltrami流动完全限制在流场中指定区域之中, 只要此局部区域粘性作用很小, 而且处于相对定常状态, 这类Beltrami流动就确实可能存在.

本文讨论Beltrami流动的一类特解—— n 阶球形涡^[5]——的一般特性. 对三阶球形涡进行了数值计算, 在其Poincaré截面上, 发现了一些涉之规则区和浑沌(Lagrange湍流)区的新而有趣的现象, 我们对它们作了相应的解释.

二、 n 阶球形涡的一般性质

在[3]中, 我们已给出了 n 阶基本球形涡的速度场, 此球形涡以 e_3 (x_3 轴向)为极轴方向, A 为强度, 各层涡球面的半径 $R=R_m^*(n)$ ($m=1, 2, \dots$)是 $(n+1/2)$ 阶第一类Bessel函数的零点:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(R)=0$$

* 朱照宣推荐.
国家基础研究项目 <非线性科学>基金资助课题

将极轴方向为 $e_i (i=1, 2, 3, \dots)$ (x_i 轴向), 强度分别为 $C_i (i=1, 2, 3)$ 的三个基本球形涡的速度场叠加后, 仍得到 Bltrami 流动, 且各层球形涡面 (流面) 的半径均未变, 其速度分布 (轨道方程) 是:

$$\dot{x}_i = g(R)\eta_i - C_i h(R)(1 - \eta_i^2)P'_n(\eta_i) + h(R)\eta_i [C_j \eta_j P'_n(\eta_j) + C_k \eta_k P'_n(\eta_k)] + q(R) [C_j \eta_k P'_n(\eta_j) - C_k \eta_j P'_n(\eta_k)] \quad (2.1)$$

其中

$$\dot{x} = dx_i/dt, (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$

$$g(R) = n(n+1)R^{-\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(R) \sum_{i=1}^3 C_i P_n(\eta_i)$$

$$h(R) = R^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{n}{R} J_{n+\frac{1}{2}}(R) - J_{n-\frac{1}{2}}(R) \right]$$

$$q(R) = R^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(R)$$

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$P_n(\eta)$ 为第一类 n 阶 Legendre 函数, $n=1, 2, \dots$; $P'_n(\eta) = dP_n(\eta)/d\eta$, $J_\nu(R)$ 为 ν 阶第一类 Bessel 函数,

$$\eta_i = \frac{x_i}{R}$$

2.1 周期轨道

我们发现: n 阶球形涡 (2.1) 式有一类特殊的周期轨道族, 它们是以上两种曲面的交截线:

$$\sum_{m=1}^3 C_m P_n(\eta_m) = 0 \quad (2.2)$$

$$nJ_{n+\frac{1}{2}}(R) - RJ_{n-\frac{1}{2}}(R) = 0 \quad (2.3)$$

(2.3) 式是一系列同心球面, (2.2) 式是 n 次代数曲面, 将 (2.2) 和 (2.3) 代入 (2.1) 式可以使轨道方程化简.

2.2 不动点

当 $n > 1$ 时球心 $R=0$ 总是一个不动点, 下面讨论 $R > 0$ 的不动点. 不难证明, 各层涡球面上的不动点由以下方程组决定, 这里 $\phi_i \equiv C_i P'_n(\eta_i) (i=1, 2, 3)$

$$J_{n+\frac{1}{2}}(R) = 0 \quad (2.4a)$$

$$[\eta_k \eta_i q(R) - \eta_j h(R)] \phi_i + [\eta_i \eta_k q(R) + \eta_j h(R)] \phi_j - (1 - \eta_k^2) q(R) \phi_k = 0 \quad (2.4b)$$

而如果在涡球面 ((2.4a) 式) 外还有其它不动点, 则 $C_i (i=1, 2, 3)$ 之间必须满足特殊的关系, 即不动点的坐标 (η_1, η_2, η_3) 除满足 (2.4b) 外, 还需满足下面的方程:

$$\sum_{i=1}^3 C_i P_n(\eta_i) = 0 \quad (2.5)$$

而且仅当 $C_i (i=1, 2, 3)$ 选特殊值使 (2.4) 和 (2.5) 同时满足时, 通过球心且方向余弦等于 (2.4b) 和 (2.5) 之解 (η_1, η_2, η_3) 的整条直线上所有点都是不动点. 否则, 除球心和各层涡球面上满足 (2.4a), (2.4b) 的那些不动点外, 别无其它不动点, 不动点都是鞍点.

2.3 对称性

(一) $n=2m(m=1, 2, \dots)$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(x_i, x_j, x_k) &= \dot{x}_i(x_i, -x_j, -x_k) = -\dot{x}_i(-x_i, -x_j, x_k) \\ &= -\dot{x}_i(-x_i, x_j, -x_k) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(二) $n=2m-1(m=1, 2, \dots)$

当 $C_i=0$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i(x_i, x_j, x_k) &= -\dot{x}_i(x_i, -x_j, -x_k) \\ \dot{x}_j(x_i, x_j, x_k) &= \dot{x}_j(x_i, -x_j, -x_k) \\ \dot{x}_k(x_i, x_j, x_k) &= \dot{x}_k(x_i, -x_j, -x_k) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

三、三阶球形涡

将 $n=3$ 代入以上各式即得三阶球形涡的相应公式, 为方便讨论计, 我们设 $C_i(i=1, 2, 3)$ 中有一为零, 不失普遍性, 无妨取

$$n=3, C_1=B(0 \leq |B| \leq 1), C_2=0, C_3=1 \quad (3.1)$$

当 $B=0$ 时, 得到三阶基本球形涡, 它是可积系统, 涡球面 $R=R_{*}^{(1)}$ 内包含三族绕极轴 e_3 的涡管(流管), 每族涡管从大到小一层套一层, 最里面是一条中心涡丝. 当 $B \neq 0$ 时系统(2.1)不可积, Poincaré 截面图上出现规则区(岛形)和混沌区(详后).

由(2.2), (2.3)得周期轨道方程式:

$$B\xi_1(5\xi_1^2-3) + \xi_3(5\xi_3^2-3) = 0 \quad (3.2a)$$

$$\tan R = \frac{3R(15-2R^2)}{45-21R^2+R^4} \quad (3.2b)$$

其中

$$\xi_i = x_i/R, R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (3.3)$$

(3.2b) 的按次序第一正根是 $R=R_{**}^{(1)} = 4.973420$ 正好在第一层涡球面 $R_{*}^{(1)} = 6.987932$ 里面.

当 $|B| \neq 1$ 时, 每一层涡球面 ($R=R_{*}^{(m)}(m=1, 2, \dots)$) 上都有14个不动点, 除了还有球心 ($R=0$) 外, 再无其它不动点, 而当 $B = \pm 1$ 时, 通过球心各有6条直线, 在它上面全是不动点, 除此之外, 在每一层涡球面上, 还有另外8个不动点.

上述不动点全是双曲型(鞍点)的.

四、数值计算结果和讨论

对 $B=0.1, 0.2, 0.4, 0.9, 1.0$ 及某些特征值的三阶球形涡的轨道进行了数值计算, 在 $\phi=0^\circ$ 和 90° 两个平面上计算了相应的 Poincaré 映射图. 有若干分散的岛形规则区, 它对应于涡管和它上面缠绕着的周期轨道或准周期轨道. 规则区被随机地散布着的且连成一片的混沌区所包围, B 值小时, 混沌区也小, B 增大时, 混沌区亦随之扩大. 在 $B=1$ 即不等于零的两个强度参数相等的临界条件下, 出现了数量很多但面积很小的岛形区, 包括一些很扁很长的岛形区, 其周围则是大片的混沌区, 这表明大部分流场已成为混沌区, 而剩下的规则区则被扭曲, 压扁得很厉害了. 另外, 只要 $B \neq 0$, 在规则区附近还经常可看到夹杂着一些散

乱点子的“随机层”的存在。

在规则区，涡管从大到小一层套一层，在 Poincaré 截面上看到的是一圈套一圈，我们看到各圈点子疏密明显不同，这反映出随着某个位置参数的改变，绕数也相应地变化着，因而有理数、无理数交替出现，前者对应于共振轨道(交点稀)，后者对应于 KAM 环面上的准周期轨道(交点密)。

在各种 Poincaré 截面中，可明显地看到点子分布有某种对称性，规则区和混沌区都对称地出现，和 (2.7) 式预言的情形完全一致，考虑到 Poincaré 截面上的点子全是用数值计算办法一点接着另一点画出来的，并未利用对称性作图，这从一个侧面反映出我们的数值计算的可靠性。

在 $B=0.30, 0.306, 0.4026, 0.4187$ 这四种情形的 $\phi=90^\circ$ Poincaré 截面上出现了如下的图形变化： $B=0.30$ 时，位于规则区的一条轨道在截面上形成轮廓分明的两个分开的窄长圈，

当 $B=0.306$ 时，这两个圈的腰部已很细，接近于形成四个圈，并且每个圈周围都有随机层，即圈的轮廓较模糊，有扩大趋势；当 $B=0.4187$ 时，上述四个圈已扩大，而且其周围的随机层增厚了。从以上随参数 B 的变化而使轨道发生的变化中，可以明显地看到周期倍岔(但只看到一次)以及由锁频通向混沌的转变过程。

我们还发现一种有趣的现象：当 $B \approx 0.054$ 时，在 Poincaré 截面上本来分开的内外两层封闭曲线(涡管截面)在一点(三维空间的一条封闭曲线)上互相内切，当 B 继续增加时，这内外两层闭环沿切点裂开溶合成为新月形的一个新的闭环，而本来被套在内环内部的一些更小的环则脱落到外面来了，见图 1。

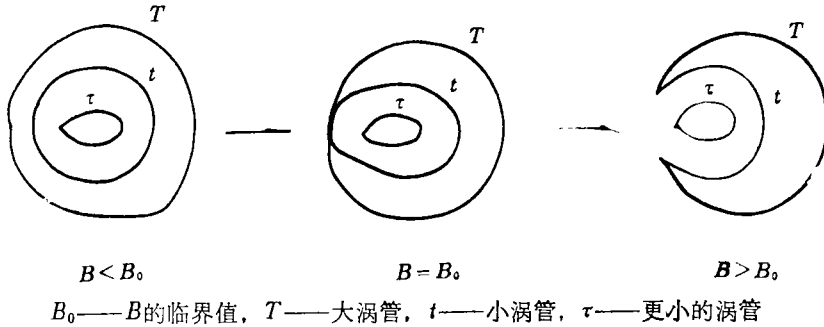


图 1

试解释此现象如下：我们知道，Beltrami 流动中每个涡管是由一条或数条涡丝反复缠绕形成的， T 和 t 两层涡管上的涡丝缠绕方向本来 ($B < B_0$ 时) 是相反的，当 $B = B_0$ 时， T 涡管和 t 涡管内切闭曲线 Γ 上，且 T 和 t 两涡管上的各自的准周期轨道(涡丝)和 Γ 相交于一系列公共点 A_2, A_4, A_6, \dots 上，当 $B = B_0 + \epsilon$ ($|\epsilon| \ll 1, \epsilon > 0$) 时，每条涡丝在 A_{2m} 处裂开为 A_{2m} 和 A'_{2m} ($m = 1, 2, \dots$) 两个无限接近的点，并重联成为同一新涡管(其截面呈新月型)上的两条缠绕在一起而又不相交的两条涡丝，如图 2 所示，为方便观察，将 t 涡管画到 T 涡管外面来了。

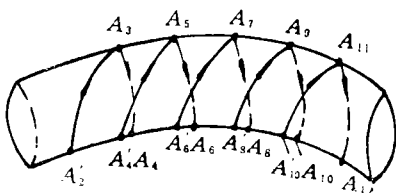


图 2 T 涡管

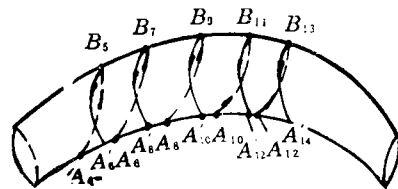
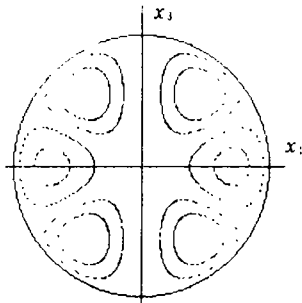


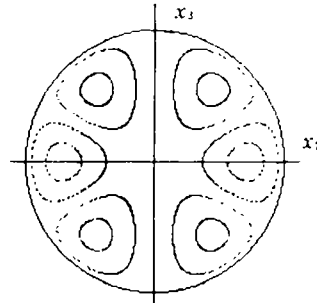
图 3 t 涡管

涡丝重联后，一条新涡丝是：

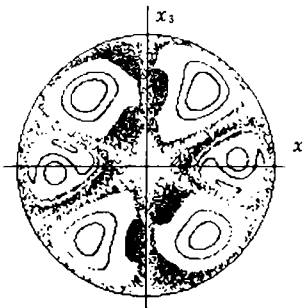
$$\overbrace{A'_2 A_3 A_4} - \overbrace{A_4 B_5 A'_6} - \overbrace{A'_6 A_7 A_8} - \overbrace{A_8 B_9 A'_{10}} - \overbrace{A'_{10} A_{11} A_{12}} - \overbrace{A_{12} B_{13} A'_{14}} - \dots$$



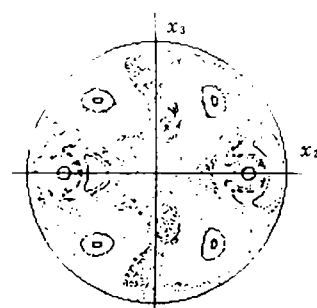
Poincaré 截面: $\phi = 0^\circ$
 $A=1, B=0, C=0$



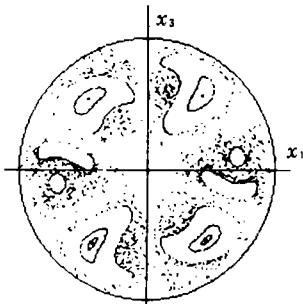
Poincaré 截面: $\phi = 90^\circ$
 $A=1, B=0, C=0$



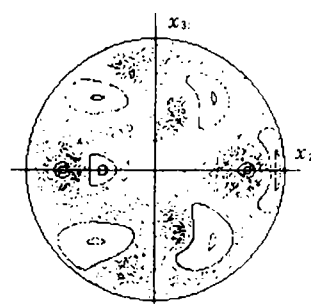
Poincaré 截面: $\phi = 0^\circ$
 $A=1, B=0.1, C=0$



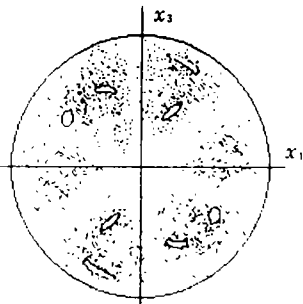
Poincaré 截面: $\phi = 90^\circ$
 $A=1, B=0.1, C=0$



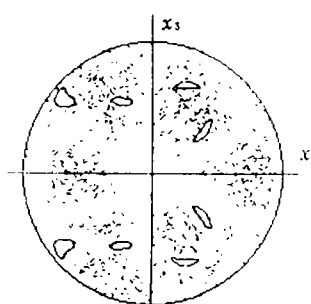
Poincaré 截面: $\phi = 0^\circ$
 $A=1, B=0.2, C=0$



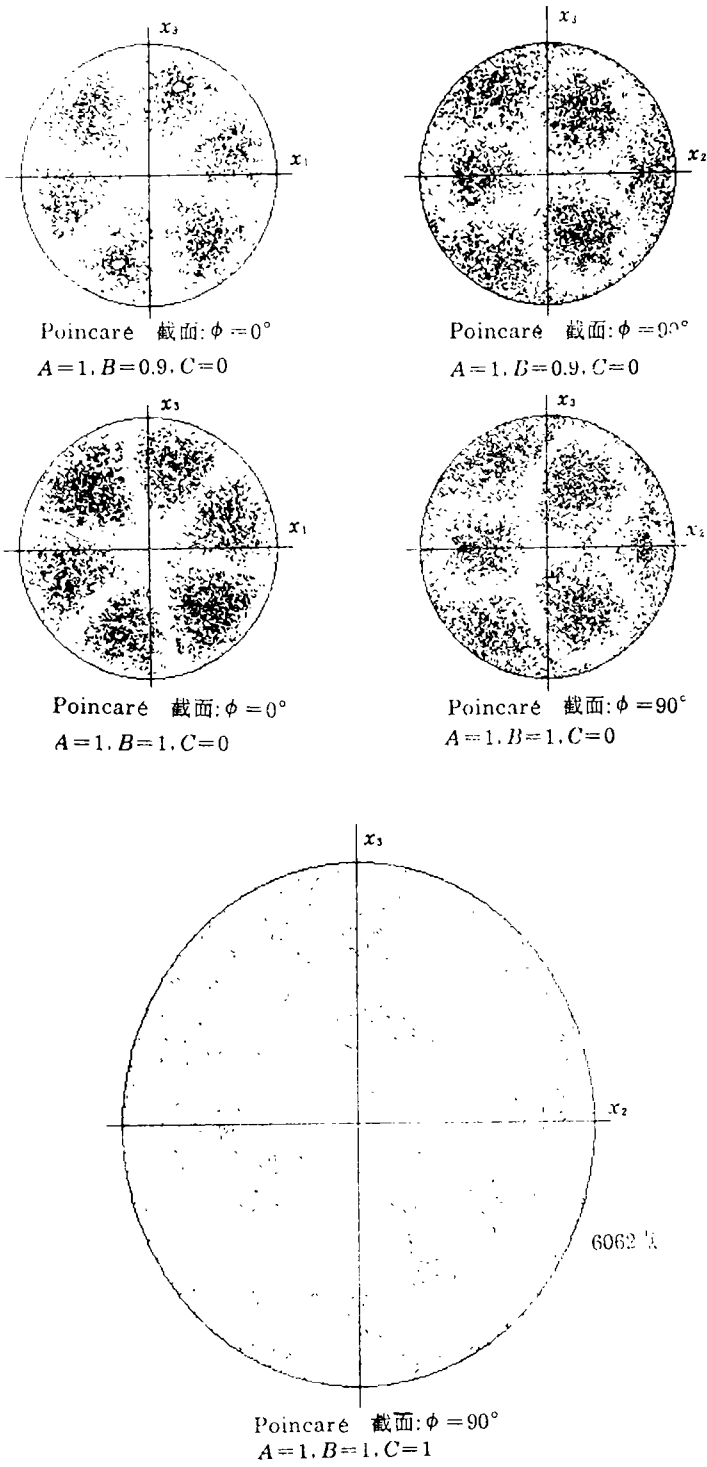
Poincaré 截面: $\phi = 90^\circ$
 $A=1, B=0.2, C=0$



Poincaré 截面: $\phi = 0^\circ$
 $A=1, B=0.4, C=0$



Poincaré 截面: $\phi = 90^\circ$
 $A=1, B=0.4, C=0$



注:图中参量A,B,C即文中 C_1, C_2, C_3

图 4

另一条新涡丝是:

$$\overbrace{A'_4 A_5 A_6} - \overbrace{A_6 B_7 A'_8} - \overbrace{A'_8 A_9 A_{10}} - \\ \overbrace{A_{10} B_{11} A'_{12}} - \overbrace{A'_{12} A_{13} A_{14}} - \overbrace{A_{14} B_{15} A'_{16}} - \dots$$

这两条涡丝交替缠绕在同一根合并后形成的新涡管上, 缠绕方向同 T 涡管上的原来涡丝方向, 这一新涡管的截面呈新月形.

这一特殊现象也是锁相的一种特殊形式, 它是当参数 B 变化时在 Poincaré 截面上形成的.

参 考 文 献

- [1] Moffatt, H.K., Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology, Part 1, Fundamentals, *J.F.M.*, 159 (1985), 359.
- [2] She Zhen-su, et al., Vortex dynamics and intermittency in turbulence, *Non-linear World* (in two Vols.), Ed. by V.G. Baryakhtar et al., World Scientific (1990).
- [3] Shi Chang-chun, Huang Yong-nian, Zhu Zhao-xuan, Su Wei-dong and Dong Yu-fei, Chaotic phenomena produced by the spherical vortices in the Beltrami flows, *Chinese Physics Letters*, 9(10) (1992), 515.
- [4] Shi Chang-chun and Huang Yong-nian, Some properties of three-dimensional Beltrami flows, *Acta Mechanica Sinica*, 7(4) (1991), 289.
- [5] Shi Chang-chun, Huang Yong-nian and Chen Yao-song, On the Beltrami flows, *Acta Mechanica Sinica*, 8(4) (1992), 289.

The General Properties of the Spherical Vortices (SV) of n -th Order and the Chaotic Phenomena and of the Ordered Structures of the SV of 3rd Order

Shi Chang-chun Huang Yong-nian Ye Yi Jiang Tao

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

The general properties of the spherical vortices (SV) of n -th order are discussed in this paper. Numerical calculations are carried out in the case of $n=3$. We find out some interesting phenomena concerning the chaotic regions and ordered islands on the Poincaré sections. Interpretations of these phenomena are also given.

Key words Beltrami flow, spherical vortex, general-properties, Poincaré section, chaotic trajectory, ordered island, numerical calculation