应用数学和力学，第 15 卷第 4 期（1994年 4 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

周边固支强厚度叠层开口圆柱壳的精确解*

范家让　　丁克伟

（合肥工业大学）　　（合肥 安徽建筑工业学院）

（何福保推荐，1992年12月10日收到）

摘　要

抛弃任何有关应力或位移模式的人为假设，在文献[1]、[2]的基础上，引入 δ-函数，对周边固支叠层开口柱壳建立其状态方程。给出薄的、中厚的和强厚的叠层开口柱壳统一的精确解。

关键词　周边固支叠层开口柱壳　状态方程　精确解

一、引　　言

当今各家板壳理论都以一定的假设为前提，例如假设力学量是某一坐标变量的多项式。笔者已证明各力学量的真解不可能是任何坐标变量的多项式，若以多项式的假设为前提，必导

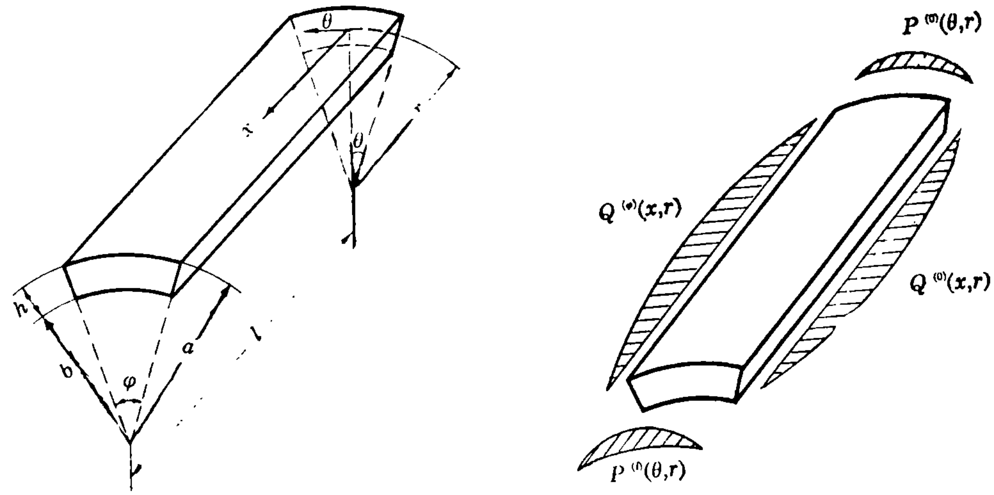


图1　周边固支单层圆柱壳

致方程之间的互不相容。这正是当今各家理论的误差根源。此类误差将随板壳厚度增加而剧增，这就使这些理论在求解强厚度板壳时全部失效。特别是具有非简支边的强厚度板壳，不少学者认为是不可能得到精确解析解的。本文在文献[1]、[2]的基础上，引入单位脉冲函数

* 国家自然科学基金资助项目

和δ-函数，给出周边固支强厚度叠层开口柱壳的精确解。

二、周边固支单层开口圆柱壳的状态方程

图1(a)所示为一周边固支正交异性圆柱壳，坐标轴沿弹性主方向，顶面受荷载 $q(x,\theta)$ 作用。现将固支边变为简支边，并加上原固支边的反力，则图1(a)和图1(b)等价。

引入单位脉冲函数，其定义为

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x=0\text{时}\\ 0, & \text{当}x\neq0\text{时}\end{cases}\qquad H(x-x_0)=\begin{cases}1, & \text{当}x=x_0\text{时}\\ 0, & \text{当}x\neq x_0\text{时}\end{cases}\qquad x\in[0,x_0]$$

根据上面的定义，有

$$\frac{dH(x)}{dx}=-\delta(x)=\begin{cases}-\infty & \text{当}x=0\text{时}\\ 0 & \text{当}x\neq0\text{时}\end{cases}$$

$$\frac{dH(x-x_0)}{dx}=\delta(x-x_0)=\begin{cases}\infty & \text{当}x=x_0\text{时}\\ 0 & \text{当}x\neq x_0\text{时}\end{cases}$$

$\delta(x)$和$\delta(x-x_0)$称为Dirac函数。令

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\bar{\sigma}_x+H(x)P^{(0)}(\theta,r)+H(x-l)P^{(l)}(\theta,r)\\ \sigma_\theta&=\bar{\sigma}_\theta+H(\theta)Q^{(0)}(x,r)+H(\theta-\varphi)Q^{(\varphi)}(x,r)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

把(2.1)式代入柱坐标系下的平衡方程，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{\sigma}_x}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{x\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial r}+\frac{\tau_{rx}}{r}=\delta(x)P^{(0)}-\delta(x-l)P^{(l)}\\ &\frac{\partial\tau_{x\theta}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\sigma}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=\frac{1}{r}[\delta(\theta)Q^{(0)}-\delta(\theta-\varphi)^{(\varphi)}]\\ &\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\bar{\sigma}_\theta}{r}=\frac{1}{r}[H(\theta)Q^{(0)}+H(\theta-\varphi)Q^{(\varphi)}]\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

方程(2.2)与常规的平衡方程相比可见，若把(2.2)式右端项设想为体积力，则对应的正应力场为$\bar{\sigma}_x$和$\bar{\sigma}_\theta$。

将应变—位移关系代入应力—应变关系，得

$$\begin{Bmatrix}\bar{\sigma}_x\\ \bar{\sigma}_\theta\\ \sigma_r\\ \tau_{r\theta}\\ \tau_{rx}\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\ C_{12}&C_{22}&C_{23}&0&0&0\\ C_{13}&C_{23}&C_{33}&0&0&0\\ 0&0&0&C_{44}&0&0\\ 0&0&0&0&C_{55}&0\\ 0&0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta}+\dfrac{W}{r}\\ \dfrac{\partial W}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W}{\partial\theta}+\dfrac{\partial V}{\partial r}-\dfrac{V}{r}\\ \dfrac{\partial U}{\partial r}+\dfrac{\partial W}{\partial x}\\ \dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial\theta}\end{Bmatrix}\tag{2.3}$$

记$\alpha=\partial/\partial x$, $\beta=\partial/\partial\theta$, $\sigma=\sigma_r$, $X=\tau_{rx}$, $\Theta=\tau_{r\theta}$, 并令

$$C_1=-\frac{C_{13}}{C_{33}},\quad C_2=C_{11}-\frac{C_{13}^2}{C_{33}},\quad C_3=C_{12}-\frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}},\quad C_4=C_{22}-\frac{C_{23}^2}{C_{33}}$$

$$C_5=-\frac{C_{23}}{C_{33}},\quad C_6=C_{66},\quad C_7=\frac{1}{C_{33}},\quad C_8=\frac{1}{C_{55}},\quad C_9=\frac{1}{C_{44}}$$

在(2.2)和(2.3)两式中消去$\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_\theta$和$\tau_{x\theta}$后，得

$$\frac{\partial}{\partial r}[U\ V\ \sigma\ X\ \Theta\ W]^T=\bar{D}(r)[U\ V\ \sigma\ X\ \Theta\ W]^T+\bar{B} \tag{2.4}$$

其中

$$\bar{D}(r)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\alpha \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & C_9 & -\frac{\beta}{r} \\ \frac{C_3}{r}\alpha & \frac{C_4}{r^2}\beta & -\frac{C_5+1}{r} & -\alpha & -\frac{\beta}{r} & \frac{C_4}{r^2} \\ -C_2\alpha^2-\frac{C_6}{r^2}\beta^2 & -\frac{C_3+C_6}{r}\alpha\beta & C_1\alpha & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{C_3}{r}\alpha \\ -\frac{C_3+C_6}{r}\alpha\beta & -C_6\alpha^2-\frac{C_4}{r^2}\beta^2 & \frac{C_5}{r}\beta & 0 & -\frac{2}{r} & -\frac{C_4}{r^2}\beta \\ C_1\alpha & \frac{C_5}{r}\beta & C_7 & 0 & 0 & \frac{C_5}{r} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=\Big[0\quad 0\quad \frac{1}{r}(H(\theta)Q^{(0)}+H(\theta-\varphi)Q^{(\varphi)})\quad \delta(x)P^{(0)}-\delta(x-l)P^{(l)}$$
$$\frac{1}{r}(\delta(\theta)Q^{(0)}-\delta(\theta-\varphi)Q^{(\varphi)})\quad 0\Big]^T$$

而被消去的$\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_\theta$和$\tau_{x\theta}$可由下式求出:

$$\begin{Bmatrix}\bar{\sigma}_x\\ \bar{\sigma}_\theta\\ \tau_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} C_2\alpha & \frac{C_3}{r}\beta & -C_1 & \frac{C_3}{r}\\ C_3\alpha & \frac{C_4}{r}\beta & -C_5 & \frac{C_4}{r}\\ \frac{C_6}{r}\beta & C_6\alpha & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U\\ V\\ \sigma\\ W\end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

取

$$\left.\begin{aligned} U&=\sum_m\sum_n U_{mn}(r)\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi},\quad V=\sum_m\sum_n V_{mn}(r)\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\theta}{\varphi}\\ \sigma&=\sum_m\sum_n \sigma_{mn}(r)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi},\quad X=\sum_m\sum_n X_{mn}(r)\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\\ \Theta&=\sum_m\sum_n \Theta_{mn}(r)\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\theta}{\varphi},\quad W=\sum_m\sum_n W_{mn}(r)\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

考虑(2.1), (2.5), (2.6)三式不难看到，在$x=0$, l处，σ_x分别等于$P^{(0)}$和$P^{(l)}$，且有$W=V=0$; $\theta=0$, φ处，σ_θ分别等于$Q^{(0)}$和$Q^{(\varphi)}$，且有$W=U=0$. 剩下尚需满足的边界条件有

$$\left.\begin{array}{ll} U=0, & \text{在}x=0,\ l\text{处} \\ V=0, & \text{在}\theta=0,\ \varphi\text{处} \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

根据δ-函数的性质，有

$$\int_0^l \delta(x)f(x)dx=f(0),\quad \int_0^l \delta(x-l)f(x)dx=f(l)$$

将δ-函数展成余弦级数后，得

$$\delta(x)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l},\quad \delta(x-l)=\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\cos\frac{m\pi x}{l}$$

于是可取

$$\left.\begin{aligned}
\delta(x)P^{(0)}(\theta,r)&=\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi x}{l}\right)\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{(0)}(r)\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\\
\delta(x-l)P^{(l)}(\theta,r)&=\left(\frac{1}{l}+\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\cos\frac{m\pi x}{l}\right)\sum_{n=1}^{\infty}P_n^{(l)}(r)\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\\
\delta(\theta)Q^{(0)}(x,r)&=\left(\frac{1}{\varphi}+\frac{2}{\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi\theta}{\varphi}\right)\sum_{m=1}^{\infty}Q_m^{(0)}(r)\sin\frac{m\pi x}{l}\\
\delta(\theta-\varphi)Q^{(\varphi)}(x,r)&=\left(\frac{1}{\varphi}+\frac{2}{\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi\theta}{\varphi}\right)\sum_{m=1}^{\infty}Q_m^{(\varphi)}(r)\sin\frac{m\pi x}{l}
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

把(2.6)，(2.8)二式代入(2.4)式，并注意到$H(\theta-\varphi)$展成正弦级数时其付里叶系数为零，于是对于每对m-n得到

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}[U_{mn}(r)\ \ V_{mn}(r)\ \ \sigma_{mn}(r)\ \ X_{mn}(r)\ \ \Theta_{mn}(r)\ \ W_{mn}(r)]^T\\
&=\boldsymbol{D}(r)[U_{mn}(r)\ \ V_{mn}(r)\ \ \sigma_{mn}(r)\ \ X_{mn}(r)\ \ \Theta_{mn}(r)\ \ W_{mn}(r)]^T+\boldsymbol{B}_{mn}(r)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

式中

$$\boldsymbol{D}(r)=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\zeta\\
0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & C_9 & -\frac{\eta}{r}\\
-\frac{C_3}{r}\zeta & -\frac{C_4}{r^2}\eta & -\frac{C_5+1}{r} & \zeta & \frac{\eta}{r} & \frac{C_4}{r^2}\\
C_2\zeta^2+\frac{C_6}{r^2}\eta^2 & \frac{C_3+C_6}{r}\zeta\eta & C_1\zeta & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{C_3}{r}\zeta\\
\frac{C_3+C_6}{r}\zeta\eta & C_6\zeta^2+\frac{C_4}{r^2}\eta^2 & \frac{C_5}{r}\eta & 0 & -\frac{2}{r} & -\frac{C_4}{r^2}\eta\\
-C_1\zeta & -\frac{C_5}{r}\eta & C_7 & 0 & 0 & \frac{C_5}{r}
\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\zeta=\frac{m\pi}{l},\quad \eta=\frac{n\pi}{\varphi}$$

$$\boldsymbol{B}_{mn}(r)=\Big[0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{2}{l}(P_n^{(0)}(r)-(-1)^m P_n^{(l)}(r))\ \ \ \frac{2}{r\varphi}(Q_m^{(0)}(r)-(-1)^n Q_m^{(\varphi)}(r))\,0\Big]^T$$

$$(m,n\neq 0) \qquad (2.11\text{a})$$

$$\boldsymbol{B}_{mn}(r)=\Big[0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{l}\ (P_n^{(0)}\ (r)-P_n^{(l)}(r))\ \ \ 0\ \ \ 0\Big]^T\quad (m=0,n\neq 0) \qquad (2.11\text{b})$$

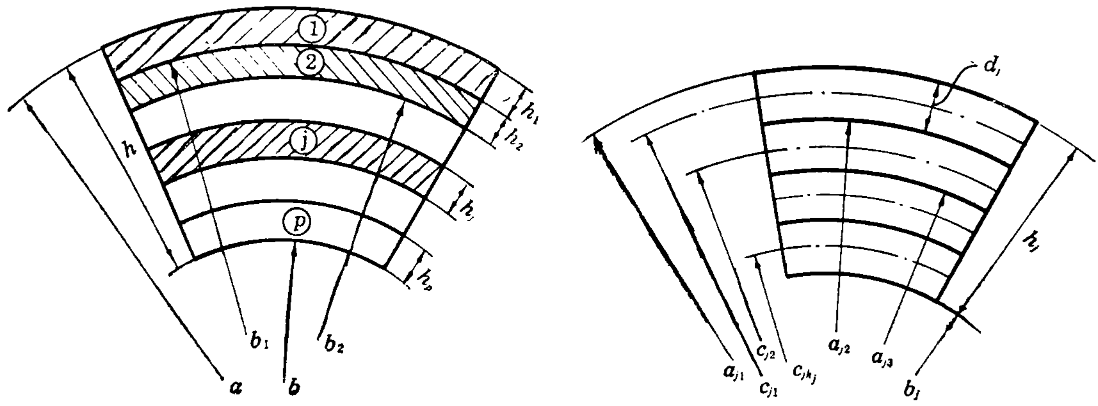
$$\boldsymbol{B}_{mn}(r)=\Big[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{1}{r\varphi}\ (Q_m^{(0)}(r)-Q_m^{(\varphi)}(r))\ \ 0\Big]^T\qquad (m\neq 0,n=0) \qquad (2.11\text{c})$$

$$\boldsymbol{B}_{mn}(r)=\{0\},\qquad (m=n=0) \qquad (2.11\text{d})$$

方程（2.9）称为变系数非齐次状态方程．通过该方程能证明各力学量不能是r的多项式．例如，若$U_{mn}(r)$，$\sigma_{mn}(r)$，$\Theta_{mn}(r)$ 是r的l次多项式，则由（2.9）式的第2，4，6三行知$V_{mn}(r)$，$X_{mn}(r)$，$W_{mn}(r)$必为r的$l+1$次多项式．若如此，由同一方程的其余三行又分别知$U_{mn}(r)$，$\sigma_{mn}(r)$，$\Theta_{mn}(r)$必为r的$l+2$次多项式，从而与原设矛盾．

三、周边固支叠层开口圆柱壳的状态方程及其解

图2(a)是一由p层正交异性材料构成的周边固支叠层圆柱壳，壳长为l，壳厚为$h(=a-b)$．图2(b)是其中第j层放大图．现将第j层等分成k_j个薄层，薄层厚度为 $d_j=h_j/k_j$，其平均半径分别用c_{j1}，c_{j2}，…，c_{jk_j} 表示．现对第一个薄层建立其状态方程．因r在薄层内变化不大，若以 c_{j1} 代替矩阵(2.10)中的变量r当不会引起较大的误差，于是由(2.9)式得其状态方程为



(a)　　　　(b)

图2　周边固支叠层圆柱壳

$$\frac{d}{dr}[U_{mn}(r)\ \ V_{mn}(r)\ \ \sigma_{mn}(r)\ \ X_{mn}(r)\ \ \Theta_{mn}(r)\ \ W_{mn}(r)]_{j1}^T$$

$$=\boldsymbol{D}_{j1}[U_{mn}(r)\ \ V_{mn}(r)\ \ \sigma_{mn}(r)\ \ X_{mn}(r)\ \ \Theta_{mn}(r)\ \ W_{mn}(r)]_{j1}^T+\boldsymbol{B}_{j1}(r) \qquad (3.1)$$

其中$\boldsymbol{D}_{j1}$中各元素为常量，它由矩阵（2.10）令其中$r=c_{j1}$而得．下标$j1$表示对第j层中的第一个薄层而言，于是有

$$\boldsymbol{B}_{j1}(r)=\Big[0\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{2}{l}(P_{nj1}^{(0)}(r)\ -(-1)^m P_{nj1}^{(l)}(r))\ \ \ \frac{2}{r\varphi}\ (Q_{mj1}^{(0)}(r)-(-1)^n Q_{mj1}^{(\varphi)}(r))\ \ \ 0\Big]^T$$

$$(m,n\neq 0) \qquad (3.2)$$

当m，n为其他情况时$\boldsymbol{B}_{j1}(r)$可仿此写出．

若叠层壳每层都很薄，只需以每层平均半径代替矩阵（2.10）中r而不必再分割.若某些层较厚，相应的k_j取何值应视粘度要求而定. 通过计算如发现分割成k_j和k_j+1个薄层时，要求保留的有效数字几乎不变，则可认为分割成k_j个薄层时得到的结果是在满足精度要求意义下的精确值. 只要薄层足够薄，有理由认为$P^{(0)}_{nj1}(r)$，$P^{(l)}_{nj1}(r)$，$Q^{(0)}_{mj1}(r)$ 和 $Q^{(\varphi)}_{mj1}(r)$ 在薄层内是线性分布的，即有

$$\left.\begin{aligned} P^{(0)}_{nj1}(r)&=A_{nj1}+\frac{A_{nj1}-A_{nj2}}{d_j}(r-a_{j1})\\ P^{(l)}_{nj1}(r)&=B_{nj1}+\frac{B_{nj1}-B_{nj2}}{d_j}(r-a_{j1})\\ Q^{(0)}_{mj1}(r)&=C_{mj1}+\frac{C_{mj1}-D_{mj2}}{d_j}(r-a_{j1})\\ Q^{(\varphi)}_{mj1}(r)&=D_{mj1}+\frac{D_{mj1}-D_{mj2}}{d_j}(r-a_{j1}) \end{aligned}\quad r\in[a_{j1},a_{j2}]\right\} \tag{3.3}$$

式中A_{nj1}，A_{nj2}，…，D_{mj2}等是线性函数在薄层端点值，它们应由边界条件来确定.

方程(3.1)的解为[3]

$$\boldsymbol{R}_{j1}(r)=\boldsymbol{G}_{j1}(r-a_{j1})\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j1})+\boldsymbol{C}_{j1}(r-a_{j1}),\qquad r\in[a_{j1},a_{j2}] \tag{3.4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{j1}(r)&=[U_{mn}(r)\ \ V_{mn}(r)\ \ \sigma_{mn}(r)\ \ X_{mn}(r)\ \ \Theta_{mn}(r)\ \ W_{mn}(r)]^T_{j1}\\ \boldsymbol{R}_{j1}(a_{j1})&=[U_{mn}(a_{j1})\ \ V_{mn}(a_{j1})\ \ \sigma_{mn}(a_{j1})\ \ X_{mn}(a_{j1})\ \ \Theta_{mn}(a_{j1})\ \ W_{mn}(a_{j1})]^T_{j1} \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{G}_{j1}(r-a_{j1})=\exp[\boldsymbol{D}_{j1}(r-a_{j1})],\quad \boldsymbol{C}_{j1}(r-a_{j1})=\int_{a_{j1}}^{r}\exp[\boldsymbol{D}_{j1}(r-\tau)]\boldsymbol{B}_{j1}(\tau)d\tau$$

为了计算$\boldsymbol{G}_{j1}(r-a_{j1})$和$\boldsymbol{C}_{j1}(r-a_{j1})$，需研究矩阵$\boldsymbol{D}_{j1}$的特征值. 设$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_6$为$\boldsymbol{D}_{j1}$的特征值，其相应的特征矢量分别用$\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，…，$\boldsymbol{V}_6$表示，则由线性代数知，必存在一个矩阵$\boldsymbol{P}_{j1}=[\boldsymbol{V}_1\ \boldsymbol{V}_2\ \cdots\ \boldsymbol{V}_6]_{j1}$及其逆阵 $\boldsymbol{P}^{-1}_{j1}$，使$\boldsymbol{D}_{j1}$变换成对角线标准型，且有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{j1}(r-a_{j1})&=\exp[\boldsymbol{D}_{j1}(r-a_{j1})]\\ &=\boldsymbol{P}_{j1}\cdot\begin{bmatrix}\exp[\lambda_1(r-a_{j1})] & & 0\\ & \exp[\lambda_2(r-a_{j1})]\ \ddots & \\ 0 & & \exp[\lambda_6(r-a_{j1})]\end{bmatrix}_{j1}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}_{j1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{C}_{j1}(r-a_{j1})\\ &=\int_{a_{j1}}^{r}\boldsymbol{P}_{j1}\cdot\begin{bmatrix}\exp[\lambda_1(r-\tau)] & & \\ & \exp[\lambda_2(r-\tau)]\ \ddots & \\ 0 & & \exp[\lambda_6(r-\tau)]\end{bmatrix}_{j1}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}_{j1}\boldsymbol{B}_{j1}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{3.7}$$

在（3.4）式中令$r=a_{j2}$，注意到$a_{j2}-a_{j1}=-d_j$，于是有

$$\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j2})=\boldsymbol{G}_{j1}(-d_j)\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j1})+\boldsymbol{C}_{j1}(-d_j) \tag{3.8}$$

上式中的$\boldsymbol{G}_{j1}(-d_j)$和$\boldsymbol{C}_{j1}(-d_j)$可分别根据(3.6)和(3.7)式所示的矩阵函数$\boldsymbol{G}_{j1}(r-a_{j1})$和$\boldsymbol{C}_{j1}(r-a_{j1})$求出.

对第二个薄层进行类似推导，可得

$$\boldsymbol{R}_{j2}(a_{j3})=\boldsymbol{G}_{j2}(-d_j)\boldsymbol{R}_{j2}(a_{j2})+\boldsymbol{C}_{j2}(-d_j) \tag{3.9}$$

根据第一和第二薄层之间的位移和应力的连续条件，必有

$$\boldsymbol{R}_{j2}(a_{j2})=\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j2})$$

考虑上式，并将（3.8）式代入（3.9）式，得

$$\boldsymbol{R}_{j2}(a_{j3})=\boldsymbol{G}_{j2}(-d_j)\boldsymbol{G}_{j1}(-d_j)\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j1})+\boldsymbol{G}_{j2}(-d_j)\boldsymbol{C}_{j1}(-d_j)+\boldsymbol{C}_{j2}(-d_j)$$

依次类推，最后可把第k_j个薄层下表面力学量和第一个薄层上表面力学量用下式联结起来：

$$\boldsymbol{R}_{jk_j}(b_j)=\boldsymbol{E}_{jk_j}\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j1})+\overline{\boldsymbol{E}}_{jk_j} \tag{3.10}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_{jk_j}=\boldsymbol{G}_{jk_j}\boldsymbol{G}_{j,k_j-1}\cdots\boldsymbol{G}_{j2}\boldsymbol{G}_{j1}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{jk_j}=\boldsymbol{G}_{jk_j}(\boldsymbol{G}_{j,k_j-1}\cdots\boldsymbol{G}_{j2}\boldsymbol{C}_{j1}+\boldsymbol{G}_{j,k_j-1}\cdots\boldsymbol{G}_{j3}\boldsymbol{C}_{j2}+\cdots+\boldsymbol{C}_{j,k_j-1})+\boldsymbol{C}_{jk_j}$$

$$\boldsymbol{G}_{ji}=\boldsymbol{G}_{ji}(-d_j),\ \boldsymbol{C}_{ji}=\boldsymbol{C}_{ji}(-d_j)\qquad(i=1,2,\cdots,k_j)$$

(3.10)式对图2(a)中任一层均成立。当$j=1,2$时，分别有

$$\boldsymbol{R}_{1k_1}(b_1)=\boldsymbol{E}_{1k_1}\boldsymbol{R}_{11}(a_{11})+\overline{\boldsymbol{E}}_{1k_1},\ \boldsymbol{R}_{2k_2}(b_2)=\boldsymbol{E}_{2k_2}\boldsymbol{R}_{21}(a_{21})+\overline{\boldsymbol{E}}_{2k_2} \tag{3.11}$$

参看图2，第一层上表面半径$a_{11}=a$，第二层上表面半径（即第一层下表面半径）$a_{21}=b_1$。根据该二层层间位移和应力的连续条件，必有

$$\boldsymbol{R}_{1k_1}(b_1)=\boldsymbol{R}_{21}(a_{21})=\boldsymbol{R}_{21}(b_1)$$

考虑上式，并将（3.11）式中的前式代入后式，得

$$\boldsymbol{R}_{2k_2}(b_2)=\boldsymbol{E}_{2k_2}\boldsymbol{E}_{1k_1}\boldsymbol{R}_{11}(a)+\boldsymbol{E}_{2k_2}\overline{\boldsymbol{E}}_{1k_1}+\overline{\boldsymbol{E}}_{2k_2}$$

逐层类推，最后可把第p层下表面力学量用第一层上表面力学量表示如下：

$$\boldsymbol{R}_{pk_p}(b)=\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{R}_{11}(a)+\overline{\boldsymbol{\Pi}} \tag{3.12}$$

式中

$$\boldsymbol{\Pi}=\prod_{j=p}^{1}\boldsymbol{E}_{jk_j}$$

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}}=\boldsymbol{E}_{pk_p}(\boldsymbol{E}_{p-1,k_{p-1}}\cdots\boldsymbol{E}_{2k_2}\overline{\boldsymbol{E}}_{1k_1}+\boldsymbol{E}_{p-1,k_{p-1}}\cdots\boldsymbol{E}_{3k_3}\overline{\boldsymbol{E}}_{2k_2}+\cdots+\overline{\boldsymbol{E}}_{p-1,k_{p-1}})+\overline{\boldsymbol{E}}_{pk_p}$$

(3.12)式中$\boldsymbol{R}_{11}(a)$和$\boldsymbol{R}_{pk_p}(b)$分别是叠层壳上、下表面的力学量，$\boldsymbol{R}_{11}(a)$ 叫做初始值。$\boldsymbol{\Pi}$为6阶方阵，$\overline{\boldsymbol{\Pi}}$为6阶列阵。在通常情况下，作用在壳体上、下表面的外力是已知的，故（3.12）式实际上是关于壳体上、下表面6个位移分量以及边界上正应力（包含在$\overline{\boldsymbol{\Pi}}$内）的矩阵方程。当法向压强$q(x,\theta)=q=\text{const}$时，把$q$按（2.6）式中的$\sigma$-级数形式展开，得

$$\sigma_{mn}(a)=-\frac{16q}{mn\pi^2},\qquad(m,n=1,3,5,\cdots)$$

而　$X_{mn}(a)=\Theta_{mn}(a)=X_{mn}(b)=\Theta_{mn}(b)=\sigma_{mn}(b)=0$

取（3.12）式中的第3，第4和第5三行，可求得

$$\begin{Bmatrix}U_{mn}(a)\\V_{mn}(a)\\W_{mn}(a)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\Pi_{31}&\Pi_{32}&\Pi_{36}\\\Pi_{41}&\Pi_{42}&\Pi_{46}\\\Pi_{51}&\Pi_{52}&\Pi_{56}\end{bmatrix}^{-1}\left(\frac{16q}{mn\pi^2}\begin{Bmatrix}\Pi_{33}\\\Pi_{43}\\\Pi_{53}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\overline{\Pi}_3\\\overline{\Pi}_4\\\overline{\Pi}_5\end{Bmatrix}\right) \tag{3.13}$$

通过边界条件的满足求出$[\overline{\Pi}_3\ \overline{\Pi}_4\ \overline{\Pi}_5]^T$后，则$[U_{mn}(a)\ \ V_{mn}(a)\ \ W_{mn}(a)]^T$可由上式求得，于是初始值$\boldsymbol{R}_{11}(a)$为已知。$\boldsymbol{R}_{11}(a)$求出后，利用（3.4）式并令$j=1$，便可求得第一层中第一个薄层的力学量，然后用(2.6)和(2.5)式求出所有应力、位移分量。当第一个薄层下表面力学量求出后，又可视为第二个薄层初始值，于是第二个薄层的力学量可求。类推下去，第一层内力学量处处可求。同理，整个叠层壳各力学量可求。

现在考虑边界条件(2.7)。要满足该式，由(2.6)式知，必须

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}U_{mn}(r)\right]_j\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m U_{mn}(r)\right]_j\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}=0\\ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}V_{mn}(r)\right]_j\sin\frac{m\pi x}{l}=0,\ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n V_{mn}(r)\right]_j\sin\frac{m\pi x}{l}=0\end{cases}$$

而要上式满足，只需要

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}[U_{mn}(r)]_j=0,\ \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m[U_{mn}(r)]_j=0\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=1,2,\cdots,p)\\ &\sum_{n=0}^{\infty}[V_{mn}(r)]_j=0,\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[V_{mn}(r)]_j=0\end{aligned}\right\}\tag{3.14}$$

从(3.4)式出发，仿照(3.10)式的推导过程，可将第j层中第i个薄层的力学量用第j层上表面力学量表示：

$$\boldsymbol{R}_{ji}(r)=\boldsymbol{E}_{ji}(r)\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j1})+\overline{\boldsymbol{E}}_{ji}(r)\tag{3.15}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_{ji}(r)=\boldsymbol{G}_{ji}(r-a_{ji})\boldsymbol{G}_{j,i-1}\cdots\boldsymbol{G}_{j2}\boldsymbol{G}_{j1}$$

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{ji}(r)=\boldsymbol{G}_{ji}(r-a_{ji})(\boldsymbol{G}_{j,i-1}\cdots\boldsymbol{G}_{j2}\boldsymbol{C}_{j1}+\boldsymbol{G}_{j,i-1}\cdots\boldsymbol{G}_{j3}\boldsymbol{C}_{j2}+\cdots+\boldsymbol{C}_{j,i-1})+\boldsymbol{C}_{ji}(r-a_{ji})$$

$$\boldsymbol{G}_{jk}=\boldsymbol{G}_{jk}(-d_j),\ \boldsymbol{C}_{jk}=\boldsymbol{C}_{jk}(-d_j)\qquad(k=1,2,\cdots,i-1)$$

再仿照(3.12)式的推导过程，将第j层($j>1$)上表面力学量（即第$j-1$层下表面力学量）用初始值表示：

$$\boldsymbol{R}_{j1}(a_{j1})=\Pi_{j-1}\boldsymbol{R}_{11}(a)+\overline{\Pi}_{j-1}\qquad(j>1)\tag{3.16}$$

式中

$$\Pi_{j-1}=\boldsymbol{E}_{j-1,k_{j-1}}\boldsymbol{E}_{j-2,k_{j-2}}\cdots\boldsymbol{E}_{2k_2}\boldsymbol{E}_{1k_1}$$

$$\overline{\Pi}_{j-1}=\boldsymbol{E}_{j-1,k_{j-1}}(\boldsymbol{E}_{j-2,k_{j-2}}\cdots\boldsymbol{E}_{2k_2}\overline{\boldsymbol{E}}_{1k_1}+\boldsymbol{E}_{j-2,k_{j-2}}\cdots\boldsymbol{E}_{3k_3}\overline{\boldsymbol{E}}_{2k_2}+\cdots+\overline{\boldsymbol{E}}_{j-2,k_{j-2}})+\overline{\boldsymbol{E}}_{j-1,k_{j-1}}$$

为了将第j层中第i个薄层力学量用初始值$\boldsymbol{R}_{11}(a)$表示，可将(3.16)式代入(3.15)式，于是得到

$$\boldsymbol{R}_{ji}(r)=\Pi_{ji}(r)\boldsymbol{R}_{11}(a)+\overline{\Pi}_{ji}(r)\qquad(j>1)\tag{3.17}$$

式中 $\Pi_{ji}(r)=\boldsymbol{E}_{ji}(r)\Pi_{j-1}$，$\overline{\Pi}_{ji}(r)=\boldsymbol{E}_{ji}(r)\overline{\Pi}_{j-1}+\overline{\boldsymbol{E}}_{ji}(r)$

当$j=1$时，(3.17)式应由(3.15)式代替，并令$j=1$。

在叠层壳顶部受法向均布压强q作用时，取(3.17)式中第1,2两行，得

$$\begin{Bmatrix}U_{mn}(r)\\ V_{mn}(r)\end{Bmatrix}_{ji}=\begin{pmatrix}\Pi_{11}(r)&\Pi_{12}(r)&\Pi_{16}(r)\\ \Pi_{21}(r)&\Pi_{22}(r)&\Pi_{26}(r)\end{pmatrix}_{ji}\begin{Bmatrix}U_{mn}(a)\\ V_{mn}(a)\\ W_{mn}(a)\end{Bmatrix}-\frac{16q}{mn\pi^2}\begin{Bmatrix}\Pi_{13}(r)\\ \Pi_{23}(r)\end{Bmatrix}_{ji}+\begin{Bmatrix}\overline{\Pi}_1(r)\\ \overline{\Pi}_2(r)\end{Bmatrix}_{ji}$$

把(3.13)式代入上式，得

$$\begin{Bmatrix}U_{mn}(r)\\ V_{mn}(r)\end{Bmatrix}_{ji}=\begin{bmatrix}\Pi_{11}(r)&\Pi_{12}(r)&\Pi_{16}(r)\\ \Pi_{21}(r)&\Pi_{22}(r)&\Pi_{26}(r)\end{bmatrix}_{ji}\begin{bmatrix}\Pi_{31}&\Pi_{32}&\Pi_{36}\\ \Pi_{41}&\Pi_{42}&\Pi_{46}\\ \Pi_{51}&\Pi_{52}&\Pi_{56}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\cdot\left(\frac{16q}{mn\pi^2}\begin{Bmatrix}\Pi_{33}\\ \Pi_{43}\\ \Pi_{53}\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\overline{\Pi}_3\\ \overline{\Pi}_4\\ \overline{\Pi}_5\end{Bmatrix}\right)-\frac{16q}{mn\pi^2}\begin{Bmatrix}\Pi_{13}(r)\\ \Pi_{23}(r)\end{Bmatrix}_{ji}+\begin{Bmatrix}\overline{\Pi}_1(r)\\ \overline{\Pi}_2(r)\end{Bmatrix}_{ji},\quad \left(\begin{array}{l} m,n=1,3,5,\cdots\\ j=1,2,3,\cdots,p\\ i=1,2,3,\cdots,k_j\end{array}\right) \tag{3.18}$$

在(3.18)式中令$r=a_{ji}$和b_j(即在薄层端点固定)，并将它代入(3.14)式，对于每对m-n得到关于A_{nji}，B_{nji}，C_{mji}，D_{mji}的四个方程。令$j=1,2,\cdots,p,i=1,2,\cdots,k_j$，总共得到 $4(k_1+k_2+\cdots+k_p+p)$个方程以定解同样数目的常数。在法向均布荷载下，考虑对称性，未知量和方程个数都减少一半。待这些常数求出后，不难由(3.13)式求出初始值，从而整个叠层壳可解。

需要说明的是，在边界上沿 r方向只有有限点固定会带来一定的误差。然而，只要薄层充分薄，这种误差是很小的，即此类误差是可控的，文中表1可以说明这点。笔者尚未发现有任何一家理论或任何一种方法能将整个边界固定。

四、数 值 结 果

下面给出的算例是用四倍精度在计算机SIEMENS/7570c上完成的。数表中的I_1，I_2，I_3分别是第一，第二，第三层被分割的薄层数。

算例 $x=0,l$两边简支；$\theta=0,\varphi$两边固支的三层壳，顶面受法向均布压强q作用，第一和第三层材料相同，每层都有如下的弹性常数：

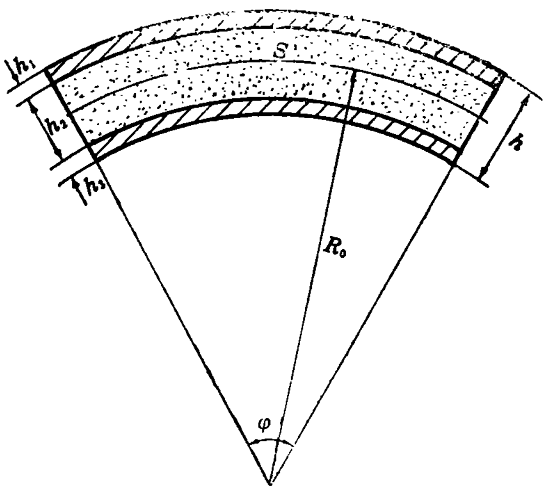


图3 三层圆柱壳

$C_{12}/C_{11}=0.246269$，$C_{13}/C_{11}=0.0831715$

$C_{22}/C_{11}=0.543103$，$C_{23}/C_{11}=0.115017$

$C_{33}/C_{11}=0.530172$，$C_{44}/C_{11}=0.266810$

$C_{55}/C_{11}=0.159914$，$C_{66}/C_{11}=0.262931$

$C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)}=5$

$C_{11}^{(1)}$和$C_{11}^{(2)}$分别是第一和第二层材料的C_{11}值。当$C_{11}^{(1)}=C_{11}^{(2)}=C_{11}$时，该三层壳蜕化为单层壳。几何参数是$h_1=h_3=0.1h$，$h_2=0.8h$，壳长$l=s$，$s=R_0$，$s$和$R_0$分别是中面弧长和平均

表1 **沿r方向设置不同固定点数时三层壳的应力和挠度**

$C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)}$	h/R_0	I_1	I_2	I_3	$x=l/2,\theta=\varphi/2,r=a$			$x=l/2,\theta=0,r=a$
					$WC_{11}^{(2)}/(qh)$	σ_θ/q	σ_x/q	σ_θ/q
5	0.6	3	12	3	−1.6435	−2.6183	−2.2032	11.442
5	0.6	4	12	4	−1.6439	−2.6275	−2.2065	12.800
5	0.6	4	13	4	−1.6439	−2.6272	−2.2065	12.803
5	0.6	4	14	4	−1.6439	−2.6270	−2.2065	12.806
5	0.6	4	15	4	−1.6439	−2.6269	−2.2066	12.808

表2 **不同厚度时三层壳的应力和挠度**

h/R_0	0.4		0.6	
	$I_1=I_3=4,I_2=12$		$I_1=I_3=4,I_2=14$	
	精确解	SAP5解	精确解	SAP5解
$WC_{11}^{(2)}/(qh)$ $(x=l/2,\theta=\varphi/2,r=a)$	−3.020	−2.9470	−1.644	−1.6035
$\sigma_x/q(x=l/2,\theta=\varphi/2)$				
上层上表面	−3.031	−3.187	−2.207	−2.189
上层下表面	−1.701	−1.735	−0.754	−0.802
中层上表面	−0.452	−0.448	−0.266	−0.271
中层下表面	0.226	0.185	0.015	−0.030
下层上表面	1.170	1.145	0.145	0.179
下层下表面	2.934	2.899	1.577	1.610
$\sigma_\theta/q(x=l/2,\theta=\varphi/2)$				
上层上表面	−3.744	−4.138	−2.627	−2.852
上层下表面	−3.014	−3.343	−1.968	−2.183
中层上表面	−0.757	−0.800	−0.553	−0.581
中层下表面	−0.108	−0.158	−0.151	−0.208
下层上表面	−0.488	−0.506	−0.658	−0.607
下层下表面	−1.064	1.126	0.730	0.792
$\sigma_\theta/q(x=l/2,\theta=0)$				
上层上表面	17.55	2.842	12.81	2.292
上层下表面	−8.166	−1.267	−7.193	−2.060
中层上表面	−1.633	−0.249	−1.439	−0.410
中层下表面	0.106	−0.428	0.167	−0.082
下层上表面	0.528	−2.140	0.836	−0.406
下层下表面	−13.33	−6.771	−6.697	−3.863
$\tau_{r\theta}/q(x=l/2,\theta=0)$				
上层上表面	0.000	−4.551	0.000	−3.614
上层下表面	−1.211	−4.502	−0.978	−3.538
中层上表面	−1.211	−0.900	−0.978	−0.706
中层下表面	−0.617	−0.506	−0.403	−0.256
下层上表面	−0.617	−2.532	−0.403	−1.282
下层下表面	0.000	−2.752	0.000	−1.414

半径（图3）。

数值结果见表1～表3，级数取项为$m=1,5,\cdots,29$；$n=1,3,5,\cdots,99$。从表1可见，若取相应于$I_1=I_3=4$，$I_2=14$ 的结果作为本问题的解，前4位数字是精确值。表2和表3中还列出了SAP5给出的有限元解，采用的是16节点16个三维块体等参元（对1/4壳）。将本文提供

的精确解与有限元解对比可见，除边界应力外，其它力学量相差不大。有限元的弱点之一是边界应力很难算准。表2和表3中用SAP5解得的边界处($\theta=0$)的σ_θ和精确解相差很大，有时甚至连正负号都颠倒了。这除了有限元本身的弱点外，与边界上固定点数不相同也有关。SAP5解在边界上沿r方向只有5点固定，而精确解的固定点数却远远超过5个。此外，表2中相应于SAP5解得的$\tau_{r\theta}$在层间不满足连续条件，表2和表3中用ASP5解得的$\tau_{r\theta}$在壳体上、下表面处不为零，这些显然是错误的。

表3　　不同厚度时单层壳的应力和挠度

h/R_0	0.1		0.2	
	$I_1=I_3=3, I_2=10$		$I_1=I_3=3, I_2=12$	
	精确解	SAP5解	精确解	SAP5解
$WC_{11}/(qh)$ $(x=l/2,\theta=\varphi/2,r=a)$	-214.81	-209.35	-27.510	-26.864
$\sigma_x/q(x=l/2,\theta=\varphi/2)$				
$r=a$	-12.06	-12.80	-4.755	-5.058
$r=R_0+h_2/2$	-10.01	-10.73	-3.856	-4.030
$r=R_0-h_2/2$	7.141	6.544	3.330	3.210
$r=b$	9.448	8.795	4.458	4.337
$\sigma_\theta/q(x=l/2,\theta=\varphi/2)$				
$r=a$	-14.72	-16.61	-4.999	-5.649
$r=R_0+h_2/2$	-13.19	-15.00	-4.441	-4.906
$r=R_0-h_2/2$	0.717	-0.129	1.278	1.145
$r=b$	2.502	1.861	2.168	2.154
$\sigma_\theta/q(x=l/2,\theta=0)$				
$r=a$	39.40	9.542	18.28	4.527
$r=R_0+h_2/2$	7.859	6.840	2.965	3.018
$r=R_0-h_2/2$	-19.07	-15.93	-6.593	-6.415
$r=b$	-58.13	-19.48	-19.53	-8.695
$\tau_{r\theta}/q(x=l/2,\theta=0)$				
$r=a$	0.000	-5.009	0.000	-2.712
$r=R_0+h_2/2$	-2.572	-5.006	-1.945	-2.600
$r=R_0-h_2/2$	-3.110	-5.722	-1.593	-2.607
$r=b$	0.000	-6.016	0.000	-2.802

注：本表结果是按三层壳程序计算的，即令$C_{11}^{(1)}=C_{11}^{(2)}=C_{11}$。

参 考 文 献

[1] 范家让、张巨勇，叠层开口圆柱厚壳的静、动态和稳定问题的精确解，中国科学（A辑），(6)(1992)，623—632.

[2] Fan Jia-rang（范家让）and Zhang Ju-yong（张巨勇），Analytical solution for thick doubly curved laminated shells, *J. Engrg.Mech. Div., ASCE*, 118(7)(1992), 1338—1356.

[3] 尤昌德，《线性系统理论基础》，电子工业出版社（1985）.

Exact Solution of the Thick Laminated Open Cylindrical Shells with Four Clamped Edges

Fan Jia-rang

(Hefei University of Technology, Hefei)

Ding Ke-wei

(Anhui Architectural Industry College, Hefei)

Abstract

Giving up any assumptions about displacement models and stress distribution, based on Refs. [1] and [2] and introducing σ-function into the present study, the state equation for the open cylindrical shells with four clamped edges is established. An identical exact solution is obtained for the thin, moderately thick and thickly laminated open cylindrical shells.

Key words thick open laminated cylindrical shell, clamped edges, state equation, exact solution