

带相变的铸坯热弹塑性应力分析基本方程

赵兴华 陈小弟

(上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所, 1993年1月10日收到)

摘 要

本文讨论了温度、相变、应力间的耦合关系, 给出了铸坯在考虑相变时的热弹塑性蠕变的本构关系, 以及计算铸坯内应力的有限元迭代公式。

关键词 相变 热弹塑性 应力

一、引 言

连铸铸件冷却时的应力分析, 由于涉及相变和热弹塑性, 因此, 是一个十分复杂的问题, 至今只有少数学者研究过这类问题。T. Inoue和Zhigang Wang^[1]讨论了应力、温度和金属结构之间的耦合关系; S. Denis^[2]等人则研究了应力与相变之间相互作用规律; S. Sjostron^[3]提出了考虑相变时的本构模型。在这些工作基础上, 本文进一步分析了温度、应力、相变之间的耦合关系, 完整地给出了包含蠕变和上述三者耦合作用的本构关系, 改进了S. Sjostron塑性系数计算的结果, 同时给出了计算铸坯热弹塑性应力的有限元迭代公式。

二、铸坯冷却时的物理模型和基本假设

连铸铸件由高温液态冷却到室温固态, 由于铸件各处冷却速度不同, 温度不同, 在铸件内部将会引起内应力。如果温度梯度不均匀, 这种内应力有时会大到足以使铸件断裂。

研究坯铸的内应力是一个十分复杂的问题, 因为铸坯的冷凝过程, 不仅伴随有急剧的温度变化、材料性质变化, 而且还经历了由液相到固相的相变过程和由奥氏体钢转变为铁素体、珠光体钢的相变过程。温度、相变、应力三者之间存在很强的耦合关系(图1, 要研究铸坯的应力, 必须搞清它们之间的相互作用关系, 并找到确当的描述方式。

温度、相变、应力三者之间的耦合作用可以简述如下:

温度不均匀变化将引起体积膨胀或收缩, 产生温度应力。同时, 温度的变化将引起材料性质(弹性常数 E , μ , 屈服应力 σ_s , 硬化参数 κ , 塑性性能 \dots)的变化, 高温时还将发生蠕变现象和内应力的逐渐消失。

温度变化将引起金属的相变。在某个温度范围内, 钢会从液相变为固相, 在另外一些温

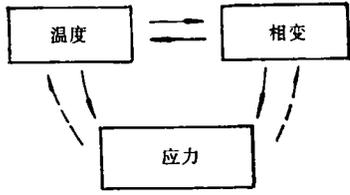


图 1

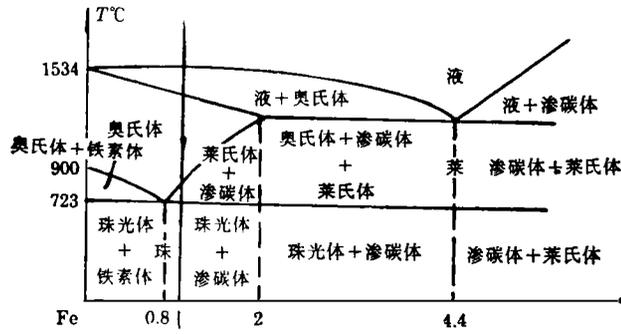


图2 钢的相图

度范围内，钢将从一种固相组织转变为另一种性质不同的固相组织（图2）。

金属在相变过程中将吸收或放出潜热，从而影响铸坯温度场的分布。同时相变时还将引起局部体积变化产生相变应变，使材料的物理性质 E, μ, σ 等都发生变化，在某些情况下使塑性记忆消失，内应力消失。此外，如相变时存在非零应力，往往在低于材料原有弹性极限之下就发生塑性应变（称为相变诱导塑性）。这些都构成了相变对应力状态的影响。

应力状态的存在将影响某些相变的初始转变温度，并将引起相变诱导塑性^[2]。此外，严重的塑性变形还将消耗能量，产生热，从而影响温度场。

由此可见温度、相变、应力之间有着复杂而紧密的耦联关系，正如图 1 所示。但是一般情况下，应力对温度的影响（图中虚线），相比之下十分微弱，可以忽略不计。应力对相变的影响，除相变诱导塑性外，也可不考虑。而其余的耦合作用，在铸坯冷却过程的应力分析中，必须充分加以考虑研究。

在建立铸坯应力分析模型时，我们引进以下几个假设：

1. 认为铸坯是连续均匀的物体；
2. 铸坯微元体的物理性质，由组成该微元体各相组元的物理性质，线性组合而成；
3. 由于液体的易流动性和高温（再结晶温度以上）下铸件有萌生新晶粒，晶粒长大和内应力消失的现象，假设铸坯液相部分应力为零，高温固相部分内应力可忽略。

三、应变率和本构关系

（一）应变率的表达

由于铸坯冷却时应变随温度和时间不断地在变化，通常采用应变率表达方式更为方便，下面分别讨论不发生相变时刻和正在发生相变时刻两种情况下的应变率表达式。

1. 发生相变时刻的应变率

总的应变率由以下几部分组成，即

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^T + \dot{\epsilon}_{ij}^m + \dot{\epsilon}_{ij}^c + \dot{\epsilon}_{ij}^I \quad (3.1)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}^e$ 为弹性应变率， $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 为塑性应变率， $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ 为温度应变率， $\dot{\epsilon}_{ij}^m$ 为相变应变率， $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ 为蠕变应变率， $\dot{\epsilon}_{ij}^I$ 为相变诱导塑性应变率。上标“·”表示对时间的导数 $\frac{d\epsilon_{ij}}{dt} = \dot{\epsilon}_{ij}$ 。

设铸坯微元包含 n 个相，第 k 相所占的比例（组分）为 ζ_k ，则各种应变率可以表达如下：

(1) 弹性应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{d\varepsilon_{ij}^e}{dt} = -\frac{1}{E^2} \frac{dE}{dt} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \delta_{ij}\nu\sigma_m] + \frac{1}{E} \frac{d\nu}{dt} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_m) + \frac{1}{E} \left[(1+\nu) \frac{d\sigma_{ij}}{dt} - \delta_{ij}\nu \frac{d\sigma_m}{dt} \right] \quad (3.2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dE_k}{dt} \xi_k + \sum_{k=1}^n E_k \frac{d\xi_k}{dt}, \quad E = \sum_{k=1}^n E_k \xi_k \quad (3.3)$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{d\nu_k}{dt} \xi_k + \sum_{k=1}^n \nu_k \frac{d\xi_k}{dt}, \quad \nu = \sum_{k=1}^n \nu_k \xi_k \quad (3.4)$$

E_k, ν_k 为 k 相的弹性常数和波桑比, δ_{ij} 为克氏算符, σ_m 为平均应力。

(2) 温度应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^T &= \frac{d\varepsilon_{ij}^T}{dt} = \delta_{ij} \left(\sum_{k=1}^n \frac{d\varepsilon_k^T}{dt} \xi_k + \sum_{k=1}^n \frac{d\xi_k}{dt} \varepsilon_k^T \right) \\ \frac{d\varepsilon_k^T}{dt} &= \alpha_k \frac{dT}{dt} + \frac{d\alpha_k}{dt} (T - T_k), \quad \varepsilon_k^T = \alpha_k (T - T_k) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

α_k 为 k 相的热膨胀系数, T_k 为环境温度。

(3) 相变应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^m$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^m = \frac{d\varepsilon_{ij}^m}{dt} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^n \frac{d\xi_k}{dt} \varepsilon_i^m \quad (3.6)$$

ε_i^m 为 k 相的相变应变值。

(4) 塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (3.7)$$

λ 为比例因子, f 为塑性势函数, 有

$$f = \frac{1}{2} (\sigma'_{ij} - \beta a_{ij}) (\sigma'_{ij} - \beta a_{ij}) \quad (3.8)$$

V. Misese屈服条件为

$$\frac{1}{2} (\sigma'_{ij} - \beta a_{ij}) (\sigma'_{ij} - \beta a_{ij}) = \frac{1}{3} [\sigma_{y0} + (1-\beta)\sigma_y]^2 \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ij}^k \xi_k, \quad \sigma_{y0} = \sum_{k=1}^n \sigma_{y0}^k \xi_k \\ \sigma_y &= \sum_{k=1}^n \sigma_y^k \xi_k \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

σ'_{ij} 为应力偏量, σ_{y0} 为初始屈服极限, σ_y 为后继屈服极限增加值, a_{ij} 为随动硬化时屈服面中心移动值, β 为表示随动硬化占有比例 (假设实际情况是由等向硬化和随动硬化线性组合而成), $\beta=0$ 时为等向硬化情况, $\beta=1$ 时为随动硬化情况。

(5) 蠕变应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \lambda_0 \sigma'_{ij} \quad (3.11)$$

$$\lambda_0 = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{\sigma}_k} \frac{d\bar{\varepsilon}_k^c}{dt} \quad (3.12)$$

λ_0 为材料特性系数,由单向应力状态下的蠕变试验确定。 $\bar{\sigma}_k$, $\bar{\varepsilon}_k^c$ 为 k 相在单向应力状态下的有效应力和有效蠕变应变率。

(6) 相变诱导塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^I$

认为与塑性和蠕变有同样的规律,于是

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^I = \lambda_I \sigma'_{ij} \quad (3.13)$$

$$\lambda_I = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{\sigma}_k} \frac{d\bar{\varepsilon}_k^I}{dt}, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}_k^I}{dt} = 2k\bar{\sigma}_k(1-\zeta_k) \frac{d\zeta_k}{dt} \quad (3.14)$$

λ_I 为材料特性系数, k 由试验测定的常数。

2. 不发生相变时的应变率

总的应变率由以下几部分组成

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{\varepsilon}_{ij}^c \quad (3.15)$$

不含有相变应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^m$ 及相变诱导塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^I$ 。同时 $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^T$, $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ 表达式中凡含有 $d\zeta/dt$ 的项均不存在。在相变过程结束之后,不再引起新的相变应变,原有的 ε_{ij}^m , ε_{ij}^I 不再变化。

(二) 本构关系

现在来推导相变情况下考虑蠕变时的弹塑性应力应变关系。当采用应变率分量的矩阵表示形式后,则(3.1)式可写成

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^e\} + \{\dot{\varepsilon}^p\} + \{\dot{\varepsilon}^T\} + \{\dot{\varepsilon}^m\} + \{\dot{\varepsilon}^c\} + \{\dot{\varepsilon}^I\} \quad (3.16)$$

其中 $\{\dot{\varepsilon}\}$ 为:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [\dot{\varepsilon}_{11} \ \dot{\varepsilon}_{22} \ \dot{\varepsilon}_{33} \ 2\dot{\varepsilon}_{12} \ 2\dot{\varepsilon}_{23} \ 2\dot{\varepsilon}_{13}] \quad (3.17)$$

$\{\dot{\varepsilon}^e\}$, $\{\dot{\varepsilon}^p\}$, $\{\dot{\varepsilon}^T\}$, $\{\dot{\varepsilon}^m\}$, $\{\dot{\varepsilon}^c\}$, $\{\dot{\varepsilon}^I\}$, 相类似。将

$$\{\dot{\varepsilon}^e\} = \frac{d([C]_E^{-1}\{\sigma\})}{dt} = [C]_E^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial [C]_E^{-1}}{\partial t}\{\sigma\} \quad (3.18)$$

和

$$\{\dot{\varepsilon}^p\} = \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \quad (3.19)$$

代入(3.16)式得

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [C]_E^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial [C]_E^{-1}}{\partial t}\{\sigma\} + \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} + \{\dot{\varepsilon}^T\} + \{\dot{\varepsilon}^m\} + \{\dot{\varepsilon}^c\} + \{\dot{\varepsilon}^I\} \quad (3.20)$$

$\{\dot{\sigma}\}$ 为应力变化率矩阵,上式两边乘应力应变关系矩阵 $[C]_E$ 得

$$\begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} &= [C]_E \{\dot{\varepsilon}\} - \lambda [C]_E \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} - [C]_E (\{\dot{\varepsilon}^T\} \\ &\quad + \{\dot{\varepsilon}^m\} + \{\dot{\varepsilon}^c\} + \{\dot{\varepsilon}^I\}) + \frac{\partial [C]_E}{\partial t} \{\sigma\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

屈服条件(3.9)可以写为

$$f(\sigma'_{ij}, \beta a_{ij}) = \frac{1}{3} \sigma'^2_{ij} \quad (3.22)$$

$$\sigma_f = \sum_{k=1}^n \sigma'_y \xi_k + (1-\beta) \sum_{k=1}^n \sigma'_y \xi_k \quad (3.23)$$

这里 a_{ij} , σ_f 是 T , $\bar{\varepsilon}^p$, ξ_k 的函数。对 (3.22) 式全微分有

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T \{\dot{\sigma}\} + \beta \left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\}^T \{\dot{a}\} = \frac{2}{3} \sigma_f \dot{\sigma}_f \quad (3.24)$$

根据

$$a_{ij} = \int C_{ij} d\varepsilon'_{ij}, \quad a_{ij} = \sum_{k=1}^n \xi_k a^k_{ij} \quad (3.25)$$

则

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{k=1}^n \xi_k C_{ij} \frac{d\varepsilon'_{ij}}{dt} + \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial a^k_{ij}}{\partial T} \frac{dT}{dt} + (1-\gamma) \sum_{k=1}^n a^k_{ij} \frac{d\xi_k}{dt}$$

写成矩阵形式为:

$$\{\dot{a}\} = [C]_0 \{\dot{\varepsilon}^p\} + \left\{ \frac{\partial a}{\partial T} \right\}^T \dot{T} + (1-\gamma) \{a \dot{\xi}\} \quad (3.26)$$

其中

$$[C] = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \xi_k C_{11}^k & & & 0 \\ & \sum_{k=1}^n \xi_k C_{22}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{k=1}^n \xi_k C_{13}^k \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\left\{ \frac{\partial a}{\partial T} \right\}^T = \left[\sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial a^k_{11}}{\partial T}, \quad \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial a^k_{22}}{\partial T}, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial a^k_{13}}{\partial T} \right] \quad (3.28)$$

$$\{a \dot{\xi}\}^T = \left[\sum_{k=1}^n a^k_{11} \dot{\xi}_k, \quad \sum_{k=1}^n a^k_{22} \dot{\xi}_k, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^n a^k_{13} \dot{\xi}_k \right] \quad (3.29)$$

根据 (3.23) 式 $\dot{\sigma}_f$ 为:

$$\dot{\sigma}_f = \frac{\partial \sigma_f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \left\{ \frac{\partial \bar{\varepsilon}^p}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \{\dot{\varepsilon}^p\} + \frac{\partial \sigma_f}{\partial T} \dot{T} + \sum_{k=1}^n (\sigma_{y0}^k + (1-\beta)(1-\gamma)\sigma_y^k) \dot{\xi}_k \quad (3.30)$$

(3.26)、(3.30) 式中的 γ 为塑性记忆因子, $\gamma=0$ 表示相变后没有损失塑性记忆, $\gamma=1$ 表示材料相变后完全失去原有塑性记忆, C_{ij} 为试验测定的材料特性常数。

将 (3.21)、(3.26)、(3.30)、(3.19) 式代入 (3.24) 式, 并注意到 $\left\{ \frac{\partial f}{\partial a} \right\} = - \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}$,

经整理后可得:

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{1}{A} \left(\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T [C]_{\mathbf{E}} (\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^T\} - \{\dot{\varepsilon}^m\} - \{\dot{\varepsilon}^c\} - \{\dot{\varepsilon}^I\}) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T \frac{\partial [C]_{\mathbf{E}}}{\partial t} \{\varepsilon^e\} \right. \\ & - \beta \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right\} T - \beta(1-\gamma) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T \{\alpha \dot{\xi}\} - \frac{2}{3} \sigma_f \frac{\partial \sigma_f}{\partial T} T \\ & \left. - \frac{2}{3} \sigma_f \sum_{k=1}^n (\sigma_{y_0}^k + (1-\beta)(1-\gamma)\sigma_y^k) \dot{\xi}_k \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$A = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T [C]_{\mathbf{E}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} + \beta \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T [C]_0 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} + \frac{2}{3} \sigma_f \frac{\partial \sigma_f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \left\{ \frac{\partial \bar{\varepsilon}^p}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \quad (3.32)$$

将(3.31)式代入(3.21)式得应力率应变率之间的关系式。

$$\begin{aligned} \{\dot{\sigma}\} = & \left([C]_{\mathbf{E}} - \frac{[C]_{\mathbf{E}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} [C]_{\mathbf{E}}}{A} \right) (\{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^T\} - \{\dot{\varepsilon}^c\} - \{\dot{\varepsilon}^m\} - \{\dot{\varepsilon}^I\}) \\ & + \left([\dot{C}]_{\mathbf{E}} - \frac{[C]_{\mathbf{E}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} [\dot{C}]_{\mathbf{E}}}{A} \right) \{\varepsilon^e\} + \frac{[C]_{\mathbf{E}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}}{A} \left(\beta \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \sigma_f \frac{\partial \sigma_f}{\partial T} \right) T + \frac{1}{A} \beta(1-\gamma) [C]_{\mathbf{E}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \{\alpha \dot{\xi}\} \\ & + \frac{2\sigma_f}{3A} [C]_{\mathbf{E}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\} \sum_{k=1}^n (\sigma_{y_0}^k + (1-\beta)(1-\gamma)\sigma_y^k) \dot{\xi}_k \end{aligned} \quad (3.33)$$

此式即为铸坯考虑相变、蠕变和热弹塑性的应力应变一般关系式。左边第一项反映弹塑性关系，第二项是材料性质随温度变化的影响项，第三项反映温度变化的影响，第四第五项是反映相变的影响。

四、有限元公式

(一) 基本方程

设 $t + \Delta t$ 时刻的位移矢量为 ${}^{t+\Delta t}\{u\}$ ，按通常的有限元公式推导， $t + \Delta t$ 时刻的虚功方程则有：

$$\int \{\delta e\}^T {}^{t+\Delta t}\{\sigma\} dV = \{\delta u\}^T {}^{t+\Delta t}\{R\} \quad (4.1)$$

而

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\{\sigma\} = & {}^{t+\Delta t}[C]_{\mathbf{E}} ({}^{t+\Delta t}\{\varepsilon\} - {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^p\} - {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^T\} \\ & - {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^m\} - {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^c\} - {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^I\}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\{\delta e\} = [B]_{\mathbf{L}} \{\delta u\}, \quad {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon\} = [B]_{\mathbf{L}} {}^{t+\Delta t}\{u\} \quad (4.3)$$

代入(4.1)式得

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}[K]_{\mathbf{E}} {}^{t+\Delta t}\{u\} = & {}^{t+\Delta t}\{R\} + \int_V [B]_{\mathbf{L}}^T {}^{t+\Delta t}[C]_{\mathbf{E}} ({}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^p\} + {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^T\} \\ & + {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^m\} + {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^c\} + {}^{t+\Delta t}\{\varepsilon^I\}) dV \end{aligned} \quad (4.4)$$

$${}^{t+\Delta t}[K]_{\mathbf{E}} = \int_V [B]_{\mathbf{L}}^T {}^{t+\Delta t}[C]_{\mathbf{E}} [B]_{\mathbf{L}} dV \quad (4.5)$$

这里 ${}^{i+\Delta t}[K]_E$ 为 $t + \Delta t$ 时刻的弹性刚度矩阵, ${}^{i+\Delta t}\{R\}$ 为外载荷矢量, $[B]_L$ 为应变位移关系矩阵。(4.4)式即为求解铸坯凝固过程应力状态的有限元基本方程。

(二) 迭代公式

由于(4.4)式是非线性方程, 必须用增量方法和迭代修正的办法求解。设 $0, \Delta t, \dots, t$ 时刻的量均为已知, 求 $t + \Delta t$ 时刻的量。写成增量形式有

$$\left. \begin{aligned} {}^{i+\Delta t}\{u\} &= {}^i\{u\} + \{u\}, & {}^{i+\Delta t}\{e\} &= {}^i\{e\} + \{e\} \\ {}^{i+\Delta t}\{e^p\} &= {}^i\{e^p\} + \{e^p\}, & {}^{i+\Delta t}\{e^o\} &= {}^i\{e^o\} + \{e^o\} \\ {}^{i+\Delta t}\{e^T\} &= {}^i\{e^T\} + \{e^T\}, & {}^{i+\Delta t}\{e^m\} &= {}^i\{e^m\} + \{e^m\} \\ {}^{i+\Delta t}\{e^I\} &= {}^i\{e^I\} + \{e^I\}, & {}^{i+\Delta t}\{e^o\} &= {}^i\{e^o\} + \{e^o\} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$\{u\}, \{e\}, \{e^p\}, \{e^o\}, \{e^T\}, \{e^m\}, \{e^I\}, \{e^o\}$ 为增量值。若假设 $t + \Delta t$ 时刻应力偏量呈线性变化,

$${}^{i+\alpha\Delta t}\{\sigma'\} = (1-\alpha){}^i\{\sigma'\} + \alpha{}^{i+\Delta t}\{\sigma'\} \quad (4.7)$$

则

$$\left. \begin{aligned} \{e^p\} &= \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\{\dot{\varepsilon}^p\} = \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\lambda^{i+\alpha\Delta t}\{\sigma'\} \\ \{e^o\} &= \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\{\dot{\varepsilon}^o\} = \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\lambda_o^{i+\alpha\Delta t}\{\sigma'\} \\ \{e^I\} &= \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\{\dot{\varepsilon}^I\} = \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\lambda_I^{i+\alpha\Delta t}\{\sigma'\} \\ \{e^m\} &= \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\{\dot{\varepsilon}^m\} \\ \{e^T\} &= \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\{\dot{\varepsilon}^T\} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

其中 ${}^{i+\alpha\Delta t}\lambda, {}^{i+\alpha\Delta t}\lambda_o, {}^{i+\alpha\Delta t}\lambda_I$ 是应力、应变、温度、材料性能的复杂函数, 见(3.31)、(3.12)、(3.14)式。由(4.6)、(4.8)、(4.4)式得求解铸坯应力状态的有限元非线性迭代公式为:

$$\left. \begin{aligned} {}^{i+\Delta t}\{e^p\}^{i+1} &= {}^i\{e^p\} + \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\lambda^{i+\alpha\Delta t}\{\sigma'\}^i \\ {}^{i+\Delta t}\{e^o\}^{i+1} &= {}^i\{e^o\} + \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\lambda_o^{i+\alpha\Delta t}\{\sigma'\}^i \\ {}^{i+\Delta t}\{e^I\}^{i+1} &= {}^i\{e^I\} + \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\lambda_I^{i+\alpha\Delta t}\{\sigma'\}^i \\ {}^{i+\Delta t}\{e^m\}^{i+1} &= {}^i\{e^m\} + \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\{\dot{\varepsilon}\} \\ {}^{i+\Delta t}\{e^T\}^{i+1} &= {}^i\{e^T\} + \Delta t^{i+\alpha\Delta t}\{\dot{\varepsilon}\} \\ {}^{i+\Delta t}\{\sigma\}^{i+1} &= {}^{i+\Delta t}[C]_E({}^{i+\Delta t}\{e\}^i - {}^{i+\Delta t}\{e^p\}^i - {}^{i+\Delta t}\{e^o\}^i - {}^{i+\Delta t}\{e^m\}^i \\ &\quad - {}^{i+\Delta t}\{e^I\}^i - {}^{i+\Delta t}\{e^T\}^i) \\ {}^{i+\Delta t}[K]_E\{\Delta u\}^{i+1} &= {}^{i+\Delta t}\{R\} - \int_V [B]_L^T {}^{i+\Delta t}\{\sigma\}^{i+1} dV \\ {}^{i+\Delta t}\{u\}^{i+1} &= {}^{i+\Delta t}\{u\}^i + \{\Delta u\}^{i+1} \quad (i=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

左上角角标表示迭代次数。当 $\{\Delta u\}^{i+1} \rightarrow 0$ 是就得到本步分析的有限元解。当(4.7)式中的 $\alpha > 1/2$ 时这种计算格式是无条件稳定的。

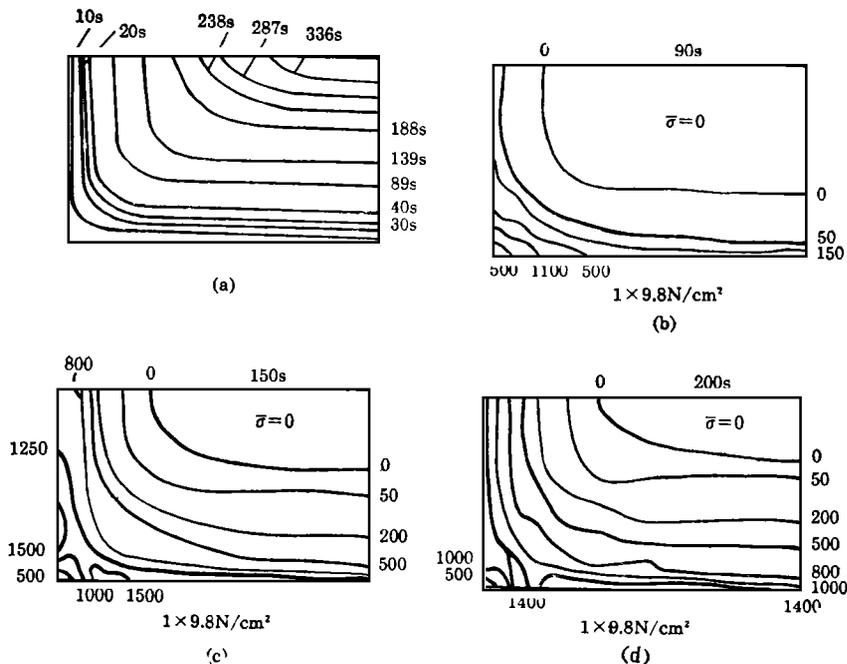
五、数 例

采用文献[4]中连续浇铸同样的数例, 铸坯截面尺寸为 15×27.4 cm, 各个时刻截面的温度场已有文献[4]求得, 现假设铸坯的材料性质如下:

$$T \quad 20^\circ\text{C} \quad 200^\circ\text{C} \quad 400^\circ\text{C} \quad 500^\circ\text{C} \quad 600^\circ\text{C} \quad 700^\circ\text{C} \quad 750^\circ\text{C}$$

| | | | | | | | |
|--------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| $E(9.8\text{N/cm})$ | 2×16 | 1.6×10 | 8×10 | 3×10 | 4×10 | 1×10 | 10 |
| $E(9.8\text{N/cm})$ | 2×10 | 1.6×10 | 8×10 | 3×10 | 4×10 | 10 | 10 |
| $\sigma(9.8\text{N/cm})$ | 2000 | 1900 | 1200 | 900 | 600 | 100 | 10 |
| α | 1.6×10 | 1.2×10 | 0.6×10 | 0.3×10 | 1×10 | 1×10 | 1×10 |

认为材料在 750°C 以上早已超过再结晶温度,因此在此温度以上无内应力存在。当不考虑相变时,铸坯截面上的热弹塑性应力分布如图3所示,其分布规律是合理的。如果能比较正确的给出高温中的材料质常数和相变有关数据,用上面方法也能计算考虑相变情况下的热弹塑性蠕变应力。



(a)不同时刻凝固线位置(1/4截面) (b), (c), (d)不同时刻截面应力分布(1/4截面)

图 3

参 考 文 献

- [1] Inoue, T. and Wang Zhi gang, Coupling between stress, temperature, and metallic structures during processes involving phase transformation, *Materials Science and Technology*, 1 (1985).
- [2] Cenis, S., E. Gantier, A. Simon and G. Beck, Stress-phase-transformation interactions—basic principles, modelling, and calculation of internal stresses, *Materials Science & Technology*, 1 (1985).
- [3] Sjostrom, S., Interactions and constitutive models for calculating quench stresses in steel, *Materials Science & Technology*, 11 (1985).
- [4] 赵兴华、陈小第, 带相变的连续浇铸铸坯温度场分析, 上海工业大学科技报告(1992).
- [5] Sngder, D. and K. J. Bathe, A solution procedure for thermo-elastic-plastic and creep problems, *Nuclear Engineering Design*, 64 (1981).

Rudimental Equations for Thermo-Elasto-Plastic Stress Analysis during Continuous Casting with Phase Change

Zhao Xing-hua Cheng Xiao-di

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

Coupled relations between temperature, phase transformation and stress have been discussed here in the present paper. Thermo-elasto-plastic constitutive equations including creep and iterative finite element formulation during continuous casting with phase change have also been presented.

Key words phase transformation, thermo-elasto-plasticity, stress