应用数学和力学，第 15 卷第 3 期（1994 年 3 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

广义相对论之守恒定律与重力波辐射*

林 汝 耀

（香港理工学院，1993年 1 月18日收到）

摘 要

本文证明爱因斯坦之广义相对论运动方程能演变成为物质守恒定律。虽然获得的重力场能量动量张量相等于Landau-Lifshitz所得的，但演变过程之物理概念是不同的。除此之外，本文分别从物体运动方程和测地线方程着手，提供了两个寻找重力波辐射的方法。

关键词 广义相对论 物体运动方程 测地线方程

一、引 言

根据爱因斯坦的狭义相对论，物体之动量方程在平坦的时空上面能写成

$$T^{ab}{}_{,b}=0 \tag{1.1}$$

这里 T^{ab}是物质和场（重力场除外）的动量能量张量。能量和动量在(1.1)式中是守恒的。广而言之，物体在重力场作用下之动量方程是

$$T^{a}{}_{;b}^{b}=0 \tag{1.2}$$

这正是爱因斯坦在广义相对论中提出的物体运动方程。这方程可展开为

$$(-g)^{-1/2}\frac{\partial(T^{a}{}_{b}(-g)^{-1/2})}{\partial x^{a}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ac}}{\partial x^{b}}T^{ac}=0 \tag{1.3}$$

Landau和Lifshitz(1975)曾有这样论断："this equation does not generally express any conservation law whatever. This is related to the fact that in a gravitational field the four momentum of the matter alone must not be conserved, but rather the four momentum of matter plus gravitational field; the latter is not included in the expression for T^{ab}." Carmeli 等(1990)也曾说过："…the Vanishing of the covariant divergence does not, in general, constitute a continuity eguation, and consequently is not a manifestation of a conservation law in the usual sense." 这就是说，我们不能把式(1.2)写为

$$(T^{ab}+t^{ab})_{,b}=0 \tag{1.4}$$

式中 t^{ab}是对称张量（赝张量）。

---

* 余燊推荐。

二、Landau-Lifshitz守恒定律

爱因斯坦理论中有一个概念，困难是欠缺一个适当的守恒定律。他曾想过，在广义相对论中物质和引力场之间应存在一个守恒定则："…surely, one has to require both matter and gravitational field to satify together the energy-momentum conservation laws."为获得引力场和物质有关的守恒的四维总动量，Landau和 Lifshitz(1947)发明了一反称张量h^{abc}，有以下的关系

$$h^{abc}=\frac{\partial}{\partial x^d}\lambda^{abcd} \tag{2.1}$$

$$\lambda^{abcd}=\frac{c^4}{16\pi G}(-g)(g^{ab}g^{cd}-g^{ac}g^{bd}) \tag{2.2}$$

在平坦的的时空中，有

$$(-g)T^{ab}=\frac{\partial h^{abc}}{\partial x^c} \tag{2.3}$$

为了获得与式(1.4)类似的表达式，他们在式(2.3)的左边加上$(-g)t^{ab}$为任意参考坐标的等式

$$(-g)(T^{ab}+t^{ab})=\frac{\partial h^{abc}}{\partial x^c} \tag{2.4}$$

t^{ab}与b和c对称，它称为Landau-Lifshitz赝张量，是引力场能量动量的表示。式(2.4)扩散为

$$[(-g)(T^{ab}+t^{ab})]_{,b}=0 \tag{2.5}$$

这等式满足了守恒定律之要求，但推导过程带有点儿人为成份。

三、广义相对论之守恒定律

我们将利用微分的方法从运动方程中去推导有关的守恒定律。第二 Bianchi 等式缩并的结果是产生物体运动方程。用微分表示成

$$D{*T^a}=0 \tag{3.1}$$

式中的D是绝对外微分，$*$是Hodge star标记；$*T_a$是物质能量动量的三次式。式(3.1)能写为

$$d\,{*T^a}+\omega^a{}_b\wedge{*T^b}=0 \tag{3.2}$$

爱因斯坦方程是

$$-\frac{1}{2}\Omega^{bc}\wedge\eta^{bca}=8\pi G\,{*T^a} \tag{3.3}$$

式中 $\eta^{ab}={*(\theta^a\wedge\theta^b)}$和$(\theta^a)$为四维框架场，弯曲式是

$$\Omega^{bc}=d\omega^{bc}-\omega^b{}_e\wedge\omega^{ec} \tag{3.3$'$}$$

上述微分方程式可在Straumann(1984)和Thirring (1986) 的书中找到。把 (3.3) 代入(3.2)得

$$d{}^*T^a+\omega^a{}_d\wedge\left(-\frac{1}{16\pi G}\eta^{dbc}\wedge\Omega_{bc}\right)=0 \tag{3.4}$$

(3.3)的绝对外微分是为缩并的 Bianchi 等式。因为$Dy^{abc}=0$，所以爱因斯坦方程变为

$$d(\eta^{abc}\wedge\Omega_{bc})=-\omega^a{}_b\wedge(\eta^{dbc}\wedge\Omega_{bc}) \tag{3.5}$$

利用$\eta^{abc}=\eta^{abcd}\theta_d$(如Straumann(1984)所做)，把式(3.5)代入(3.4)，得

$$d{}^*T^a+\frac{1}{16\pi G}d(\eta^{abcd}\theta_d\wedge\Omega_{bc})=0 \tag{3.6}$$

这公式正是爱因斯坦方程的外微分。但是，式(3.6)是由式(3.1)推导出来的，即是说它是从物体运动方程中推出，并不是纯粹爱因斯坦方程之外微分。

下面，我们采用一般书本所作的步骤去寻找引力场能量动量张量。Einstein-Cartan方程的弯曲式为

$$\Omega_{bc}=d\omega_{bc}-\omega_{eb}\wedge\omega^e{}_c \tag{3.7}$$

因此运动方程可写成

$$d{}^*T^a+\frac{1}{16\pi G}\eta^{abcd}d\left(\theta_d\wedge d\omega_{bc}-\theta_d\wedge\omega^e{}_c\right)=0 \tag{3.8}$$

考虑括号中的第一组（假设没有挠率张量）可以写为

$$\begin{aligned}\theta_d\wedge d\omega_{bc}&=d(\theta_d\wedge\omega_{bc})+d\theta_d\wedge\omega_{bc}\\&=d(\theta_d\wedge\omega_{bc})+\omega_{ed}\wedge\theta^e\wedge\omega_{bc}\end{aligned} \tag{3.9}$$

把这式代入(3.8)，根据Poincaré引理，(3.9)式中的第一组将消失，因此我们得到

$$d{}^*T^a-\frac{1}{16\pi G}\eta^{abcd}d(\omega_{eb}\wedge\omega^e{}_c\wedge\theta_d-\omega_{bc}\wedge\omega_{ed}\wedge\theta^e)=0 \tag{3.10}$$

式中的第二组正是引力场的Landau-Lifshitz能量动量赝张量，而只不过是用微分表示出来的。

上式能写成

$$d{}^*(T^a+t^a_{L-L})=0 \tag{3.11}$$

式中 t^a_{L-L}是引力场的Landau-Lifshitz能量动量三次微分式。上式的推导表示

$$T^a{}_{;}{}^b{}_b=0\Rightarrow[(-g)(T^{ab}+t^{ab})]_{,b}=0 \tag{3.12}$$

以坐标来表达。这个连续性方程正是式（1.3）的结果。在此需要强调的是那个 Landau-Lifshitz赝张量的推导是不同于一般微分式的方法。然而，我们从运动方程(3.1)着手，利用场方程(3.3)获得这连续方程(3.10)，基础上的物理概念是不同的。

理论上，那能量动量赝张量的选择是依据个人主张。也就是说，引力场赝张量并不是唯一而可满足式(2.1)和(2.4)。正如Denisov等人(1983)说过："however diversified the energymomentum pseudotensor might be, in terms of their properties they all possess the same feature, i. e. any energy-momentum pseudotensor can be made to vanish at any point in space."Landau和Lifshitz(1975)的解释是当一测试物体作自由降落时，体验不到引力场，这代表那赝张量消失。但在Landau和Lifshitz的推导式中并没有明显地表达出来。在自由下落系时，affine 联络的消失表

示赝张量是零（在这参考系时，物质T^{ab}好像在平坦时空中运动一样），这样便能满足爱因斯坦的等效原理。

四、运动方程之线性化

上面说过，在引力场当中，Landau-Lifshitz 的守恒定律是物体运动方程之结果。理论上来说，我们应该从运动方程中找重力波辐射。根据余桑(1992)"Equation of Motion of Particles (or Material Bodies) Should Induce Radition."第一章式(1.3)的广义运动方程是

$$(-g)^{-1/2}\frac{\partial(T^a{}_b(-g)^{1/2})}{\partial x^a}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ac}}{\partial x^b}T^{ac}=0 \tag{4.1}$$

式中第一组是物体在平面空间中的运动方程，第二组可解释为由于引力场g^{ab}所产生的"辐射"。我们可以用平常的"弱场近似"方法去简化这方程。那度规可写成

$$g_{ab}=\eta_{ab}+h_{ab} \qquad (|h_{ab}|\ll 1) \tag{4.2}$$

由于$(-g)^{1/2}=[-(\eta+h)]^{1/2}\simeq 1$，(4.1)的线性化是

$$\frac{\partial T^a{}_b}{\partial x^a}-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ac}}{\partial x^b}T^{ac}=0 \tag{4.3}$$

我们知道，爱因斯坦方程的线性化场方程是

$$-\Box\gamma^{ab}=2\kappa T^{ab},\quad \kappa=\frac{8\pi G}{c^4} \tag{4.4}$$

式中 γ^{ab}是h^{ab}的trace reverse tensor，定义为

$$\gamma_{ab}=h_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}h \tag{4.5}$$

把式(4.4)、(4.5)代入(4.3)，得

$$T^a{}_{b,e}+\frac{1}{4\kappa}(h_{ac,b}h^{ac,e})_{,e}-\frac{1}{4\kappa}\left\{\left(\frac{1}{2}h_{ac,b}\eta^{ac}h^{,e}\right)_{,e}\right.$$

$$\left.+h_{ac,be}\gamma^{ac,e}\right\}=0 \tag{4.6}$$

式中第二组正等于引力场近似的动量能量赝张量的散度，从 Landau—Lifshitz (1975) "The Classical Theory of Fields"一书的式(107.11)中可找到

$$t_b^e=\frac{c^4}{32\pi G}h_{ac,b}h^{ac,e} \tag{4.7}$$

而其余的可解释为辐射的纠正。如果我们假设这一纠正非常小的话，我们有以下的积分守恒定律

$$P^a=\frac{1}{2}\int(T^{ab}+t^{ab})dS_b \tag{4.8}$$

因此，那四极辐射公式是

$$-\frac{dE}{dt}=\frac{G}{45c^5}\left(\frac{d^3D_{kl}}{dt^3}\right)^2 \tag{4.9}$$

我们已表达出线性化的物质运动方程，包含了重力波辐射。很明显，这推导并不依赖引力场赝张量，因此可避免有关赝张量的批评议论。重要的是这重力波辐射理论是直接从物体

运动方程中推导出来的．总的说来，我们若想寻找一物理体系有关的辐射时，应先研究有关的运动方程，正如电磁辐射来自电荷的加速运动．

五、测地线方程之线性化

我们已经表示出物体运动方程中可包括重力波辐射．而理论上，测地线方程应同样拥有这特性．

测地线方程可写成以下形式

$$\frac{d^2x_b}{ds^2}+\frac{1}{2}(g_{bc,a}+g_{ab,c}-g_{ac,b})\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^c}{ds}=0 \tag{5.1}$$

在经典力学中，此式可表示为重力加速度．而若用经典力学的“力”去表示的话，须将式(5.1)乘以静止质量密度ρ．将以下完美流体方程

$$T^{ac}=\rho\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^c}{ds} \tag{5.2}$$

代入式(5.1)，则(5.1)变为

$$\frac{d^2x_b}{ds^2}\rho+\frac{1}{2}(g_{bc,a}+g_{ab,c}-g_{ac,b})T^{ac}=0 \tag{5.3}$$

考虑括号中第三组，利用上一节同样的线性化方法如式(4.2)、(4.4)和(4.5)，它能写成

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}g_{ac,b}T^{ac}&=\frac{1}{4\kappa}h_{ac,b}\Box\gamma^{ac}=\frac{1}{4\kappa}h_{ac,b}\gamma^{ac,e}{}_{,e}\\ -\frac{1}{2}g_{ac,b}T^{ac}&=\frac{1}{4\kappa}(h_{ac,b}h^{ac,e})_{,e}\\ &\qquad-\frac{1}{4\kappa}\left\{\left(\frac{1}{2}h_{ac,b}\eta^{ac}h^{,e}\right)_{,e}+h_{ac,be}\gamma^{ac,e}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

我们得到如式(4.6)同样的方程．因此测地线方程亦能拥有重力波四极辐射．

六、结　　论

我们所表示出的爱因斯坦广义相对论拥有物质守恒定律，这正是物体和重力场一起之运动方程的结果．而获得的重力场能量动量张量正是Landau—Lifshitz所发表的赝张量．广义来说，物体的运动方程和测地线方程能带有重力波辐射，第四和第五节已说明这一点．本文章说出重力四极辐射只是重力波辐射的一部份．如欲详细得知重力波辐射，我们应研究式(4.6)和(5.4)其余的组别，同时还应采取更完美的近似方法．

致谢　作者非常感谢余桑教授的鼓励和悉心指导．

参 考 文 献

[1] Carmeli, M., Leibowitz and N. Nissani, Gravitation: SL (2, C) Gauge Theory and Conservation Laws, *World Scientific* (1990).

[2] Denisov, V. I. and A. A. Logunov, *Gravitation and Elementary Particle Physics*, Mir Publishers (1983).

[3] Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Pergamon Press (1975).

[4] Straumann, N., *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer-Verlag (1986).

[5] Thirring, W., *Classical Field Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag (1986).

[6] Yu, X., *Astrophysics and Space Science*, (Theory of Gravitational Radiation of the (Ω, A_{ab})-Field)(1992). (to appear)

The Conservation Law and the Radiation of General Relativity

Lam Yu-yiu

(*Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic, Hong Kong*)

Abstract

This paper presents the conservation law of Einstein's General Relativity, in whch the continuity equation of matter and gravitational field is implicitly derived from the equation of the motion of matter. Although the obtained energy-momentum tensor is the same as the Landau-Lifshitz pseudotensor, the physical and conceptual foundation are different. Two alternative methods to obtain the gravitational radiation are proposed in this paper as well. The radiation will be derived from the equation of the motion of matter and geodesic equation separately.

Key words general relativity, equation of motion of matter, geodesic equation