应用数学和力学，第15卷第3期（1994年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

泊松类型方程边界元解法*

刘　希　云

（南京理工大学，1992年10月5日收到）

摘　要

本文采用高阶拉普拉斯算子基本解将泊松类型方程的区域积分全部变换成边界积分，使计算问题的维数减少一维。通过斯托克斯方程的算例，表明本文所用的方法是有效的方法。

关键词　流体力学　边界元法　斯托克斯方程

一、前　　言

边界元方法是七十年代兴起的一种新方法，它是英国Southampton大学C.A.Brebbia等人首创（文[1]）。边界元法解拉普拉斯方程是最理想的方法，它可以将区域积分变换成完全边界积分，但对于简单的泊松方程仍含有部分区域积分，这区域积分虽不含有求解的未知数，但仍要在区域内进行数值积分（文[1]）。

本文采用高阶拉普拉斯算子基本解将泊松类型方程的区域积分变成完全边界积分，对于斯托克斯方程可以写成泊松方程型式，本文的数值解与文[2]的解析解非常吻合。

二、泊松方程边界元解法

泊松方程

$$\nabla^2 u=b_1 \tag{2.1}$$

式中　b_1为已知函数。如果(ξ,η)位于边界上，文[1]给出其解为

$$\frac{1}{2}u(\xi,\eta)=\int_S\left(u\frac{\partial p_1}{\partial\eta}-p_1\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)dS+\int_\Omega b_1p_1d\Omega \tag{2.2}$$

如果(ξ,η)位于区域内，文[1]给出

$$u(\xi,\eta)=\int_S\left(u\frac{\partial p_1}{\partial\eta}-p_1\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)dS+\int_\Omega b_1p_1d\Omega \tag{2.3}$$

式中　Ω为求解区域，S为Ω边界，S的单位外法线为n，p_1为拉普拉斯方程基本解，对于二维问题，

$$p_1=\frac{1}{4\pi}\ln r^2$$

* 吴望一推荐.

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$$

文[1]给出的(2.2)式和(2.3)式仍含有区域积分$\int_\Omega b_1p_1d\Omega$，这区域积分虽不含有求解的未知数$u$，但仍需要对区域进行离散数值积分。

如果令

$$p_1=\nabla^2p_2$$

那么由格林公式，(2.2)式和(2.3)式的区域积分可以写成

$$\begin{aligned}\int_\Omega b_1p_1d\Omega&=\int_\Omega b_1\nabla^2p_2d\Omega\\&=\int_S\left(b_1\frac{\partial p_2}{\partial\eta}-p_2\frac{\partial b_1}{\partial\eta}\right)dS+\int_\Omega p_2\nabla^2b_1d\Omega\end{aligned}\tag{2.4}$$

如果再令

$$p_2=\nabla^2p_3$$
$$\nabla^2b_1=b_2$$

那么(2.4)式的区域积分又可写成

$$\begin{aligned}\int_\Omega p_2\nabla^2b_1d\Omega&=\int_\Omega b_2\nabla^2p_3d\Omega\\&=\int_S\left(b_2\frac{\partial p_3}{\partial\eta}-p_3\frac{\partial b_2}{\partial\eta}\right)dS+\int_\Omega p_3\nabla^2b_2d\Omega\end{aligned}\tag{2.5}$$

如此类推，(2.2)式和(2.3)式的区域积分可写成

$$\int_\Omega b_1p_1d\Omega=\sum_{j=1}^{n}\int_S\left(b_j\frac{\partial p_{j+1}}{\partial\eta}-p_{j+1}\frac{\partial b_j}{\partial\eta}\right)dS+\int_\Omega p_{n+1}\nabla^2b_nd\Omega\tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}&b_{j+1}=\nabla^2b_j\\&\nabla^2p_{j+1}=p_j\end{aligned}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\right\}\tag{2.7}$$

p_1为拉普拉斯方程基本解，这里称为一阶拉普拉斯算子基本解，p_j称为j阶拉普拉斯算子基本解。下面求p_j表达式。由于

$$\nabla^2p_2=p_1$$
$$p_1=\frac{1}{4\pi}\ln r^2$$

那么可求得

$$p_2=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{4}r^2(\ln r^2-2)\tag{2.8}$$

又由

$$\nabla^2p_3=p_2$$

可得

$$p_3=\frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{64}r^4(\ln r^2-3)\tag{2.9}$$

比较p_1，p_2和p_3的表达式，可以看出p_j有下列形式，即

$$p_j=\frac{1}{4\pi}C_jr^{2(j-1)}\ (\ln r^2-D_j)\tag{2.10}$$

下面确定系数C_j和D_j。

$$\frac{\partial p_j}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\ C_jr^{2(j-2)}[(j-1)\ln r^2-(j-1)D_{j+1}]2(x-\xi)$$

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial x^2}=\frac{1}{4\pi}C_j r^{2(j-3)}[(j-1)(j-2)\ln r^2-(j-1)(j-2)D_j+2j-3]4(x-\xi)^2$$

$$+\frac{1}{4\pi}C_j r^{2(j-2)}[(j-1)\ln r^2-(j-1)D_j+1]2$$

$$\frac{\partial^2 p_j}{\partial y^2}=\frac{1}{4\pi}C_j r^{2(j-3)}[(j-1)(j-2)\ln r^2-(j-1)(j-2)D_j+2j-3]4(y-\eta)^2$$

$$+\frac{1}{4\pi}C_j r^{2(j-2)}[(j-1)\ln r^2-(j-1)D_j+1]2$$

所以有

$$\nabla^2 p_j=\frac{1}{4\pi}C_j 4(j-1)^2\left[\ln r^2-D_j+\frac{2}{j-1}\right] \tag{2.11}$$

比较(2.7)式，(2.10)式和(2.11)式有

$$4(j-1)^2 C_j=C_{j-1}$$

$$D_j-\frac{2}{j-1}=D_{j-1}$$

即

$$\left.\begin{aligned}&C_j=\frac{1}{4(j-1)^2}C_{j-1}\\&D_j=D_{j-1}+\frac{2}{j-2}\end{aligned}\right\}$$

由于$C_1=1$，$D_1=0$，所以有

$$\left.\begin{aligned}&C_j=\frac{1}{4^{j-1}(j-1)!}\\&D_j=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots,\ +\frac{1}{j-1}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

从(2.12)式看到，C_j随j增加很快趋于零，如果b_1的高阶微分不发散，那么n取适当大，那么(2.6)式的区域积分就可以略去，一般取$n=4$就可以得到满意的解。这样(2.1)式对应的(2.2)式和(2.3)式的解可以写成

$$\frac{1}{2}u(\xi,\ \eta)=\int_S\left(u\frac{\partial p_1}{\partial\eta}-p_1\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)dS+\sum_{j=1}^{n}\int_S\left(b_j\frac{\partial p_{j+1}}{\partial\eta}-p_{j+1}\frac{\partial b_j}{\partial\eta}\right)dS \tag{2.13}$$

$$u(\xi,\ \eta)=\int_S\left(u\frac{\partial p_1}{\partial\eta}-p_1\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)dS+\sum_{j=1}^{n}\int_S\left(b_j\frac{\partial p_{j+1}}{\partial\eta}-p_{j+1}\frac{\partial b_j}{\partial\eta}\right)dS \tag{2.14}$$

由(2.13)式在边界上离散，根据边界条件，求出边界上的u和$\partial u/\partial\eta$的值，知道边界上全部u值和$\partial u/\partial\eta$值，再由(2.14)式可求得区域内任一点（ξ，η）的u值。

三、斯托克斯方程的解

斯托克斯方程

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\mathbf{v}=\frac{1}{\mu}\nabla p\\&\nabla\cdot\mathbf{v}=0\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

(3.1) 式又可写成

$$\begin{cases}\nabla^2 p=0 & (3.2a)\\ \nabla^2\mathbf{v}=\dfrac{1}{\mu}\nabla p & (3.2b)\end{cases}$$

(3.2a) 为拉普拉斯方程，边界元解法为

$$\frac{1}{2}p(\xi,\ \eta)=\int_S\left(p\frac{\partial p_1}{\partial\eta}-p_1\frac{\partial p}{\partial\eta}\right)dS\tag{3.3}$$

(3.2b) 为泊松类型方程，这里取

$$\mathbf{b}_1=\nabla p$$

那么

$$\mathbf{b}_2=\nabla^2\mathbf{b}_1=\nabla^2(\nabla p)=\nabla(\nabla^2 p)=0$$

因此(2.6)式取$n=1$，即可得到精确解，即有

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}(\xi,\ \eta)=\int_S\left(\mathbf{v}\frac{\partial p_1}{\partial\eta}-p_1\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\eta}\right)dS+\frac{1}{\mu}\int_S\left(\nabla p\frac{\partial p_2}{\partial\eta}-p_2\frac{\partial\nabla p}{\partial\eta}\right)dS\tag{3.4}$$

$$v(\xi,\ \eta)=\int_S\left(\mathbf{v}\frac{\partial p_1}{\partial\eta}-p_1\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\eta}\right)dS+\frac{1}{\mu}\int_S\left(\nabla p\frac{\partial p_2}{\partial\eta}-p_2\frac{\partial\nabla p}{\partial\eta}\right)dS\tag{3.5}$$

给定边界条件，由(3.3)式求出边界上p和$\partial p/\partial\eta$的值，代入(3.4)式求出边界上$\mathbf{v}$和$\partial\mathbf{v}/\partial\eta$值，再由（3.5）式又可求区域内任一点的$\mathbf{v}$值。

四、算　　例

文[2]给出绕二维圆柱均匀剪切流的解析解为

$$\left.\begin{aligned}&u=2\left(\frac{1}{r}-r\right)\sin\theta+\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^3}\right)\sin3\theta\\&v=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^3}\right)\cos3\theta\\&p=-4\mu\frac{\sin2\theta}{r^2}\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&x=-r\cos\theta\\&y=r\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

按(4.1)式给出边界上p，u和v的值，取圆柱半径$R=1$，外边界$R_\infty=6$，$\mu=1$。计算出

边界上$\frac{\partial p}{\partial \eta}$，$\frac{\partial u}{\partial \eta}$和$\frac{\partial v}{\partial \eta}$。并计算出区域内半径为1.5的圆周线上的$u$，$v$和$p$的值，计算结果如图1到图6所示。图中符号"○"为文[2]解析解，"×"为本文数值解。从图中看出二者非常一致。

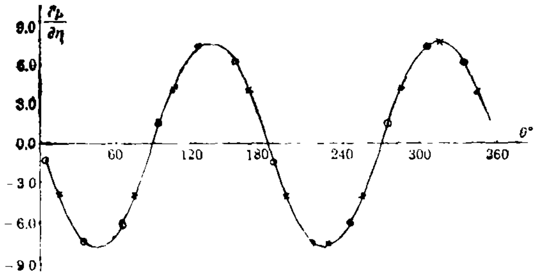

图 1 物面上$\frac{\partial p}{\partial \eta}$

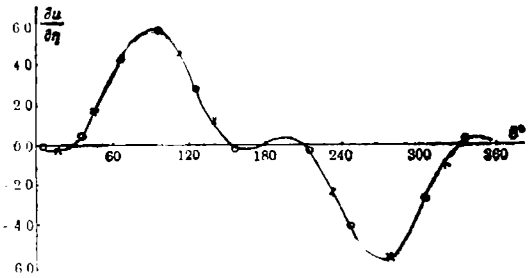

图 2 物面上$\frac{\partial u}{\partial \eta}$

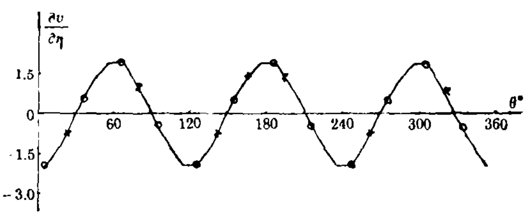

图 3 物面上$\frac{\partial v}{\partial \eta}$

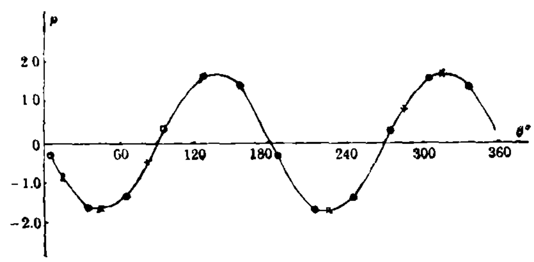

图4 半径1.5圆周线p分布

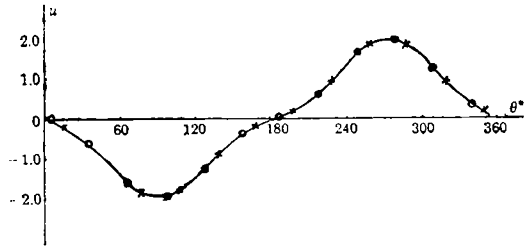

图5 半径1.5圆周线上u分布

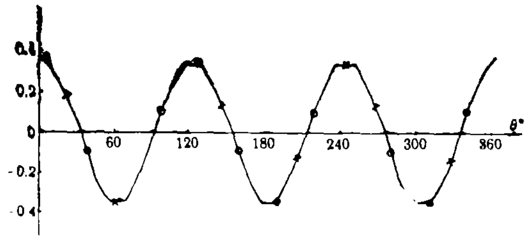

图6 半径1.5圆周线上v分布

参 考 文 献

[1] Brebbia, C. A., 《边界元法的工程应用》(张治强译), 陕西科学技术出版社 (1985)。

[2] Milne-Thoson, L. M., 《理论流体动力学》 (李裕立等译), 北京, 机械工业出版社 (1984)。

Solution to the Form of Poission Equation by the Boundary Element Methods

Liu Xi-yun

(*Nanjing Univesity of Science and Technology, Nanjng*)

Abstract

In this paper, the domain integral of the form of poission equation is translated into the comPlete boundary integral by the fundamental solution of higher-order Laplace operator, the dimensions of the problem can be decreased one. The numerical examples for Stokes equations show that this method is effcient.

Key words fluid dynamics, boundary element method, Stokes equations