

在磁场作用下竖直通管中有限长液柱的粘性流体运动*

温功碧 孙克利

(北京大学力学系, 1992年10月19日收到)

摘 要

血栓的形成与血液动力学有密切关系。Chandler 环的实验及进一步的研究表明, Chandler 环中下弯月面处血栓的形成或许是因为回流冲击下弯月面, 使血小板和红细胞发生聚集所致。本文研究了竖直通管中有限长液柱的粘性流体在磁场作用下的流动状况, 应用有限差分方法进行了数值求解。计算结果表明, 在适当的磁场强度下, 管的下半部分管轴附近的轴向回流速度较未加磁时有所减弱, 从而减轻了回流对下弯月面的撞击作用, 可以有效地防止下弯月面处血栓的形成, 而且磁场越强, 这种减弱作用越明显。这一结果为进一步探求血栓的防治及其形成机制的实验研究有一定指导意义。

关键词 磁场作用 血栓 粘性流动

一、引 言

冠状动脉血栓和中风是人类死亡的两个主要原因。两者都是由于血细胞聚集成斑块而阻塞血管所致。因此研究血栓形成的机理及其外部环境一直是医生们感兴趣的问题。血栓的形成与血液动力学有密切关系。近年来研究血栓形成与血液动力学因素(如速度梯度)的相互作用已成为生物医学工程中最热门的课题之一。

为了在体外研究血栓形成的机制, 1985年Chandler发明了一种人工产生血栓的器械, 这种器械由一定口径的塑料管首尾相接围成一圆圈, 在塑料管内盛半圈左右的血液, 圆管以一定角速度在铅垂平面内旋转(图1a), 启动后不久就可以在下弯月面处形成血栓, 其构造和人体内形成的血栓基本一致。1978年钱民全又制造了一种称之为旋转皮带环的装置(图1b), 把一塑料管象皮带一样套在两皮带轮上, 全血放在皮带的直线段上, 皮带轮以一定角速度旋转, 几分钟后发现下弯月面处也形成了血栓。为了探讨下弯月面处形成血栓的原因, 吴望一等人对上述两种流动求得了数值解^[1,2], 并对形成血栓的流体动力学条件进行了分析。

血栓的形成是一个十分复杂的生理过程, 其形成原因很多, 但研究表明^[3], 血栓形成的

* 吴望一推荐。

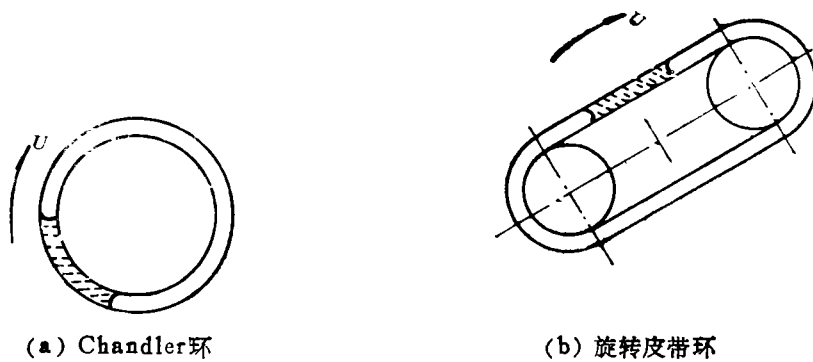


图 1

关键性事件是血小板聚集体的形成，聚集的血小板释放出 ADP (adenosine diophosphate)，ADP 反过来又促进血小板及红细胞的聚集，从而加速大的血小板聚集体的形成，最终形成血栓。根据这些结论及吴望一等人的研究成果，我们可以对下弯月面处形成血栓的原因作如下解释：当管壁抽动时，管内的有限长液柱内产生了强烈的迴流，液体以高速冲击下弯月面，在下弯月面处产生很大的速度梯度，由于血细胞密度略大于血浆的密度，在惯性作用下就可能有许多血细胞沉积在下弯月面处，由于细胞的新陈代谢释放出 ADP，ADP 引起血小板凝聚，形成血小板聚集体，最终导致血栓的形成。另外，由于冲撞引起的其它流体力学因素（如剪应力，浓度扩散等）的变化也使血细胞更易于聚集。

上述观点还有待于实验的进一步检验，最好的检验方法是设法改变流场，使得下弯月面处的撞击减轻，如实验观察到下弯月面处血栓的形成减弱或不发生，则上述观点得到了验证。而且一旦证实了血栓形成与流体环境之间的关系，就可以采用控制流场的方法有效地防止血栓的形成，这在临床上有很重要的价值。本文采用外加磁场的方法（如在管壁周围缠绕直流线圈，如图 2 所示），对此问题进行了初步探索。通过数值求解，得到几种不同强度磁场对流动的影响。为了简单起见，本文研究了竖直细管中有限长液柱的流动。计算结果表明，选择适当的磁场可以减小下弯月面处的对流速度，从而为下一步的实验研究提供了理论指导和依据，并在磁疗血栓的问题上作了一点探索。

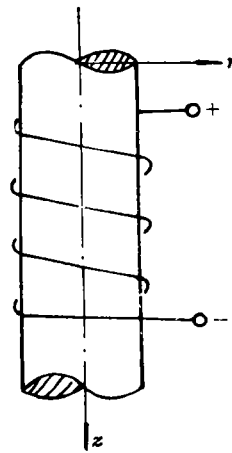


图 2 磁场加法和坐标系

二、边值问题

本文的模型与 [2] 类似，考虑一半径为 a 的无限长直管中有一长为 $2L$ 的有限长液柱，外加恒定磁场，如图 2 所示。设管壁以速度 U 向上运动，液柱在重力、表面张力、粘性力和磁场力的综合作用下形成轴对称的迴流运动，任一截面上平均速度为零。

假定血液是粘性、不可压的牛顿流体，具有弱磁性。本文采用高斯单位制，则磁流体力学方程组^[4]为：

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] &= \rho g \mathbf{k} + \text{grad } p^* + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mu \Delta \mathbf{v} & (2.1) \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{H} &= (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \text{rot}(v_m \text{rot} \mathbf{H}) & (2.2) \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0 & (2.3) \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0 & (2.4) \end{aligned} \right.$$

这里 t 为时间, \mathbf{v} , \mathbf{H} 分别为速度和磁场强度向量。
式中

$$p^* = p + \frac{|\mathbf{H}|^2}{8\pi} \quad (2.5)$$

$g = 981 \text{ cm/s}^2$ 为重力加速度, \mathbf{k} 为重力方向。

ν_m 为磁粘性系数,

$$\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad (2.6)$$

$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ 为真空中的光速。

σ 为流体的电导率, 全血的 σ 取值有一定范围^[5], 为便于计算, 取定 $\sigma = 0.8 \text{ s/m}$, 用高斯单位制表示, 有

$$\sigma = 0.8 \times \frac{9 \times 10^{11} \text{ CGSE}}{100 \text{ cm}} = 7.2 \times 10^9 \text{ 1/s}$$

$$\therefore \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma} = \frac{3^2 \times 10^{20} \text{ cm}^2/\text{s}^2}{4\pi \times 7.2 \times 10^9 \text{ 1/s}} \approx 10^{10} \text{ cm}^2/\text{s}$$

方程(2.1)的右端第三项是由洛伦兹力演化而来的, 表示导电液体在磁场中运动时受到磁场的的作用力。方程(2.2)表示导电流体与外加磁场相互作用后的磁场。

因所研究的问题是轴对称的, 本文采用柱坐标系 (z, r, θ) , 如图2所示。 \mathbf{v} 和 \mathbf{H} 可以写成分量形式!

$$\mathbf{v} = (\bar{u}, \bar{v}, 0) \quad \mathbf{H} = (\bar{H}_z, \bar{H}_r, 0) \quad (2.7)$$

引进无量纲量:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{r}}{a}, \quad z = \frac{\bar{z}}{a}, \quad u = \frac{\bar{u}}{U}, \quad v = \frac{\bar{v}}{U}, \quad H_r = \frac{\bar{H}_r}{H_0}, \\ H_z &= \frac{\bar{H}_z}{H_0}, \quad t_1 = \frac{U}{a} \bar{t}, \quad t_2 = \frac{\nu_m}{a^2} \bar{t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中 H_0 为特征磁场强度 (后文将给出具体形式), 为了计算方便, 对(2.1)取旋度, 无量纲化后得(2.1)和(2.2)的标量形式方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t_1} + \frac{\partial(\xi u)}{\partial z} + \frac{\partial(\xi v)}{\partial r} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{\xi}{r^2} \right) \\ &+ \frac{R_0}{4\pi} \left(H_r \frac{\partial \xi}{\partial r} + H_z \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{H_r \xi_H}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial t_2} + R_m (\mathbf{v} \cdot \nabla H_r - \mathbf{H} \cdot \nabla v) = \Delta H_r - \frac{H_r}{r^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t_2} + R_m(\mathbf{v} \cdot \nabla H_z - \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \Delta H_z \tag{2.11}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{H_0^2}{\rho U^2}, Re = \frac{Ua}{\nu}, R_m = \frac{Ua}{\nu_m} = Re \frac{\nu}{\nu_m} \\ \xi &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r}, \xi_H = \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \\ \mathbf{v} &= (u, v, 0), \mathbf{H} = (H_z, H_r, 0) \end{aligned} \right\} \tag{2.12}$$

R_m 称为磁雷诺数，因 R_m 很小($\approx 10^{-12}$)，故在无量纲化方程时，涡旋场和磁场取了不同的特征时间，后者极大地放大了时间，大大提高了收敛速度，避免了增加时间步长带来的不稳定性。另外， ν 为运动学粘性系数， Re 为雷诺数。将(2.2)式展开化为(2.10)、(2.11)时，已用到了(2.4)式。根据磁场的性质^[4]，只要初始时刻(2.4)式满足，则由(2.10)、(2.11)求出的任一时刻的磁场都自动满足。

引进流函数 ψ ，即令

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{2.13}$$

则

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\xi \tag{2.14}$$

速度场满足的边条件与[2]基本相同，即

$$\left. \begin{aligned} r=0: \psi=0, \xi=0 \\ r=1: u=-1, v=0, \varphi=0 \end{aligned} \right\} \tag{2.15}$$

自由面上作一级近似，将边条件写在它的投影面上，即

$$z=0 \text{ 或 } 2\lambda: \psi=0, \xi=0 \tag{2.16}$$

其中 $\lambda = \frac{L}{a}$.

壁面上的旋度边条件： $\xi = \xi_a$ 。

ξ_a 为固壁上的涡量，经迭代求解确定。

磁场的边条件和初条件由在管壁周围缠绕直流线圈产生的磁场来确定，线圈对称地位于液柱的中部(图2)。设线圈总长为 \tilde{l} ，总匝数为 n_0 ，线圈半径 R_0 。设线圈是紧密排列的，因而可以近似看作一系列圆线圈并排起来组成的。根据毕奥、萨伐尔定律^[6]，第 j 个圆线圈在空间任一点 P 产生的磁感应强度为：

$$\mathbf{B}_j = - \frac{I}{c} \oint_{\tilde{l}_j} \frac{\mathbf{r} \times d\tilde{l}}{r^3}$$

这里 \mathbf{r} 是线圈上微元 $d\tilde{l}$ 到场点 P 的矢量(图3)， r 为它的长度， I 为电流强度，单位为CGSE，又因为 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

这里 μ 为磁导率，对非铁磁性的全血近似有：

$$\mu = 1,$$

所以有

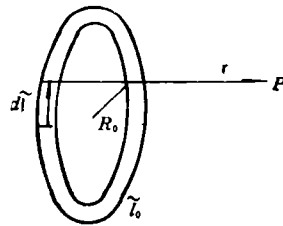


图3 线圈示意图

$$\vec{H}_j = \vec{B}_j = -\frac{I}{c} \oint_{l_j} \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{r^3} \quad (2.17)$$

令

$$r_0 = \frac{R_0}{a}, \quad H_0 = \frac{4\pi I}{ca}, \quad H_j = \frac{\vec{H}_j}{H_0}, \quad r = \frac{\vec{r}}{a}, \quad r = \frac{|\vec{r}|}{a}$$

则

$$\vec{H}_j = \frac{\vec{H}_j}{H_0} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{R=r_0} \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{r^3} \quad (2.18)$$

n_0 匝线圈产生的总磁场(无量纲形式)为:

$$\vec{H} = \sum_{j=1}^{n_0} \vec{H}_j = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n_0} \oint_{l_j} \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{r^3} \quad (2.19)$$

这样计算出的 \vec{H} 作为磁场的初值,它在边界上的值作为边条件,在 $r=0$ 上,由于对称性,取

$$H_r = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0$$

三、数值方法

由方程可以看出,所要求解的边值问题是非线性的,而且速度场和磁场相互耦合,所以只能数值求解.本文采用差分方法迭代求解.由对称性,只求解一半区域.(9)式中对流项采用第二迎风差分格式^[2],这样,(2.9)式差分格式为:

$$\begin{aligned} \xi_{i,j}^{k+1} = & \xi_{i,j}^k - \Delta t_1 (ADQR + ADQX) + \frac{\Delta t_1}{Re} \left(\frac{\xi_{i+1,j}^k + \xi_{i-1,j}^{k+1} - 2\xi_{i,j}^k}{\Delta z^2} \right. \\ & + \frac{\xi_{i,j+1}^k + \xi_{i,j-1}^{k+1} - 2\xi_{i,j}^k}{\Delta r^2} + \frac{\xi_{i,j+1}^k - \xi_{i,j-1}^{k+1}}{2r_j \Delta r} - \frac{\xi_{i,j}^k}{r_j^2} \left. \right) + \frac{R_0}{4\pi} \Delta t_1 \\ & \cdot \left[H_{r,i,j} \frac{\xi_{H,i,j+1} - \xi_{H,i,j-1}}{2\Delta r} + H_{z,i,j} \frac{\xi_{H,i+1,j} - \xi_{H,i-1,j}}{2\Delta z} - \frac{H_{r,i,j} \xi_{H,i,j}}{r_j} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中

$$\begin{aligned} ADQR = & \frac{u_R \xi_R - u_L \xi_L}{\Delta r}, \quad u_R = \frac{u_{z,j+1} + u_{z,j}}{2}, \quad u_L = \frac{u_{z,j} + u_{z,j-1}}{2} \\ \xi_R = & \begin{cases} \xi_{i,j} & (u_R > 0) \\ \xi_{i,j+1} & (u_R < 0) \end{cases}, \quad \xi_L = \begin{cases} \xi_{i,j-1} & (u_L > 0) \\ \xi_{i,j} & (u_L < 0) \end{cases} \\ ADQX = & \frac{u_R \xi_R - u_L \xi_L}{\Delta z}, \quad \left(u_R = \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2}, \quad u_L = \frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} \right) \\ \xi_R = & \begin{cases} \xi_{i,j} & (u_R > 0) \\ \xi_{i+1,j} & (u_R < 0) \end{cases}, \quad \xi_L = \begin{cases} \xi_{i-1,j} & (u_L > 0) \\ \xi_{i,j} & (u_L < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$\xi_{i,j}^k$ 和 $\xi_{i+1,j}^{k+1}$ 分别代表 k 和 $k+1$ 时段 (i,j) 点上的 ξ 值, (i,j) 为均匀网格上的节点编号(图4),节点坐标

$$\begin{aligned} z_i = & (i-1)\Delta z \quad (i=1,2,\dots,N) \\ r_j = & (j-1)\Delta r \quad (j=1,2,\dots,M) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } \Delta z = \frac{2\lambda}{N-1}, \Delta r = \frac{1}{M-1}$$

(2.14)式采用松弛迭代法求解, 差分格式为:

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{k+1} = & (1-\omega) \psi_{i,j}^k + \omega \left\{ \frac{1}{2(1+\beta)} (\psi_{i+1,j}^k \right. \\ & + \psi_{i-1,j}^k + \beta^2 \psi_{i,j+1}^k + \beta^2 \psi_{i,j-1}^k) \\ & \left. - \frac{\Delta z \cdot \beta}{2r_j} (\psi_{i,j+1}^k - \psi_{i,j-1}^k) + r_j \Delta z^2 \xi_{i,j} \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

这里 $\beta = \frac{\Delta z}{\Delta r}$, k 和 $k+1$ 为迭代步数. ω 是松

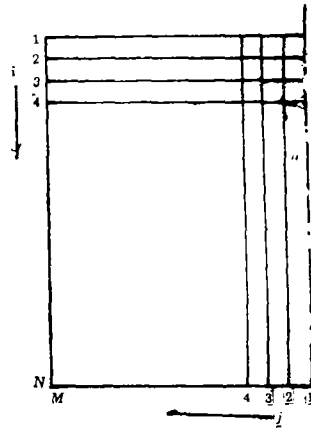


图4 网格划分

驰因子, 经过数值实验, 本文 ω 取为1.7.

类似地, (2.10)和(2.11)的差分方程为:

$$\begin{aligned} H_{r,i,j}^{k+1} = & H_{r,i,j}^k - R_m \Delta t_2 \left[u_{i,j} \frac{H_{r,i+1,j}^k - H_{r,i-1,j}^k}{2\Delta z} + v_{i,j} \frac{H_{r,i,j+1}^k - H_{r,i,j-1}^k}{2\Delta r} \right. \\ & \left. - H_{z,i,j}^k \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta z} - H_{r,i,j}^k \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{\Delta r} \right] \\ & + \Delta t_2 \left[\frac{H_{r,i+1,j}^k + H_{r,i-1,j}^k - 2H_{r,i,j}^k}{\Delta z^2} + \frac{H_{r,i,j+1}^k + H_{r,i,j-1}^k - 2H_{r,i,j}^k}{\Delta r^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_j} \frac{H_{r,i,j+1}^k - H_{r,i,j-1}^k}{2\Delta z} - \frac{H_{r,i,j}^k}{r_j^2} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} H_{z,i,j}^{k+1} = & H_{z,i,j}^k - R_m \Delta t_2 \left[u_{i,j} \frac{H_{z,i+1,j}^k - H_{z,i-1,j}^k}{2\Delta z} + v_{i,j} \frac{H_{z,i,j+1}^k - H_{z,i,j-1}^k}{2\Delta r} \right. \\ & \left. - H_{z,i,j}^k \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta z} - H_{r,i,j}^k \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta r} \right] \\ & + \left[\frac{H_{z,i+1,j}^k + H_{z,i-1,j}^k - 2H_{z,i,j}^k}{\Delta z^2} + \frac{H_{z,i,j+1}^k + H_{z,i,j-1}^k - 2H_{z,i,j}^k}{\Delta r^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_j} \frac{H_{z,i,j+1}^k - H_{z,i,j-1}^k}{2\Delta r} \right] \Delta t_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

采用时间相关法求差分方程(3.1)~(3.4)的定常解, 其总体步骤如下:

第一步, 首先求解零磁场时的速度场 v^0 , 其过程与文献[2]类似, 即

(1) 先假定一固壁上的涡量 $\xi_{i,M}^0$ 和初始速度场(例如取[2]中小 Re 数解). 利用(3.1)式及相应边条件求出 $t_1 = \Delta t_1$ 时刻各点的 ξ 值, 按时间推进, 直到相邻两个时间段的 ξ 值之差小于0.02为止. 将求得的 ξ 值代入(3.2)式, 反复迭代直到相邻两次迭代的最大差值小于 10^{-4} 为止, 得到各点的 ψ 值.

(2) 利用(2.13)式差分求得速度 u, v .

(3) 按公式^[2]

$$\bar{\xi}_{i,M} = \frac{1}{\Delta r} - \frac{\psi_{M-2}}{2\Delta r^2 r_{M-1}} \quad (3.5)$$

求出壁面上的涡量 $\xi_{i,M}^{(1)}$ (其它边界上的 ξ 值都是给定的), 如用这样求出的 $\xi_{i,M}$ 直接代替上次计算中所用的壁面值, 计算格式不稳定, 本文采用松弛法, 即用公式

$$\xi_{i,M}^{k+1} = (1 - \omega_1) \xi_{i,M}^k + \omega_1 \xi_{i,M}^{k+1} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

求出新的壁面值取代原来(第 k 次迭代)的边条件, 本文中 ω_1 取为0.1.

(4) 以当前的 u, v, ψ, ξ 作为初值, 利用新的壁面边条件, 重复(2.1)到(2.3)的过程, 求出新的 $u, v, \psi, \xi, \xi_{i,M}$, 如此反复下去, 直到计算 ξ 所用边条件 $\xi_{i,M}$ 与(3.5)式求出的 $\bar{\xi}_{i,M}$ 很接近即

$$|\xi_{i,M}^k - \bar{\xi}_{i,M}^k| \leq 0.005 \quad (i=1, 2, \dots, N),$$

时为止, 此时求得的流场记为 v^0 .

第二步, 将 v^0 代入(3.3)、(3.4)式, 根据给定的磁场参数, 由(2.19)式求出壁面和管内节点上的磁场强度 H_r^0, H_z^0 , 以此作为初值和边条件, 求解差分方程(3.3)、(3.4), 步骤如下:

(1) 将 $H_r^{(0)}$ 代入(3.3)式, 让 H_r 沿时间推进, 直到定常, 记解为 $H_r^{(1)}$.

(2) 将 $H_r^{(1)}$ 代入(3.4)式, 让 H_z 沿时间推进, 直到趋于定常, 记解为 $H_z^{(1)}$.

(3) 用 $H_z^{(1)}$ 代替 $H_z^{(0)}$, 重新进行(1)的计算, 再将求得的 H_r 代入(3.4)式, 进行(2)的计算, 如此反复, 直至相邻两次交替迭代在所有节点上的 H_r, H_z 值之差的绝对值之和小于0.1为止. 如此求得的磁场记为 H^1 .

第三步, 将 $H^{(1)}$ 代入(3.1)式, 以第一步求得的速度场作为初值, 按第一步的方法重新求解流场, 记为 v^1 .

第四步, 将 v^1 代入(3.3)、(3.4)式, 以第二步求得的磁场作为初值, 按第二步的方法重新求解磁场. 如此反复迭代, 直至相邻两次迭代求得的磁场和流场都比较相近为止. 此时认为得到了边值问题的解.

计算表明, 只须迭代两次, 以后的速度剖面就已基本重合, 图5给出了 $Re=5, \gamma=0.04$ (γ 的定义式见下文) 迭代两次后, 相邻两次 u 剖面的比较, 在图形上已看不出差别.

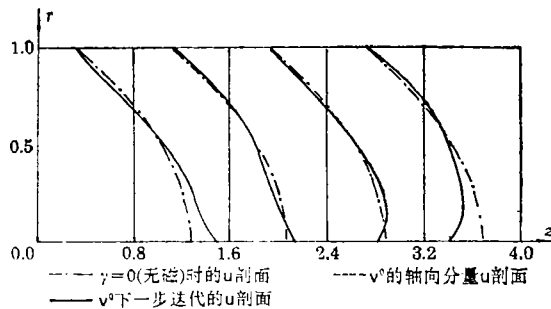


图5 v 的轴向分量迭代两次比较

在交替计算速度场和磁场时, 每次都让它们各自收敛到定常情况, 这是因为它们采取了不同的时间尺度, 很难在同一时间上匹配起来, 只能按自己的无因次时间 t_1, t_2 推进到定常后再匹配.

四、计算结果和讨论

为叙述及计算方便, 引进无量纲参数

$$\gamma = \frac{R_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\rho} \frac{H_0^2}{U^2} = \frac{1}{4\pi\rho\nu^2} \cdot \left(\frac{4\pi I}{ea}\right)^2 = \frac{4\pi I^2}{\rho Re^2 e^2 \nu^2} \quad (4.1)$$

因 ρ 为常数, 所以 γ 表示特征磁场与特征速度的相对大小. 对于一定的 Re 数, γ 与电流强度 I 有一一对应关系.

$$I = \frac{Re e \nu}{2} \sqrt{\frac{\gamma \rho}{\pi}} \text{ (CGSE)} = \frac{Re \nu \cdot 3 \times 10^{10}}{2} \sqrt{\frac{\gamma \rho}{\pi}} \text{ (CGSE)}$$

转化为国际单位制, 因为

$$1 \text{ 安培 (A)} = 3 \times 10^9 \text{ CGSE} = 1000 \text{ 毫安 (mA)}$$

所以

$$I = \frac{Re \nu}{2} \sqrt{\frac{\gamma \rho}{\pi}} \times 10 \text{ (A)} = \frac{Re \nu}{2} \sqrt{\frac{\gamma \rho}{\pi}} \times 10^4 \text{ (mA)} \quad (4.2)$$

计算中所用常数为

$$\rho = 1.057 \text{ g/cm}^3, \nu = 0.04 \text{ cm}^2/\text{s}, \nu_m = 10^{-10} \text{ c m}^2/\text{s}$$

$$\text{所以 } R_m = \frac{ua}{\nu_m} = Re \cdot \frac{\nu}{\nu_m} = 4 \times 10^{-12} Re \quad (4.3)$$

本文取 $\lambda = \frac{L}{a} = 5$, $M = 41$, $N = 26$, 外加磁场用直流螺线管生成, 线圈匝数 $n_0 = 20$, 对称于液柱中心缠绕在管壁外侧. 为避免应用(2.19)式时出现奇性, 线圈半径 R_0 略大于 a , 本文取 $R_0 = 1.1a$. 螺线管总长 $l/a = \lambda$.

针对不同雷诺数, 不同磁场 (对应于不同的 γ 和 I) 进行了数值计算, 计算结果绘于图6~图11. 文献[2]的计算表明, 在 Re 数小于 24.5 时, 不同 Re 数的无磁流场基本相同, 图6给出了 Re 为 0.5, 1, 5 和 10 时的轴向速度 u 剖面图, 可以看出, 4 种 Re 数情形的速度场非常接近. 所以以后谈及无磁流场时, 对不同的雷诺数不作区分, 无磁流场泛指小于 24.5 的任一 Re 数下的无磁流场.

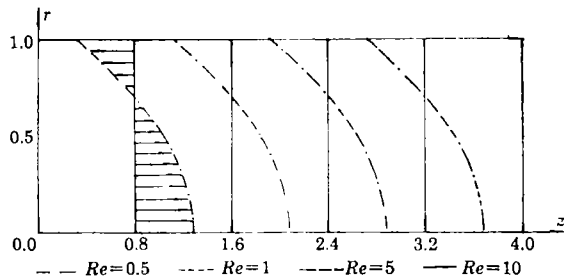


图6 $\gamma=0$, 不同 Re 数的速度剖面

从所计算的结果 (图9~11) 可以看出, 本文所涉及的每一强度的磁场, 都使下弯月面轴线附近的轴向迴流速度有不同程度的减小, 从而使冲撞作用减轻. 而且磁场越强, 减轻效果越明显.

加磁后流场对雷诺数很敏感, 这可以以不同雷诺数的流线 ψ 图和速度剖面看出. 图7~8

给出了无磁流场和 $\gamma=0.18$ 时 Re 为0.5的 ψ 图。对 $\gamma=0.18$ ， Re 为0.5和1时磁场变化不大，只出现了轻微的迴流，而 Re 为5和10时流动变得比较混乱，出现了两个以上较大的迴流区，这主要是非线性影响所致（因篇幅所限图从略）

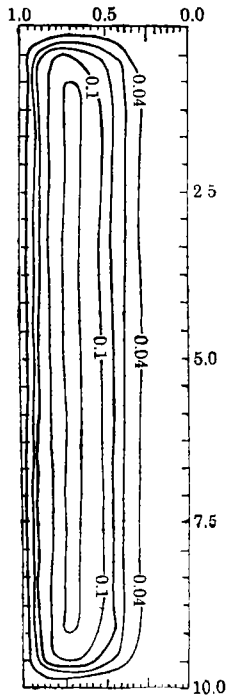


图7 $\gamma=0$ 的 ψ 线

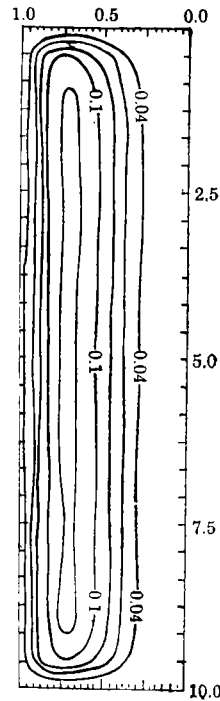


图8 $Re=0.5$ ， $\gamma=0.18$ 的 ψ 线

图9给出了 $\gamma=0.18$ ， Re 分别为0.5, 1, 5, 10时的轴向速度 u 剖面，同时还给出了无磁流场以作比较。由图上可以看出，当磁场的特征量 γ 一定时， Re 越大，磁场的影响越大。结果还表明， Re 越大，计算结果对 Re 的变化越敏感，如 Re 为0.5和1时，二者的速度剖面 and 流线图都很接近，而 Re 为5和10时，二者的速度 u 剖面相差很大（图略）。

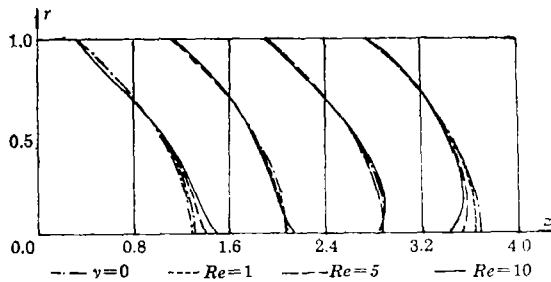


图9 $\gamma=0.18$ ，不同 Re 的轴向速度剖面（ $Re=0$ 与 $Re=1$ 重合）

对一固定的电流强度 $I=164.06$ mA，图10给出了 $Re=2.5, 5, 10$ 时的速度 u 剖面图，并同时画出无磁流场以作比较。对 $I=164.06$ mA， $Re=2.5, 5, 10$ ，可根据式(4.1)算出相应的 γ 为0.32, 0.08和0.02。图10表明， Re 的影响与图9显示的趋势正好相反， Re 越小，磁场的影响越大。而且 Re 越小，流场对 Re 的变化越敏感。如 Re 为10时， u 剖面与无磁时较接近，而 Re 为2.5时则相差较多。 Re 成倍增长，从2.5变为5时 u 变化很大，再从5上升到10时 u 则

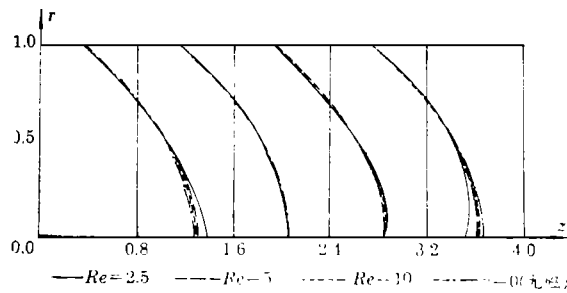


图10 固定电流 $I=164.0\text{mA}$, 不同 Re 数的轴向速度剖面

才有很小的变化。这主要是因为 Re 增大时 a 也增大, 从而线圈半径 R_0 增大, 这样在相同的电流下管中央的磁场变弱。

由于 Re 数的影响, 要使管轴附近下弯月面处的轴向速度减小相同的程度, 不同 Re 数的情形要加不同强度的磁场, 通过数值实验本文得到了这样一组数据, 对 $Re=0.5, 1, 5, 10$ 的情形, 相应地加以 $\gamma=0.9, 0.4, 0.12, 0.09$ 的磁场, 它们产生的效果基本一致, 结果绘于图11。

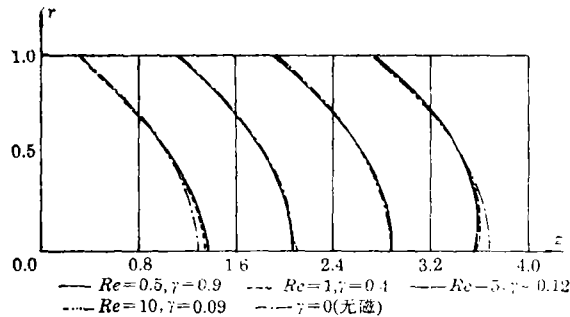


图11 不同 Re 不同 γ 下的轴向速度剖面

总之, 计算结果表明, 适当加磁场可以有效地减弱下弯月面处的冲撞作用, 这种减弱作用受 Re 数和磁场强度的影响, 磁场越强作用越明显。但磁场太强时, 流场会变得很混乱(图略), 而且会形成新的冲撞区, 不利于血栓的防治。不过这样的流场对实验很有意义, 如能观察到新的冲撞区也能形成血栓, 无疑又为前面对血栓形成的解释提供了一个有力的证据。

参 考 文 献

- [1] 吴望一、钱民全, 形成人工血栓的 Chandler 圆环内的流动分析, 中国科学, 12(1981), 1458—1467.
- [2] 吴望一、钱民全、温功碧, 竖直毛细管中有限长液柱的粘性流体运动, 应用数学和力学, 2(4)(1981), 441—456.
- [3] 岡 小天著, 《生物流变学》(吴云鹏等译), 科学出版社(1988), 297—301.
- [4] 库里柯夫斯基 A. Г., Г. А. 留比莫夫, 《磁流体力学》(徐复等译), 上海科学技术出版社(1966) 34—41, 62—66.
- [5] 李辑熙、牛中奇著, 《生物电磁学概论》, 西安电子科技大学出版社(1990) 86—92.
- [6] 赵凯华、陈熙谋, 《电磁学》, 人民教育出版社(1981), 上册281—290, 下册363—374.

Effect of Magnetic Fields on Viscous Liquid Column with Finite Length in a Vertical Straight Tube

Wen Gong-bi Sun Ke-li

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

The formation of thrombus is closely related to the hydrodynamical conditions. Chandler's experiment and further research shows that the cause thrombus formed in the lower meniscus may be that the fluid particles at relatively high speed strike on the lower meniscus leading to the gathering of platelet and red blood cells (RBC). This paper deals with the motion of viscous liquid column with finite length and two free surfaces in a vertical straight tube under the action of magnetic fields, numerical solution is obtained by the time-dependent method in a finite difference techniques. The results show that under the action of a proper magnetic field, the axial velocity at the lower meniscus near the axis will decrease strike on the lower meniscus will be reduced and then thrombus formation at the lower meniscus can be avoided. This result provides a guide to further experimental research on the mechanism of thrombus formation and medical treatment to thrombus

Key words the action of magnetic fields, thrombus, viscous flow