

环空钻柱结构三维非线性分析*

刘延强 吕英民

(石油大学, 1992年6月6日收到)

摘 要

应用有限元理论和牛顿-拉斐逊法对弯曲井眼中环空钻柱结构进行非线性分析, 根据变形特点, 提出了对不同参量采用不同形式的单元的描述计算分析方法。采用罚函数法处理待 定 边界问题。计算表明了井眼曲率对钻头侧向力的非线性效应。

关键词 牛顿-拉斐逊法 罚函数法 非线性效应 钻柱

一、引 言

随着钻井技术的发展, 为了提高石油开发效率, 往往需要钻探大曲率井眼。大曲率井眼迫使钻柱大变形。为此, 需要对钻柱结构进行非线性力学分析, 以准确地确定钻头侧向力, 预测钻进趋势和解决钻柱强度及起下钻摩阻计算等问题。

本文将应用有限元理论和牛顿-拉斐逊 (Newton-Raphson) 法对钻柱结构进行非线性分析。

二、大挠度环空钻柱的受力与变形的描述

2.1 坐标系

为了描述大挠度钻柱的受力与变形, 建立如下坐标系(见图1):

- (1) $Oxyz$ 坐标系描述井眼轴线几何位置与特性。 O 点在井口, x, y, z 轴分别指向北、东、下, 单位正向矢量为 i, j, k ;
- (2) $O_1x_1y_1z_1$ 坐标系描述钻柱位移。 O_1 点在钻头, x_1 轴沿钻柱原轴线即从钻头指向井口; y_1 轴与 x_1 轴构成铅垂面并偏上; z_1 水平。它们的单位正向矢量为 i_1, j_1, k_1 , 且 $j_1 = k_1 \times i_1$;
- (3) $O_2x_2y_2z_2$ 坐标系描述钻柱的受力与变形, 其单位正向矢量为 i_2, j_2, k_2 。按照钻井描述参量习惯, 以井斜角 (井轴切线与 z 轴夹角) 和方位角 (井眼切线在水平面内影方向与 x 轴夹角) 随井深的变化描述井眼位置和走向。为此规定 x_2 轴沿井轴切向 (称轴向); z_2 轴与 x_2 轴构成铅垂面并偏下 (称井斜方向); y_2 轴水平 (称方位方向); O_2 点在研究点的变形前的位置, 在 x_1 轴上。

* 钱伟长推荐, 1991年11月25日第一次收到。

在 $O_2x_2y_2z_2$ 坐标系下, 求得的钻头侧向力(横向反力)分并斜侧向力和方位侧向力, 表示 F_{r2} , $F_{\theta 2}$, 它们可直接用于分析钻头钻井趋势(井眼走向)及井眼模拟。

2.2 坐标系间坐标变换

2.2.1 从坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 到 $Oxyz$ 的变换

在 $Oxyz$ 坐标系下, 设井轴上任一点 $M(x, y, z)$ 的矢径为 \mathbf{R} , 是井深(实际长度 \widehat{OM}) s 的单值函数, 有

$$\mathbf{R}(s) = \{x(s), y(s), z(s)\} \quad (2.1)$$

则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_2 &= \mathbf{R}'(s) = \{a\} \\ \mathbf{j}_2 &= \mathbf{k} \times \mathbf{i}_2 = \{b\} \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{i}_2 \times \mathbf{j}_2 = \{c\} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中 $\mathbf{R}(s)$ 可由井轴数值模拟计算求得^[1], 这样, 从坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 到 $Oxyz$ 的坐标变换矩阵为

$$\{t_1\} = \left\{ \begin{array}{l} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

2.2.2 从坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 到 $Oxyz$ 的变换

在坐标系 $Oxyz$ 下, 设 O_1 点坐标为 (x_{01}, y_{01}, z_{01}) , 则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \left\{ -\frac{x_1}{OO_1}, -\frac{y_1}{OO_1}, -\frac{z_1}{OO_1} \right\} = \{a_1\} \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{l}_1 \times \mathbf{k} = \{c_1\} \\ \mathbf{j}_1 &= \mathbf{k}_1 \times \mathbf{i}_1 = \{b_1\} \\ OO_1 &= \sqrt{x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

从坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 到 $Oxyz$ 的坐标变换矩阵为

$$\{t_2\} = \left\{ \begin{array}{l} \{a_1\} \\ \{b_1\} \\ \{c_1\} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

2.1.3 从坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 到 $O_2x_2y_2z_2$ 的变换

设同一矢量在坐标系 $Oxyz$, $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ 中可分别表示为 r_1 , r_2 , r_3 , 由(2.3)、(2.5)知

$$r_1 = \{t_1\}r_3, \quad r_1 = \{t_2\}r_2$$

设 $r_3 = \{t\}r_2$, 则知

$$\{t_3\} = \{t_1\}^{-1}\{t_2\} \quad (2.6)$$

2.3 钻柱的受力与变形

钻柱的变形有两部分: 钻柱受井眼强迫随井眼轴线的弯曲, 这部分称为初位移; 可通过计算井眼轴线求得^[1]; 同时, 弹性恢复力和载荷使环空中钻柱相对井轴产生位移, 这部分称为计算位移, 见图1。

钻柱的受力(如图2)有: 上部传递扭矩 T_u 和轴力 P_u , 含泥浆浮力的重力分布 q_1 , 井底

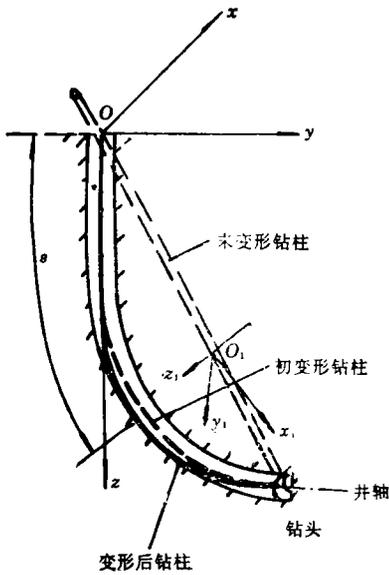


图1 钻柱变形及有关坐标系

对钻头反力 W_{OB} , N_1 和反扭矩 T_b , 井壁反力 R , N_1 即钻头侧向力。

本文假设: (1)井眼为圆孔, (2)钻头为球铰支座, (3)井壁为刚性的, (4)井口为只允许扭转和轴向位移的轴承。

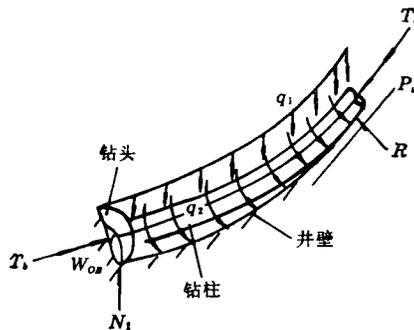


图2 井眼中钻柱受力图

三、钻柱结构的有限元几何非线性分析

3.1 单元坐标系与单元平衡方程

在图1所示的变形前钻柱位置, 将钻柱离散为二节点三维梁单元 (图3), 并建立单元坐标系 $\{x_3, y_3, z_3\}$, 其三轴向与 x_1, y_1, z_1 相同。在该坐标系下, 单元平衡方程为

$$\begin{aligned} \{K_T(\{\varphi\}^e + \{\varphi_0\}^e)\}^e (\{\varphi\}^e + \{\varphi_0\}^e) \\ = \{p(\{\varphi\}^e + \{\varphi_0\}^e)\}^e \end{aligned} \quad (3.1)$$

即

$$\{K_T\}^e \{\varphi\}^e = \{p\}^e - \{K_T\}^e \{\varphi_0\}^e \quad (3.2)$$

其中 方程(3.2)右边第二项为初位移 $\{\varphi_0\}^e$ 引起的弹性力的相当节点载荷, $\{\varphi\}^e$ 为计算位移。

3.1.1 切线刚度矩阵 $\{K_T\}^e$

切线刚度矩阵 $\{K_T\}^e$ 是位移的函数, 可由下式求得

$$\begin{aligned} \{K_T(\{\varphi\}^e + \{\varphi_0\}^e)\}^e \\ = \int_{V_0} \{B(\{\varphi\}^e + \{\varphi_0\}^e)\}^T \{D\} \{B(\{\varphi\}^e + \{\varphi_0\}^e)\} dV \end{aligned} \quad (3.3)$$

积分可由 Gauss-Legendre 积分^[2]完成。式中矩阵 $\{B\}$ 、 $\{D\}$ 见附录 I。

3.1.2 载荷向量 $\{p\}^e$

单元载荷向量 $\{p\}^e$ 也是位移的函数, 由于大变形, 单元重力分布在变形过程中相对单元坐标系, 方向上将发生较大变化。这一较大变化主要表现于初位移 $\{\varphi_0\}^e$ (计算位移 $\{\varphi\}^e$ 相对很小, 对载荷的影响可忽略), 并且其它载荷都是相对井眼轴线施加的, 受力与变形的计算描述是相对井轴 (坐标系 $O_1x_1y_1z_1$) 进行的。故文中计算 $\{p\}^e \approx \{p(\{\varphi_0\}^e)\}^e$ 是初位移后的单元位置计算的。考虑井眼的大曲率, $\{p(\{\varphi_0\}^e)\}^e$ 按曲梁单元计算。

考虑到井眼一般为光滑连续曲线，可用分段圆弧逼近。故将初变形单元近似为具有三维变形的平面圆弧单元，圆弧由两端 l, m 和对应井段中点 n 所决定。

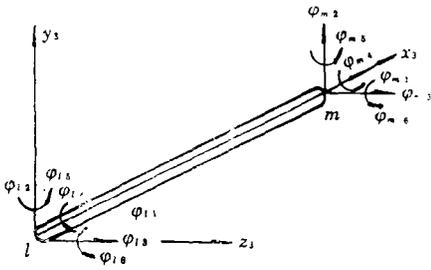


图3 单元坐标系及节点位移

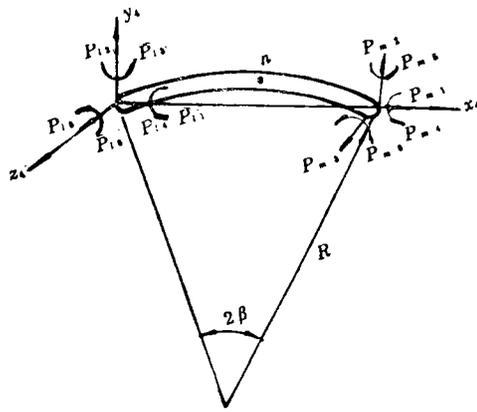


图4 具有三维变形的平面圆弧单元及其坐标系与位移

建立如图 4 所示单元坐标系， x_4 轴由 l 指向 m ； y_4 轴与圆弧共面并将指向凸侧； z_4 轴垂直圆弧平面。设它们单位正向矢量为 i_4, j_4, k_4 。则

$$\left. \begin{aligned} i_4 &= \left\{ \frac{x_m - x_l}{t}, \frac{y_m - y_l}{t}, \frac{z_m - z_l}{t} \right\} = \{a_2\} \\ \vec{ln} &= \left\{ \frac{x_n - x_l}{t_1}, \frac{y_n - y_l}{t_1}, \frac{z_n - z_l}{t_1} \right\} \\ k_4 &= \frac{i_4 \times \vec{ln}}{|i_4 \times \vec{ln}|} = \{c_2\} \\ j_4 &= k_4 \times i_4 = \{b_2\} \\ t &= \sqrt{(x_m - x_l)^2 + (y_m - y_l)^2 + (z_m - z_l)^2} \\ t_1 &= \sqrt{(x_n - x_l)^2 + (y_n - y_l)^2 + (z_n - z_l)^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

由此知，坐标系从 $lx_4y_4z_4$ 到 $Oxyz$ 的变换矩阵为

$$\{t_4\} = \left\{ \begin{array}{l} \{a_2\} \\ \{b_2\} \\ \{c_2\} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

与(2.6)同理知，坐标系从 $lx_4y_4z_4$ 到 $O_2x_2y_2z_2$ 的变换矩阵为

$$\{t_6\} = \{t_1\}^{-1} \{t_4\} \quad (3.6)$$

工作钻柱上载荷除重力外，都作用在圆弧单元平面内。将重力分布 q_1 向 x_4, y_4, z_4 三轴分解，由(3.4)可求

$$\left. \begin{aligned} q_{x_4} &= q_1 (k \cdot i_4) \\ q_{y_4} &= q_1 (k \cdot j_4) \\ q_{z_4} &= q_1 (k \cdot k_4) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

由附 II 知， q_{z_4} 等效节点力为

$$\left\{ p_1 \right\} = \left\{ 0, 0, q_{z_4} R \beta, q_{z_4} R^2 (\sin \beta - \beta \cos \beta), \right. \\ M_{y_0} - q_{z_4} R^2 (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1), 0, 0, 0, \\ q_{z_4} R \beta, q_{z_4} R^2 (\sin \beta - \beta \cos \beta), \\ \left. -M_{y_0} + q_{z_4} R^2 (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1), 0 \right\} \quad (3.8)$$

$$M_{y_0} = q_{z_1} \cdot \frac{R^2 \left[(\lambda + 1) \left(\sin \beta - \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\beta - \lambda \beta \cos \beta \right]}{\frac{1 + \lambda}{2} \beta - \frac{\lambda - 1}{4} \sin 2\beta}$$

$$\lambda = EI/GJ$$

q_{x_1} , q_{y_1} 及 q_{z_1} 的等效节点载荷可由下式积分求得

$$l \text{ 点: } \{q\}_l = -\{H_l\}\{K\} \int_0^{L^0} \{F_{l,m}\}\{H_s\}^{-1}\{w_s\} ds$$

$$m \text{ 点: } \{p\}_m = \{H_m\}\{K\} \int_0^{L^0} \{F_{l,s}\}\{H_s\}^{-1}\{w_s\} ds$$

其中各矩阵及计算见附录 I, 积分可由 Gauss-Legendre 积分完成, q_2 计算参见 [3]

$$\{p_2\} = \{p_1\} + \{p_2\}, \quad \{p\}^0 = \{p_1\} + \{p_2\}$$

3.1.3 关于单元划分的说明

由于 (3.3) 式中矩阵 $\{B\}$ 是可知的节点位移的函数, 刚度矩阵可以将之随位移变化的函数关系写出, 故可由最初的直梁划分单元, 而按直梁有限单元等效节点力为

$$\{p\}^0 = \int_{\mathcal{L}} \{N\}\{q\} dx$$

$\{N\}$ 为形函数矩阵与节点位移无关, 反映不出 $\{p\}^0$ 随位移的变化, 而这种变化对大挠钻柱载荷影响不可忽略. 故采用初变形后曲梁单元, 以更切合实际受载. 只要计算由初位移开始, 直梁单元的刚度矩阵与曲梁单元荷载向量便在平衡方程中统一起来.

3.2 结构平衡方程

将单元刚度矩阵 $\{K\}^0$ 和载荷向量 $\{p\}^0$ 变换到整体坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 下, 并叠加即可得到结构平衡方程

$$\{K_T(\{\varphi\} + \{\varphi_0\})\}\{\varphi\} = \{P\} - \{K_T(\{\varphi\} + \{\varphi_0\})\}\{\varphi_0\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \{K_T\} &= \sum_{e=1}^{n_e} \{K\}^0 = \sum_{e=1}^{n_e} \{\lambda_3\}\{K\}^0\{\lambda_3\}^T \\ \{P\} &= \sum_{e=1}^{n_e} \{p\}^0 = \sum_{e=1}^{n_e} \{\lambda_6\}\{p\}^0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\{\lambda_3\} = \begin{Bmatrix} \{t_3\}_l \\ & \{t_3\}_l \\ & & \{t_3\}_m \\ & & & \{t_3\}_m \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\{\lambda_6\} = \begin{Bmatrix} \{t_6\}_l \\ & \{t_6\}_l \\ & & \{t_6\}_m \\ & & & \{t_6\}_m \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

四、计算方法与边界条件处理

考虑增量法与混合法计算量大和该问题的复杂性, 采用计算量小, 可控精度的 Newton-

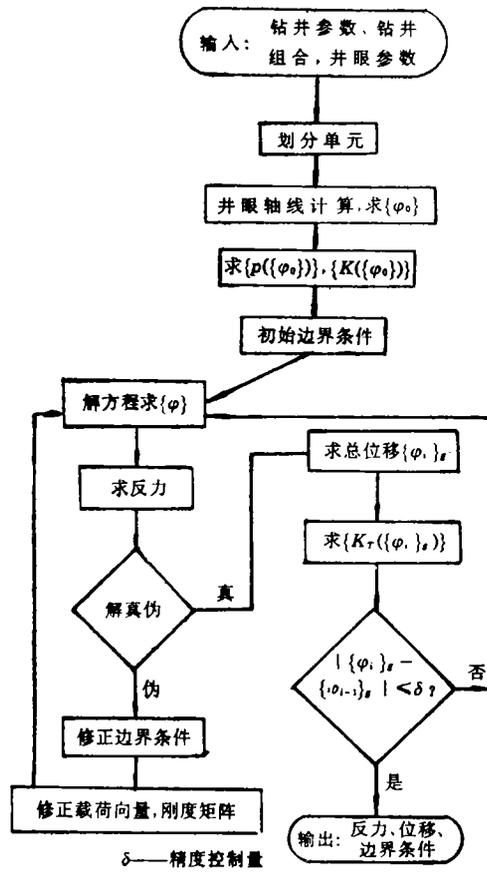


图5 计算程序框图

Raphson法求解方程 (3.10).用罚函数法处理待定约束条件问题,即若求得钻柱某节点的横向位移(相对井轴) h_i 超过环空半径 r_i (井眼与钻柱的半径差).将视为不可能,便适加一惩罚因子于刚度矩阵中,强迫 $h_i=r_i$.在此约束条件下计算节点反力,若此反力与 h_i 的方向相反,则说明该约束条件是正确的,否则意味着约束条件不成立,应解除.如此反复,最终可收敛到正确的一组约束条件下的解.计算说明,适当选取惩罚因子,可使约束条件的确定取得较好的收敛效果.计算程序框图见图5.

五、初位移计算

设通过插值计算获得的井眼轴线参数方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned} \right\}$$

变换可得

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \{t_2(s)\}^T \begin{Bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

由此可得坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 下的初位移 (井深 s 处):

$$\{\varphi_{01}(s)\} = \left\{ L_0 - s - x_1(s), y_1(s), z_1(s), 0, \right. \\ \left. - \arctg \frac{z'_1(s)}{x'_1(s)}, \arctg \frac{y'_1(s)}{x'_1(s)} \right\}^T \quad (5.2)$$

其中未计扭转位移(文[4]计算说明对钻头侧向力影响不大), L_0 为钻头处井深。由此求得各节点初位移向量叠加后得结构初位移向量。再变换到整体坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 即为方程(3.9)中的初位移。

六、非线性特性计算

采用图6三种钻具, 通过计算地层给钻头的侧向力, 分析不同状况下钻具特性, 这里仅就井眼曲率对钻头倾向力的非线性效应, 进行计算分析(图7、8、9、10)。

图7、8、9分别为钻具1、2、3在二维井眼中, 钻头侧向力随井斜变化率(井斜角随井深变化比率)的变化情况; 图10为钻具2在三维井眼中钻头侧向力随方位变化率(方位角随井深的变化比率)的变化情况。钻具1、2、3分别为降斜(井斜角减小)钻具, 造斜(使斜角增大)钻具, 稳斜(井斜角不变)钻具, 图中线1、2分别表示线性计算、非线性计算结果。

计算说明:

(1) 一般说, 井眼曲率越大, 非线性效应越大, 但在小于 $5^\circ/30m$, 非线性效应大都不太大, 可以应用线性计算分析, 而对中、短曲率半径的井眼(超过 $5^\circ/30m$), 须考虑大挠度问题。

(2) 井眼曲率对不同钻具的非线性效应程度不同, 造斜钻具2较大, 降斜钻具1次之, 稳斜钻具3较小。

(3) 随井斜变化率增大, 不同钻具的线性计算结果的偏向不同, 造斜钻具2的结果偏大; 而降斜钻具1的计算结果保守偏小。

(4) 井斜变化率对钻头方位侧向力的影响和非线性效应与方位变化率对井斜侧向力的影响和非线性效应都不大。

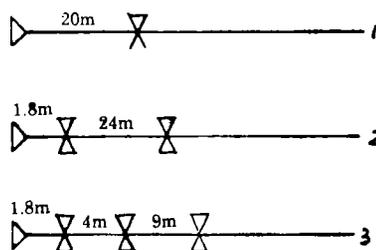


图6 钻具组合及其参数

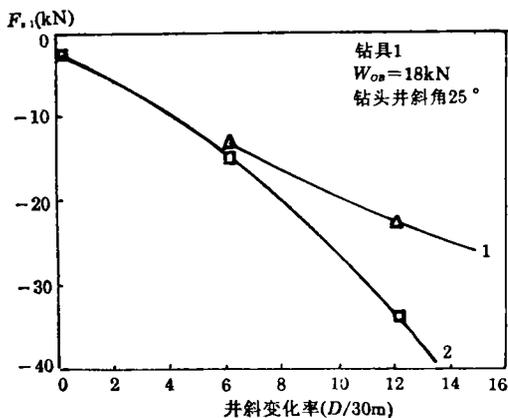


图7 井眼曲率对钻具1的非线性效应

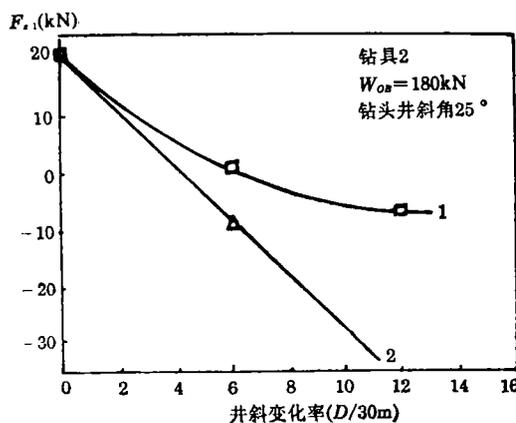


图8 井眼曲率对钻具2的非线性效应

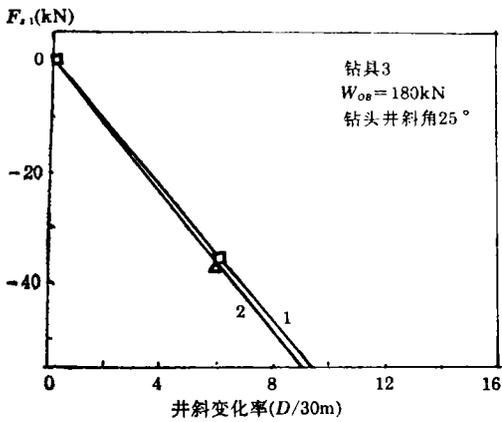


图9 井眼曲率对钻具3的非线性效应

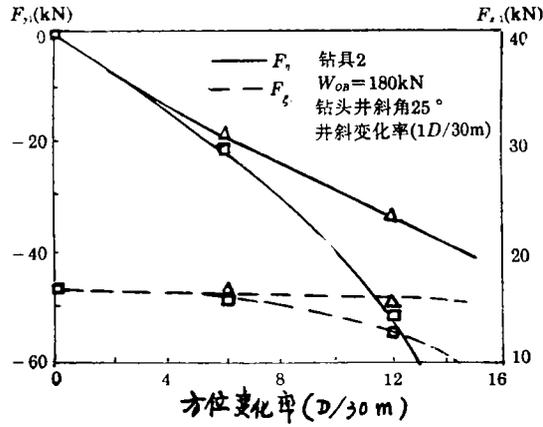


图10 三维井眼方位变化率对钻具2的非线性效应

附 I 大挠度三维直梁单元的矩阵{B}, {D}

设单元位移插值函数

$$\{f\} = \{u, v, w, \psi\}^T = [N_u, N_v, N_w, N_\psi]^T \{\varphi\}^e = \{N\} \{\varphi\}^e$$

{\varphi}^e, {N} 分别为单位节点位移向量和形状函数矩阵。

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1 & & & & & & & & & & & N_7 \\ & N_2 & & & & & & & & & & N_8 \\ & & N_3 & & & & & & & & & N_9 \\ & & & N_4 & & & & & & & & N_{10} \\ & & & & N_5 & & & & & & & N_{11} \\ & & & & & N_6 & & & & & & N_{12} \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = N_4 = 1 - \frac{x}{l}, \quad N_2 = N_3 = \frac{1}{l^3} (2x^3 - 3lx^2 + l^3),$$

$$N_5 = -N_6 = -\frac{1}{l^3} (x^3 - 2lx^2 + l^2x), \quad N_7 = N_8 = \frac{x}{l},$$

$$N_9 = N_{10} = -\frac{1}{l^3} (2x^3 - 3lx^2), \quad N_{11} = -N_{12} = \frac{1}{l^3} (lx^2 - x^3).$$

考虑大变形时, 节点位移表示的应变

$$\begin{aligned} \{e\} = \begin{Bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_\psi \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \\ -y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{3}{2} y \frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \\ z \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{3}{2} z \frac{d^2w}{dx^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \\ r \frac{d\psi}{dx} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ -y \frac{d^2v}{dx^2} \\ z \frac{d^2w}{dx^2} \\ r \frac{d\psi}{dx} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \\ 3y \frac{d^2v}{dx^2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \\ -3z \frac{d^2w}{dx^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \end{Bmatrix} = \{B\} \{\varphi\}^e \\ &= [\{B_0\} + \{B_a\}] \{\varphi\}^e \end{aligned}$$

{H}为形状函数矩阵。只与单元形状有关。

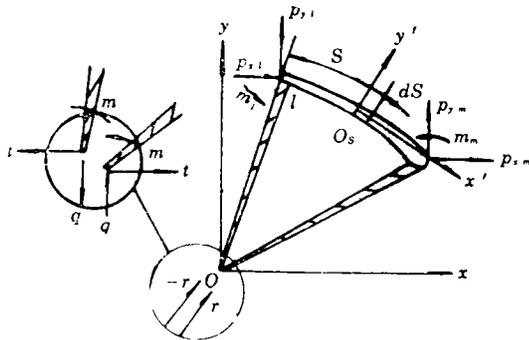
作用单元每个节点上的节点力须保持平衡, 条件为

$$\{p\} = \{H\}\{r\} \text{ 或 } \{p_i\} = \{H_i\}\{r\} \quad (i=1, m) \tag{A.3}$$

由式(A.1)、(A.2)、(A.3)得

$$\left. \begin{aligned} \text{或 } \{p\} &= \{H\}\{r\} = \{H\}\{K\}\{e\} = \{H\}\{K\}\{H\}^T\{\varphi\} \\ \{p_i\} &= \{M_i\}\{K\}\{H_i\}\{\varphi_i\} = \{K_{i,j}\}\{\varphi_j\} \quad (j, i=1, m) \end{aligned} \right\} \tag{A.4}$$

$$\{p\}^e = \begin{Bmatrix} \{K_{11}\} \{K_{1m}\} \\ \{K_{m1}\} \{K_{mm}\} \end{Bmatrix} \{\varphi\}^e = \{K\}^e \{\varphi\}^e \tag{A.5}$$



附图1 一般平面单元的整体坐标系yOx, 局部坐标系O_s x' y' z'及应力合向量, 平面节点位移与载荷

假想两个刚臂Ol、Om取结于单元两端, 如节示自平衡载荷为r, -r作用于O点处两刚臂端点, 二维问题有3个分量

$$r = \{r\} = \{t, q, m\}^T$$

表示单元任意点处应力合力。梁上S处截面左端的力分量p_{xS}, p_{yS}, m_S为

$$\begin{Bmatrix} p_{xS} \\ p_{yS} \\ m_S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ y_S & -x_S & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ q \\ n \end{Bmatrix} \text{ 或 } \{p_S\} = \{H_S\}\{r\}$$

$$\{H_S\} = \begin{Bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ y_S & -x_S & 1 \end{Bmatrix} \tag{A.6}$$

两端节点力

$$\{p_i\} = \{H_i\}\{r\} \quad (i=1, m)$$

显然

$$\{p_1\} = -\{p_S\}$$

即

$$\{H_1\} = -\{H_S\}, \{H_m\} = \{H_S\} \tag{A.7}$$

相应于向量{r}的位移向量{e}即两刚臂在O端的相对位移为

$$\{e\} = \{e_x, e_y, \varphi\}^T$$

(2) 矩阵{K}及单元刚度

对于直梁单元, $x_1 = -x_m = -\frac{L}{2}, y_1 = y_m = 0$

$$\{H_i\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{L}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{H_m\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{L}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

t 产生纯轴向载荷为: $t = \frac{EA}{L} e_s$

q 产生纯剪切载荷, $q = \frac{12EI_z}{L^3} e_y$, (由于对称两无相对转动),

M 产生纯弯曲, $M = \frac{EI_z}{L} \varphi$

由(A.1)知

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{L} \\ \frac{12EI_z}{L^3} \\ \frac{EI_z}{L} \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \{K\}^{-1} = \begin{Bmatrix} \frac{L}{EA} \\ L^3/(12EI_z) \\ \frac{L}{EI_z} \end{Bmatrix}$$

(A.8)

对应于局部坐标系 $O_S x' y'$ 下, 一般单元微段 dS 有,

$$\{dF'\} = \begin{Bmatrix} \frac{dS}{EA} \\ \frac{(dS)^3}{12EI_z} \\ \frac{dS}{EI_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{EA} \\ 0 \\ \frac{1}{EI_z} \end{Bmatrix} dS \quad (A.9)$$

作用于 dS 两端的载荷为 $-r_s$, r_s 和自平衡载荷为 $-r$, r 应平衡, 关系为

$$\{r_s\} = \{H_S\} \{r\} \quad (A.10)$$

在 $O_S x' y'$ 下 r_s 为 $\{r'_s\}$, 则

$$\{r_s\} = \{T_S\} \{r'_s\}$$

变换矩阵

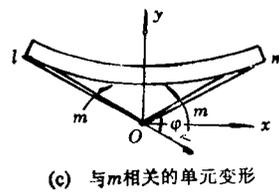
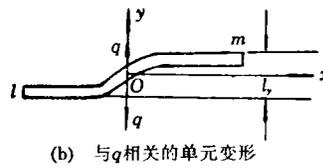
$$\{T_S\} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{dS} & -\frac{dy}{dS} \\ \frac{dy}{dS} & \frac{dx}{dS} & 1 \end{Bmatrix} \quad (A.11)$$

$$\{r'_s\} = \{T_S\} \{r_s\} = \{T_S\} \{H_S\} \{r\} \quad (A.12)$$

同理有

$$\begin{aligned} \{de\} &= \{H_S\} \{T_S\} \{de'_s\} = \{H_S\} \{T_S\} \{dF'_s\} \{r'_s\} \\ &= (\{H_S\} \{T_S\} \{dF'_s\} \{T_S\} \{H_S\}) \{r\} \end{aligned} \quad (A.13)$$

则



附图2 各应力分量对应变形

$$\{e\} = \left[\int_0^L (\{H_S\}^t \{T_S\} \{dF'_S\} \{T_S\}^t \{H_S\}) \right] \{r\} = \{F\} \{r\} \quad (A.14)$$

$$\{F\} = \int_0^L (\{H_S\}^t \{T_S\} \{dF'_S\} \{T_S\}^t \{H_S\}) \quad (A.15)$$

由 $\{K\} = \{F\}^{-1}$ 及 (A.5) 可求单元刚度矩阵

(3) 矩阵 $\{F_{IS}\}$ 、 $\{F_{Sm}\}$ 与等效节点载荷

受集中载荷向量 $\{w_S\}$ 作用的平面单元与由 O 点处作用于刚臂上的载荷向量 $-q_1, q_2$ 平衡, 由 (A.14, 15) 式, 并分别视 S 到 m 或 l 点为刚性, 则刚臂两端的相对位移为

$$\begin{aligned} \{e_l\} &= \{F_{IS}\} \{q_l\}, \quad \{e_m\} = \{F_{Sm}\} \{q_m\} \\ \{F_{IS}\} &= \int_0^S (\{H_S\}^t \{T_S\} \{dF'_S\} \{T_S\}^t \{H_S\}) \\ \{F_{Sm}\} &= \int_S^L (\{H_S\}^t \{T_S\} \{dF'_S\} \{T_S\}^t \{H_S\}) \end{aligned} \quad (A.16)$$

由静力等效原则, 知

$$\{e_l\} + \{e_m\} = \{0\} \quad \text{即}$$

$$\{F_{IS}\} \{q_l\} + \{F_{Sm}\} \{q_m\} = \{0\} \quad (A.17)$$

单元外力 $\{w_S\}$ 与 $-q_1, q_2$ 应平衡, 即

$$\{H_S\} (\{q_m\} - \{q_l\}) + \{w_S\} = \{0\} \quad (A.18)$$

(A.17), (A.18) 联立解得:

$$\begin{aligned} \{q_l\} &= \{K\} \{F_{Im}\} \{H_S\}^{-1} \{w_S\} \\ \{q_m\} &= -\{K\} \{F_{IS}\} \{H_S\}^{-1} \{w_S\} \end{aligned}$$

将 $\{q_l\}, \{q_m\}$ 转换到节点 l, m 上, 求得等效节点力为

$$\begin{aligned} \{p_{equiv}\}_l &= -\{p_l\} = -\{H_l\} \{K\} \{F_{Sm}\} \{H_S\} \{w_S\} \\ \{p_{equiv}\}_m &= -\{p_m\} = \{H_m\} \{K\} \{F_{IS}\} \{H_S\}^{-1} \{w_S\} \end{aligned} \quad (A.19)$$

由此可推知, 分布载荷向量 $\{w_S\}$ 等效节点力为

$$\begin{aligned} \{p_{equiv}\}_l &= -\{H_l\} \{K\} \int_0^L \{F_{Sm}\} \{H_S\}^{-1} \{w_S\} dS \\ \{p_{equiv}\}_m &= \{H_m\} \{K\} \int_0^L \{F_{IS}\} \{H_S\}^{-1} \{w_S\} dS \end{aligned} \quad (A.20)$$

2. 平面圆弧单元的等效节点力

(1) 平面内变形圆弧单元等效节点力

附图4所示, 有

$$dS = R d\psi, \quad x = R \sin\psi, \quad y = R(\cos\psi - \cos\beta)$$

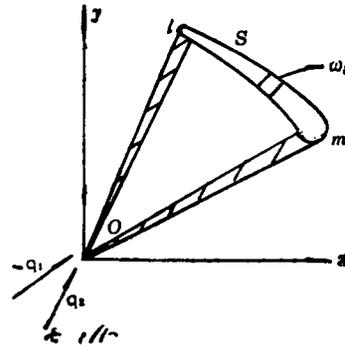
$$\frac{dx}{dS} = \cos\psi, \quad \frac{dy}{dS} = -\sin\psi$$

代入 (A.15) 式得.

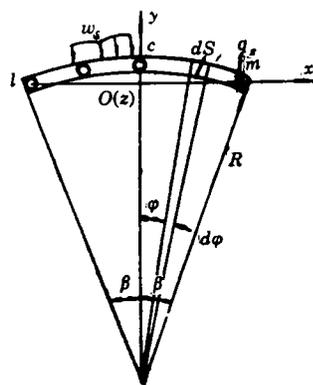
$$\{F\} = \begin{Bmatrix} a & 0 & d \\ \text{对} & b & 0 \\ \text{称} & & c \end{Bmatrix}$$

$$\text{其中: } a = \frac{R}{EA} (\beta + \sin\beta \cos\beta) + \frac{R^3}{EI} [\beta(H_2 \cos^2\beta)$$

$$-3\cos\beta \sin\beta]$$



附图3 受集中载荷作用的一般单元



附图4 平面内分布力 w_s 与平面外分布力 q_z

$$\left. \begin{aligned}
 b &= \left(\frac{R}{FA} + \frac{R^3}{EI} \right) (\beta - \sin\beta \cos\beta) \\
 c &= 2\beta R / (EI) \\
 d &= \frac{2R^2}{EI} (\sin\beta - \beta \cos\beta) \\
 \{K\} = \{F\}^{-1} &= \left\{ \begin{array}{cc} \frac{c}{ac-d^2} & -\frac{d}{ac-d^2} \\ \frac{1}{b} & \\ -\frac{d}{ac-d^2} & \frac{a}{ac-d^2} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (A.21)$$

由(A.6)、(A.7)、(A.11)知

$$\left. \begin{aligned}
 \{H_l\} &= - \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \\ & R \sin\beta \quad 1 \end{array} \right\}, \quad \{H_m\} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \\ & -R \sin\beta \quad 1 \end{array} \right\}, \\
 \{H_S\} &= \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & & \\ & 1 & \\ R(\cos\psi - \cos\beta) & -R \sin\psi & 1 \end{array} \right\}, \quad \{T_S\} = \left\{ \begin{array}{cc} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \\ & & 1 \end{array} \right\}
 \end{aligned} \right\}$$

由此及(A.9)、(A.16)或可求得 $\{F_{lS}\}$ 、 $\{F_{mS}\}$ ，再由(A.19)式可求得平面内等效节点力。这里 $\{w_S\} = \{q_x, q_y, m_x\}^T = \{q_x, q_y, 0\}^T$

(2) 平面外圆弧单元等效节点力

对钻柱单元，只有重力沿z轴有分量，如附图4所示，由于对称，中间截面c处，只有绕y轴的弯矩 M_w 存在，且c截面处有 $\varphi_{yc} = 0$ ，由[5]知

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{M_w R}{EI} D_{ab} - \frac{q_x R}{EI} D_b &= 0 \\
 M_w &= q_x D_b / D_{ab} \\
 D_b &= R^2 \left[(\lambda+1) \left(\sin\beta - \frac{\beta}{2} \right) + \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\beta - \lambda \beta \cos\beta \right] \\
 D_{ab} &= \frac{1+\lambda}{2} \beta - \frac{\lambda-1}{4} \sin 2\beta \\
 \lambda &= \frac{EI}{GJ}
 \end{aligned} \right\} \quad (A.22)$$

在l端反力

$$\begin{aligned}
 F_x &= - \int_{S_c}^{S_l} q_x dS = -q_x R \beta \\
 m_x &= - \int_{S_c}^{S_l} q_x dS \cdot R(\cos\psi - \cos\beta) = -q_x R^2 (\sin\beta - \beta \cos\beta) \\
 m_y &= -M_w + q_x R^2 (\beta \sin\beta + \cos\beta - 1)
 \end{aligned}$$

m端反力同理可得。于是平面外圆弧单元等效节点力：

$$\left. \begin{aligned}
 \{p_{equiv}\}_l &= - \left\{ \begin{array}{c} F_x \\ m_x \\ m_y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} q_x R \beta \\ q_x R^2 (\sin\beta - \beta \cos\beta) \\ m_w - q_x R^2 (\beta \sin\beta + \cos\beta - 1) \end{array} \right\} \\
 \{p_{equiv}\}_m &= \left\{ \begin{array}{c} q_x R \beta \\ q_x R^2 (\sin\beta - \beta \cos\beta) \\ -M_w + q_x R^2 (\beta \sin\beta + \cos\beta - 1) \end{array} \right\}
 \end{aligned} \right\}$$

参 考 文 献

- [1] 刘延强等, 三维井眼轴线的数值模拟计算, 石油大学学报, 14(3) (1990), 45—53.
- [2] 欣顿, E., D. R. J. 欧文, 《有限元程序设计》, 北京, 新时代出版社(1982).
- [3] 刘希圣等, 《钻井工艺原理》, 北京, 石油业出版社(1988).
- [4] 帅健等, 弯曲井眼中下部钻具组合的有限元分析, 石油学报, 11(4) (1990), 103.
- [5] 皮萨连科 Г. С.等, 《材料力学手册》, 石家庄, 河北人民出版社 (1981).
- [6] 刘延强等, 井壁变形和摩阻力对底部钻具组合的影响, 石油大学学报, 15(1) (1991).
- [7] 刘延强、吕英民, 罚函数法在处理钻柱边界约束问题中的应用, 石油大学学报, 17(2) (1993).

Three-Dimensional Nonlinear Analysis of Drill String Structure in Annulus

Liu Yan-qiang Lu Ying-min

(*Mechanical Engineering Dept., University of Petroleum, Dongying*)

Abstract

Three-dimensional nonlinear analysis of drill string structure in annulus of curved wellbore is done by using the theory of the finite element and Newton-Raphson method. According to the characteristics of its deformation, a method of the description and computation of taking different forms of elements for different parameters is advanced. The penalty function method is applied for finding the unknown boundary. The nonlinear effects of curvature of wellbore on the side forces on bit are shown by the computation.

Key words Newton-Raphson method, penalty function method, nonlinear effect, drill string