应用数学和力学，第15卷第2期（1994年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

两种生物相互作用的反应扩散模型及解的讨论*

张为付　　吕荣庆

（南京 空军气象学院003信箱，1992年9月12日收到）

摘　要

本文讨论和年龄有关的两种生物相互作用的反应扩散模型，其中出生率函数具有指数衰减特征，文中引进了与资源环境有关的环境因子α_i，及可控生育参数β_i，并运用构造上、下解的方法研究了该模型解的存在性、唯一性及平衡解的局部渐近稳定性．研究发现，在其它参数相对稳定的情况下，生育参数β_i的大小决定了种群发展的趋势．

关键词　出生率函数　死亡率函数　反应扩散方程　上、下解

一、引　　言

自从1974年Gurtin-MacCamy建立第一个与年龄相关的非线性人口动力学模型以来，关于单种群生物动力学的研究已做了大量工作[1]~[5]，1985年Webb在专著[6]中作了全面总结．1988年，Weinstock和Chris Rorres引进临界出生率和临界死亡率两个人口统计学参数，为平衡解的稳定性研究开辟了一条新途径[7]．对含扩散项的生物模型的研究也受到广泛重视，Langlais在[5]中讨论了和年龄相关的单种群的反应扩散模型的大范围性质；C.V.Pao在[8]中则讨论了两种生物相互竞争的反应扩散模型，但其出生率函数为常数．

本文综合文[5]与[8]的特点，提出以下相互作用的双种群模型．

设Ω为$\mathbf{R}^n$中的有界区域，$\partial\Omega$为Ω的边界，具有足够的光滑性，γ为$\partial\Omega$的外法向，设$\rho_i(a,t,x)$为第i种群t时刻，x处，年龄为a的分布密度，则

$$u_i(t,x)=\int_0^\infty \rho_i(a,t,x)\,da$$

为相应种群的总数，假设$\rho_i(a,t,x)$ $i=1,2$，服从以下规律：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial a}+\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}-D_1\Delta\rho_1+\rho_1(b_1u_1+c_1u_2+d_1)=0 & (1.1)\\[2mm] \dfrac{\partial\rho_2}{\partial a}+\dfrac{\partial\rho_2}{\partial t}-D_2\Delta\rho_2+\rho_2(b_2u_2+c_2u_1+d_2)=0 & (1.2)\\ \rho_i(0,t,x)=\beta_i\exp[-\alpha_iu_i]\qquad i=1,2;\ \ (t,x)\in R^+\times\Omega & (1.3)\\ \rho_i(a,0,x)=\rho_{i0}(a,x)\qquad i=1,2;\ \ (a,x)\in R^+\times\Omega & (1.4)\\ B\rho_i\equiv\alpha(x)\partial\rho_i/\ \gamma+\beta(x)\rho_i=0\qquad x\in\partial\Omega & (1.5)\end{cases}$$

* 戴世强推荐．

这里D_i为i种群的扩散系数，$D_i>0$；b_i，c_i，d_i均为正常数，$b_iu_i+d_i$系i种群的死亡函数，c_iu_j $(i\neq j)$则反应了种群间的相互作用．$B\rho_i=0$是边条件，其中$\alpha(x)\geqslant 0$，$\beta(x)\geqslant 0$，但在$\partial\Omega$上$\alpha(x)+\beta(x)>0$，α_i具有环境因子的意义，β_i则为生育参数$(i=1,2)$．

对(1.1)～(1.5)诸式两边积分，可得下列具初边值的反应扩散方程组：

$$\partial u_1/\partial t-D_1\Delta u_1=u_1[\beta_1\exp[-\alpha_1u_1]-b_1u_1-c_1u_2-d_1] \tag{1.6}$$

$$\partial u_2/\partial t-D_2\Delta u_2=u_2[\beta_2\exp[-\alpha_2u_2]-b_2u_2-c_2u_1-d_2] \tag{1.7}$$

$$Bu_i\equiv\alpha(x)\partial u_i/\partial\gamma+\beta(x)u_i=0 \qquad (i=1,2) \tag{1.8}$$

$$u_i(0,x)\equiv u_{i0}(x)=\int_0^\infty \rho_{i0}(a,x)da \qquad (i=1,2) \tag{1.9}$$

下面对此反应扩散方程组进行讨论，我们将看到，在α_i，b_i，c_i，d_i不变的条件下，β_i的大小决定了种群的发展、衰亡及相互共存的不同结果．

二、非负解的共存性

在方程组(1.6)～(1.9)中令

$$F_1(u_1,u_2)=u_1(\beta_1\exp[-\alpha_1u_1]-b_1u_1-c_1u_2-d_1) \tag{2.1}$$

$$F_2(u_1,u_2)=u_2(\beta_2\exp[-\alpha_2u_2]-b_2u_2-c_2u_1-d_2) \tag{2.2}$$

显然，对于$(u_1,u_2)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$，$F_1(u_1,u_2)$，$F_2(u_1,u_2)$分别关于$u_2$与$u_1$单调递减，而对于任意的$0<m<M$，在$[m,M]$上$F_1$，$F_2$关于$u_1$，$u_2$分别为 Lipschitz 连续，因此该方程组为拟单调减少型反应扩散方程组．我们用构造上、下解的方法证明解的存在性与唯一性．

定理 1　当$\beta_i\leqslant\lambda_0D_i+d_i$，$(i=1,2)$时，方程组(1.6)～(1.9)存在唯一的一组解$(u_1,u_2)$满足：

$$0\leqslant u_1(t,x)\leqslant p_1(t)\phi(x) \qquad (t,x)\in R^+\times\Omega$$

$$0\leqslant u_2(t,x)\leqslant p_2(t)\phi(x) \qquad (t,x)\in R^+\times\Omega$$

其中

$$p_i(t)=\begin{cases} p_i(0)\exp(\beta_i-\lambda_0D_i-d_i)t, & \text{当}\ \beta_i<\lambda_0D_i+d_i \\ \dfrac{p_i(0)}{1+p_i(0)b_i\phi_m^2t}, & \text{当}\ \beta_i=\lambda_0D_i+d_i \\ & (i=1,2) \end{cases} \tag{2.3}$$

这里$p_i(0)$为满足以下条件的常数：$p_i(0)\geqslant u_{i0}(x)/\phi_m$　　$(i=1,2)$

λ_0为特征值问题：

$$-\Delta u=\lambda u,\ Bu=0 \tag{2.4}$$

的最小特征值，$\phi(x)$为对应的特征函数，显然，$\lambda_0>0$，$\phi(x)$具有正的最小值$\phi_m=\min\phi(x)>0$，$\phi(x)$在$\bar{\Omega}$上的最大值取为$\phi_M=\max\phi(x)|_{\bar{\Omega}}=1$．

证明　设$\underline{u}_1=0$，$\underline{u}_2=0$，$\bar{u}_1=p_1(t)\phi(x)$，$\bar{u}_2=p_2(t)\phi(x)$，$p_1(t)$，$p_2(t)$为待定正函数，使$(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$与$(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$为方程组的上、下解．因此，根据[9]它们必须满足：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\underline{u}_1}{\partial t}-D_1\Delta\underline{u}_1-\underline{u}_1[\beta_1\exp[-\alpha_1\underline{u}_1]-b_1\underline{u}_1-c_1\bar{u}_2-d_1]\leqslant 0\\ &\leqslant\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial t}-D_1\Delta\bar{u}_1-\bar{u}_1(\beta_1\exp[-\alpha_1\bar{u}_1]-b_1\bar{u}_1-c_1\underline{u}_2-d_1)\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_2}{\partial t}-D_2\Delta\underline{u}_2-\underline{u}_2(\beta_2\exp[-\alpha_2\underline{u}_2]-b_2\underline{u}_2-c_2\bar{u}_1-d_2)\leqslant 0$$

$$\leqslant\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial t}-D_2\Delta\bar{u}_2-\bar{u}_2[\beta_2\exp[-\alpha_2\bar{u}_2]-b_2\bar{u}_2-c_2\underline{u}_1-d_2] \tag{2.6}$$

当$p_1(t)$，$p_2(t)$根据(2.3)取值时，(2.5)、(2.6)同时成立，并且因为$p_i(0)\geqslant u_{i0}(x)/\phi_m$，也有

$$\bar{u}_i(0,x)=p_i(0)\phi(x)\geqslant u_{i0}(x)$$

又

$$B\bar{u}_i=p_i(t)B\phi(x)=0$$

所以$(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$与$(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$为方程组(1.6)～(1.9)的下解与上解，且因$(\underline{u}_1, \underline{u}_2)\leqslant(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$，所以由文[9]可得，存在唯一的一组$(u_1, u_2)$满足(1.6)～(1.9)且

$$0\leqslant u_1(t,x)\leqslant p_1(t)\phi(x),\quad 0\leqslant u_2(t,x)\leqslant p_2(t)\phi(x) \tag{2.7}$$

定理 2 若$\beta_1>\lambda_0D_1+d_1$，$\beta_2\leqslant\lambda_0D_2+d_2$，则当

$$0\leqslant u_{10}(x)\leqslant\frac{\beta_1-d_1}{b_1},\quad 0\leqslant u_{20}(x)\leqslant\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{c_1}\phi_m$$

时，方程组(1.6)～(1.9)存在唯一解(u_1,u_2)，满足

$$r_1\phi(x)\leqslant u_1(t,x)\leqslant\frac{\beta_1-d_1}{b_1}\qquad (t,x)\in R^+\times\Omega$$

$$0\leqslant u_2(t,x)\leqslant p_2(t)\phi(x)\qquad (t,x)\in R^+\times\Omega$$

这里

$$r_1=\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1-c_1p_2(0)}{b_1+\alpha_1\beta_1} \tag{2.8}$$

$p_2(t)$由(2.3)式给出，但

$$p_2(0)\leqslant(\beta_1-\lambda_0D_1-d_1)/c_1$$

证明 设$\underline{u}_1=r_1\phi(x)$，$\bar{u}_1=r_2$，$\underline{u}_2=0$，$\bar{u}_2=p_2(t)\phi(x)$，$r_1$，$r_2$为待定常数，$p_2(t)$为待定函数，要使$(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$和$(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$是方程组的下解和上解，它们必须满足(2.5)与(2.6)，当r_1依(2.8)取值，

$$r_2=(\beta_1-d_1)/b_1$$

且$p_2(t)$取为单调减函数，$p_2(0)\leqslant(\beta_1-\lambda_0D_1-d_1)/c_1$时，(2.5)一定满足；

又当$\beta_2\leqslant\lambda_0D_2+d_2$时，依(2.3)式选取$p_2(t)$，(2.6)式也能满足，且$p_2(t)$是$t$的单调减函数，于是，只要

$$0\leqslant u_{10}(x)\leqslant\frac{\beta_1-d_1}{b_1},\quad 0\leqslant u_{20}(x)\leqslant\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{c_1}\phi_m$$

初值条件也得到满足，所以$(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$，$(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$确是下解与上解．由于$(\underline{u}_1,\underline{u}_2)\leqslant(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$显然成立，故定理得证．

推论1 若$\beta_1\leqslant\lambda_0D_1+d_1$，$\beta_2>\lambda_0D_2+d_2$，则当

$$0\leqslant u_{10}(x)\leqslant\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2}{c_2}\phi_m;\quad 0\leqslant u_{20}(x)\leqslant\frac{\beta_2-d_2}{b_2}$$

时，方程组存在唯一解(u_1,u_2)满足

$$0\leqslant u_1(t,x)\leqslant p_1(t)\phi(x),\quad r_1'\phi(x)\leqslant u_2(t,x)\leqslant r_2'$$

其中

$$r_1'=\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2p_1(0)}{b_2+\alpha_2\beta_2},\quad r_2'=\frac{\beta_2-d_2}{b_2}$$

$p_1(t)$由(2.3)式给出，但$p_1(0)\leqslant(\beta_2-\lambda_0D_2-d_2)/c_2$

定理3 若$\beta_i\geqslant\lambda_0D_i+d_i$，$i=1,2$且$\beta_1<\lambda_0D_1+d_1+c_1(b_2+\alpha_2\beta_2)^{-1}(\beta_2-\lambda_0D_2-d_2)\phi_m$，

则存在正数ν和μ，使当

$$u_{10}(x)\leqslant \nu\phi_m,\quad u_{20}(x)\geqslant (c_2+\alpha_2\beta_2)^{-1}(\beta_2-\lambda_0 D_2-d_2-c_2\nu)$$

时，方程组存在唯一解(u_1,u_2)，满足：

$$0\leqslant u_1(t,x)\leqslant \nu\exp[-\mu t]\phi(x)\qquad (t,x)\in R^+\times\Omega$$

$$p_2(t)\phi(x)\leqslant u_2(t,x)\leqslant(\beta_2-d_2)/b_2\qquad (t,x)\in R^+\times\Omega$$

其中

$$p_2(t)=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{1-\exp[-At]+A\exp[-At]/Bp_2(0)}$$

$$A=\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2\nu>0,\quad B=b_2+\alpha_2\beta_2$$

$$0<p_2(0)\leqslant A/B$$

证明　令$\bar{u}_1=p_1(t)\phi(x)$，$\underline{u}_1=0$，$\bar{u}_2=(\beta_2-d_2)/b_2$，$\underline{u}_2=p_2(t)\phi(x)$，为了使$(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$，$(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$是方程组的上解与下解，根据(2.5)和(2.6)，在$p_2(t)$是增函数，$p_1(t)$是减函数的假设下，它们需满足

$$p_1'\phi+\lambda_0D_1p_1\phi\geqslant p_1\phi[\beta_1\exp[-\alpha_1p_1\phi]-b_1p_1\phi-c_1p_2\phi-d_1]$$

$$p_2'\phi+\lambda_0D_2p_2\phi\leqslant p_2\phi[\beta_2\exp[-\alpha_2p_2\phi]-b_2p_2\phi-c_2p_1\phi-d_2]$$

及
$$\beta_2\exp[-\alpha_2r]-b_2r-d_2\leqslant 0$$

这只要取

$$p_1'=(\beta_1-d_1-\lambda_0D_1-c_1p_2(0)\phi_m)p_1$$

$$p_2'-p_2(\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2p_1(0))+(b_2+\alpha_2\beta_2)p_2^2=0$$

及
$$r=(\beta_2-d_2)/b_2$$

即
$$p_1(t)=p_1(0)\exp[-\mu t]=\nu\exp[-\mu t]$$

$$p_2(t)=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{1-\exp[-At]+A\exp[-At]/Bp_2(0)}$$

其中

$$\mu=d_1+\lambda_0D_1+c_1p_2(0)\phi_m-\beta_1>0,\quad \nu=p_1(0)$$

$$A=\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2p_1(0)>0,\quad B=b_2+\alpha_2\beta_2$$

显然$p_1(t)$是单调减函数，而当$p_2(0)<A/B$时，$p_2(t)$是单调增函数，符合证明中的假设.又由于$\mu>0$，$A>0$，$p_2(0)<A/B$，这就要求

$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{c_1\phi_m}<p_2(0)<\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2p_1(0)}{b_2+\alpha_2\beta_2}\tag{2.9}$$

只要
$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{c_1\phi_m}<\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2}{b_2+\alpha_2\beta_2},\quad \beta_2>\lambda_0D_2+d_2$$

一定可选取$p_1(0)>0$，使

$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{c_1\phi_m}<\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2p_1(0)}{b_2+\alpha_2\beta_2}$$

成立，选定$p_1(0)$后，也一定可选取$p_2(0)$，使(2.9)成立.

再根据初值条件，必须要求

$$u_{10}\leqslant p_1(0)\phi_m,\quad A/B<p_2(0)\leqslant u_{20}\leqslant r$$

最后，当$p_2(0)\leqslant A/B$时，$p_2(t)\leqslant A/B$总成立，所以：

$$\underline{u}_2=p_2(t)\phi(x)\leqslant p_2(t)\leqslant\frac{A}{B}\leqslant\frac{\beta_2-d_2}{b_2}=\bar{u}_2$$

故 $(\underline{u}_1,\underline{u}_2)\leqslant(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$，定理成立。

推论2 若 $\beta_i\geqslant\lambda_0 D_i+d_i$，$i=1,2$ 且 $\beta_2\leqslant c_2\phi_m(b_1+\alpha_1\beta_1)^{-1}\cdot(\beta_1-\lambda_0 D_1-d_1)+\lambda_0 D_2+d_2$，则存在$\nu>0$，$\mu>0$．使当

$$u_{10}\geqslant\frac{\beta_1-\lambda_0 D_1-d_1-c_1\nu}{b_1+\alpha_1\beta_1},\qquad u_{20}\leqslant\nu\phi_m$$

时，方程组唯一的解(u_1,u_2)满足

$$p_1(t)\phi(x)\leqslant u_1(t,x)\leqslant(\beta_1-d_1)/b_1\qquad(t,x)\in R^+\times\Omega$$
$$0\leqslant u_2(t,x)\leqslant\nu\exp[-\mu t]\phi(x)\qquad(t,x)\in R^+\times\Omega$$

其中

$$p_1(t)=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{1-\exp[-At]+A\exp[-At]/Bp_1(0)}$$
$$A=\beta_1-\lambda_0 D_1-d_1-c_1\nu,\ B=b_1+\alpha_1\beta_1$$
$$\nu=p_1(0)>0,\ \mu=d_2+\lambda_0 D_2+c_2 p_1(0)\phi_m-\beta_2>0$$

定理4 若$c_1c_2<b_1b_2$，$\beta_i>\lambda_0 D_i+d_i$，$i=1,2$且

$$\beta_1-\lambda_0 D_1-d_1>\frac{c_1}{b_1}(\beta_2-d_2);\ \beta_2-\lambda_0 D_2-d_2>\frac{c_2}{b_1}(\beta_1-d_1)$$

则方程组存在唯一的解(u_1,u_2)满足

$$r_1\phi(x)\leqslant u_1(t,x)\leqslant\bar{r}_1$$
$$r_2\phi(x)\leqslant u_2(t,x)\leqslant\bar{r}_2$$

其中

$$r_1=\frac{\beta_1-\lambda_0 D_1-d_1-c_1(\beta_2-d_2)/b_2}{b_1+\alpha_1\beta_1},\ \bar{r}_1=\frac{\beta_1-d_1}{b_1}$$

$$r_2=\frac{\beta_2-\lambda_0 D_2-d_2-c_2(\beta_1-d_1)/b_1}{b_2+\alpha_2\beta_2},\ \bar{r}_2=\frac{\beta_2-d_2}{b_2}$$

只要令$\underline{u}_1=r_1\phi(x)$，$\bar{u}_1=\underline{u}_1$，$\underline{u}_2=r_2\phi(x)$，$\bar{u}_2=\bar{r}_2$，其中$r_1$，$\bar{r}_1$，$r_2$，$\bar{r}_2$为待定正常数，容易证明，当这些常数按定理中条件取值时，定理一定成立，证明从略．

三、平衡解的稳定性

方程组(1.6)～(1.9)的平衡解(u_{1s},u_{2s})满足下列椭圆方程组：

$$\begin{cases}-D_1\Delta u_{1s}=F_1(u_{1s},u_{2s}) & (3.1)\\ -D_2\Delta u_{2s}=F_2(u_{1s},u_{2s}) & (3.2)\\ Bu_{is}=0\qquad(i=1,2) & (3.3)\end{cases}$$

为了讨论平衡解的渐近稳定性，我们证明下列引理．

引理 设(u_{1s},u_{2s})为(3.1)～(3.3)的解，若存在正数$\alpha>0$，$\varepsilon>0$使

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_0 D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1(u_{1s}-\alpha)]+2b_1u_{1s}+c_1u_{2s}-\alpha c_1u_{1s}\geqslant\varepsilon\\ \lambda_0 D_2+d_2-\beta_2\exp[-\alpha_2(u_{2s}-\alpha)]+2b_2u_{2s}+c_2u_{1s}-\frac{1}{\alpha}c_2u_{2s}\geqslant\varepsilon\end{array}\right\}\qquad(3.4)$$

成立，则方程组(1.6)～(1.9)存在唯一的解$(u_1(t,x),u_2(t,x))$满足：

$$u_{1s}-\mu_1 p(t)\phi(x)\leqslant u_1(t,x)\leqslant u_{1s}+p(t)\phi(x)$$
$$u_{2s}-\mu_2 p(t)\phi(x)\leqslant u_2(t,x)\leqslant u_{2s}+\mu_3 p(t)\phi(x)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &p(t)=\begin{cases} p(0)\exp[-\varepsilon t] & \text{当}r=0\text{时} \\ \dfrac{\varepsilon}{r}\dfrac{1}{1-\exp[\varepsilon t]+\dfrac{\varepsilon}{rp(0)}\exp[\varepsilon t]} & \text{当}r\neq 0\text{时} \end{cases} \\ &p(0)<\varepsilon/r \\ &r=\min(b_1-\alpha c_1,\ \alpha c_2-b_2,\ \alpha^2 b_2-\alpha c_2,\ \alpha^2 c_1-\alpha b_1,\ 0) \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

μ_1，μ_2，μ_3为某个正常数。

证明 设$\underline{u}_1=u_{1s}-\mu_1 p(t)\phi(x)$，$\bar{u}_1=u_{1s}+p(t)\phi(x)$，$\underline{u}_2=u_{2s}-\mu_2 p(t)\phi(x)$，$\bar{u}_2=u_{2s}+\mu_3 p(t)\phi(x)$，$p(t)$为待定正减函数，$\mu_1$，$\mu_2$，$\mu_3$为待定正常数。为使$(\underline{u}_1，\underline{u}_2)$与$(\bar{u}_1，\bar{u}_2)$是方程组(1.6)～(1.9)的下解与上解，根据(2.5)及(2.6)有

$$p'+(\lambda_0 D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1 u_{1s}-\alpha_1 p\phi]+2b_1u_{1s}+c_1u_{2s}-\mu_2c_1u_{1s})p + (b_1-\mu_2c_1)p^2\phi\geqslant 0$$

$$p'+(\lambda_0 D_2+d_2-\beta_2\exp[-\alpha_2 u_{2s}+d_2\mu_3 p\phi]+2b_2u_{2s}+c_2u_{1s}-\frac{1}{\mu_2}c_1u_{2s})p + (\mu_2c_2-b_2)p^2\phi\geqslant 0$$

$$p'+(\lambda_0 D_2+d_2-\beta_2\exp[-\alpha_2 u_{2s}-\alpha_2\mu_3 p\phi]+2b_2u_{2s}+c_2u_{1s}-\frac{\mu_1}{\mu_3}c_2u_{2s})p + (\mu_3b_2-\mu_1c_2)p^2\phi\geqslant 0$$

$$p'+(\lambda_0 D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1 u_{1s}+\alpha_1\mu_1 p\phi]+2b_1u_{1s}+c_1u_{2s}-\frac{\mu_3}{\mu_1}c_1u_{1s})p + (\mu_3c_1-\mu_1b_1)p^2\phi\geqslant 0$$

由(3.4)，取$\mu_2=\alpha$，$\mu_1=\alpha$，$\mu_3=\alpha^2$，且令$r=\min(b_1-\alpha c_1，\alpha c_2-b_2，\alpha^2 b_2-\alpha c_2，\alpha^2 c_1-\alpha b_1，0)$，则$p(t)$可取为方程：

$$p'(t)+\varepsilon p(t)+rp^2(t)=0$$

的解，解此方程，即得(3.5)式，显然$p(t)$为正的减函数，再由初值条件，只要

$$u_{1s}-\alpha p(0)\phi(x)\leqslant u_{10}(x)\leqslant u_{1s}+p(0)\phi(x)$$

$$u_{2s}-\alpha p(0)\phi(x)\leqslant u_{20}(x)\leqslant u_{2s}+\alpha^2 p(0)\phi(x)$$

则(1.6)～(1.9)存在唯一的一组解$(u_1，u_2)$且

$$u_{1s}-\alpha p(t)\phi(x)\leqslant u_1(t,x)\leqslant u_{1s}+p(t)\phi(x)$$

$$u_{2s}-\alpha p(t)\phi(x)\leqslant u_2(t,x)\leqslant u_{2s}+\alpha^2 p(t)\phi(x)$$

由引理的证明可以看出，当$t\to+\infty$时，$u_1(t,x)\to u_{1s}$，$u_2(t,x)\to u_{2s}$，即平衡解(u_{1s},u_{2s})是局部渐近稳定的。

下面给出几个平衡解的存在定理，我们仍然根据椭圆型方程组上、下解方法来构造它们。

定理5 设$(u_{1s}，u_{2s})$为(1.6)～(1.9)的非平凡非负平衡解，

(i) 若$\beta_1\leqslant\lambda_0 D_1+d_1$，则$(u_{1s}，u_{2s})$必为$(0，u_{2s})$形式；

(ii) 若$\beta_2\leqslant\lambda_0 D_2+d_2$，则$(u_{1s}，u_{2s})$必为$(u_{1s},0)$形式；

(iii) 若$\beta_i\leqslant\lambda_0 D_i+d_i$ $(i=1,2)$则$(u_{1s}，u_{2s})$必为$(0,0)$。

证明 (i) 因为$(u_{1s}，u_{2s})$是平衡解，它们满足

$$-D_1\Delta u_{1s}=u_{1s}(\beta_1\exp[-\alpha_1 u_{1s}]-b_1u_{1s}-c_1u_{2s}-d_1) \qquad x\in\Omega$$

$$Bu_{1s}\equiv\alpha(x)\frac{\partial u_{1s}}{\partial\gamma}+\beta(x)u_{1s}=0 \qquad x\in\partial\Omega$$

以$\phi(x)$乘上式两边并对x在Ω内积分得：

$$\int_\Omega(\lambda_0 D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1 u_{1s}])u_{1s}\phi(x)dx=-\int_\Omega u_{1s}(b_1u_{1s}+c_1u_{2s})dx$$

∵ $\lambda_0 D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1 u_{1s}]\geqslant 0$，$-(b_1u_{1s}+c_1u_{2s})<0$

∴ $u_{1s}\equiv 0$，即 $(u_{1s},u_{2s})=(0,u_{2s})$.

同理可证(ii)，(iii).

定理 6

(i) 若$\beta_1>\lambda_0D_1+d_1$，$\beta_2\leqslant\lambda_0D_2+d_2$，则(1.6)～(1.9)必存在非平凡解$(u_{1s},0)$满足：

$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{b_1+\alpha_1\beta_1}\leqslant u_{1s}\leqslant\frac{\beta_1-d_1}{b_1}$$

(ii) 若$\beta_1\leqslant\lambda_0D_1+d_1$，$\beta_2>\lambda_0D_2+d_2$，则(1.6)～(1.9)必存在非平凡平衡解$(0,u_{2s})$满足：

$$\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2}{b_2+\alpha_2\beta_2}\leqslant u_{2s}\leqslant\frac{\beta_2-d_2}{b_2}$$

证明 $u_{2s}\equiv 0$，显然满足平衡解方程(3.2)，余下的问题是找到u_{1s}，满足

$$\begin{cases}-D_1\Delta u_{1s}=u_{1s}(\beta_1\exp[-\alpha_1u_{1s}]-b_1u_{1s}-d_1]\\ Bu_{1s}=0\end{cases}$$

我们寻找u_{1s}的上解$\bar u_{1s}$和下解$\underline{u}_{1s}$，设$\bar u_{1s}=r_1$，$\underline{u}_{1s}=r_2\phi(x)$，容易得知：

$$r_1=\frac{\beta_1-d_1}{b_1},\quad r_2=\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{b_1+\alpha_1\beta_1}$$

显然 $\underline{u}_{1s}\leqslant\bar u_{1s}$，所以至少存在一个$u_{1s}$，满足

$$-D_1\Delta u_{1s}=u_{1s}(\beta_1\exp[-\alpha_1u_{1s}]-b_1u_{1s}-d_1)$$

且 $\underline{u}_{1s}\leqslant u_{1s}\leqslant\bar u_{1s}$ 即

$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{b_1+\alpha_1\beta_1}\phi(x)\leqslant u_{1s}\leqslant\frac{\beta_1-d_1}{b_1}$$

同理可证(ii).

定理7 设$\beta_i>\lambda_0D_i+d_i$ $(i=1,2)$，若$b_2/c_2>c_1/b_1$且

$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{\beta_2-d_2}>\frac{c_1}{b_2},\quad\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2}{\beta_1-d_1}>\frac{c_2}{b_1}$$

则(1.6)～(1.9)存在非平凡非负平衡解(u_{1s},u_{2s})满足：

$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1-c_1(\beta_2-d_2)/b_2}{b_1+\alpha_1\beta_1}\phi(x)\leqslant u_{1s}(x)\leqslant\frac{\beta_1-d_1}{b_1}$$

$$\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2(\beta_1-d_1)/b_1}{b_2+\alpha_2\beta_2}\phi(x)\leqslant u_{2s}(x)\leqslant\frac{\beta_2-d_2}{b_2}$$

证明 设$\bar u_{1s}=r_1$，$\bar u_{2s}=r_1'$，$\underline{u}_{1s}=r_2\phi(x)$，$\underline{u}_{2s}=r_2'\phi(x)$，要使$(\bar u_{1s},\bar u_{2s})$与$(\underline{u}_{1s},\underline{u}_{2s})$是(1.6)～(1.9)的上下解，根据(2.5)及(2.6)可以取

$$r_1=\frac{\beta_1-d_1}{b_1},\quad r_2=\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1-c_1(\beta_2-d_2)/b_2}{b_1+\alpha_1\beta_1}$$

$$r_1'=\frac{\beta_2-d_2}{b_2},\quad r_2'=\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-c_2(\beta_1-d_1)/b_1}{b_2+\alpha_2\beta_2}$$

显然$(\underline{u}_{1s},\underline{u}_{2s})\leqslant(\bar u_{1s},\bar u_{2s})$，从而(1.6)～(1.9)存在非负平衡解$(u_{1s},u_{2s})$，且有$(\underline{u}_{1s},\underline{u}_{2s})\leqslant(u_{1s},u_{2s})\leqslant(\bar u_{1s},\bar u_{2s})$.

有了非负平衡解的存在性，可以根据引理讨论它们的稳定性，显然，当$\beta_i\leqslant\lambda_0D_i+d_i$ $(i=1,2)$时$(0,0)$是唯一的平衡解，它是局部渐近稳定的，对于$\beta_i\geqslant\lambda_0D_i+d_i$，我们有下列

定理。

定理8　设$\beta_1>\lambda_0D_1+d_1$，$\beta_2\leqslant\lambda_0D_2+d_2$，若

$$\frac{\alpha_1\beta_1+2b_1-\sqrt{(\alpha_1\beta_1+2b_1)^2-2\alpha_1^2\beta_1(\beta_1-\lambda_0D_1-d_1)}}{\alpha_1^2\beta_1}<\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{b_1+\alpha_1\beta_1}\phi_m \tag{3.6}$$

则平衡解$(u_{1s},0)$是局部渐近稳定的，对平衡解$(0,u_{2s})$也有类似的结果。

证明　平衡解$(u_{1s},0)$满足

$$\tilde{u}_1=\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{b_1+\alpha_1\beta_1}\phi_m\leqslant u_{1s}\leqslant\frac{\beta_1-d_1}{b_1}=\tilde{u}_2$$

由引理知，对任一$u_{1s}\in(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$，若存在$\alpha>0$使

$$\lambda_0D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1(u_{1s}-\alpha)]>c_1u_{1s}\alpha-2b_1u_{1s} \tag{*}$$

成立，则u_{1s}是渐近稳定的，这只要$(\alpha=0)$

$$\lambda_0D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1u_{1s}]>-2b_1u_{1s}$$

即可，即　$\lambda_0D_1+d_1+2b_1u_{1s}>\beta_1\exp[-\alpha_1u_{1s}]$

设　$y_1=\lambda_0D_1+d_1-\beta_1\exp[-\alpha_1(u_{1s}-\alpha)]$，$y_2=c_1u_{1s}\alpha-2b_1u_{1s}$

显然y_1是关于α单调降的，而y_2是关于α增的(图1)。

令u_0是$\lambda_0D_1+d_1+2b_1u=\beta_1\exp[-\alpha_1u]$

的根，$\hat{u}_0$是方程

$$\lambda_0D_1+d_1+2b_1u=\beta_1\left(1-\alpha_1u+\frac{1}{2}\alpha_1^2u^2\right)$$

的根，则$\hat{u}_0>u_0$(见图2)。

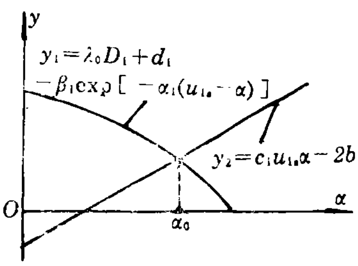

图　1

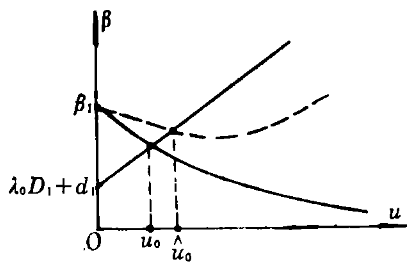

图　2

再令$\hat{u}_0<\tilde{u}_1$，则

对任一$u_{1s}\in(\tilde{u}_1，\tilde{u}_2)$必有

$$\lambda_0D_1+d_1+2b_1u_{1s}>\beta_1\exp[-\alpha_1u_{1s}]$$

解出$\hat{u}_0$，可得不等式：

$$0<\frac{\alpha_1\beta_1+2b_1-\sqrt{\Delta}}{\alpha_1^2\beta_1}<\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1}{b_1+\alpha_1\beta_1}\phi_m$$

其中　$\Delta=(\alpha_1\beta_1+2b_1)^2-2\alpha_1^2\beta_1(\beta_1-\lambda_0D_1-d_1)\geqslant0$

定理9　设$\beta_i>\lambda_0D_i+d_i$，$\alpha_i<2b_2\phi_m$，$c_2<1$，且

$$\frac{b_2}{c_1}-\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2c_1\phi_m}-\frac{\alpha_1\alpha_2}{4b_2c_1\phi_m}\right)>\frac{c_2}{b_1}$$

则当

$$\left.\begin{aligned}&\beta_2\leqslant\left(\frac{b_2}{c_1}-\frac{\alpha_1}{2c_1\phi_m}\right)\beta_1+d_2-\frac{b_2}{c_1}(\lambda_0D_1+d_1)-\frac{b_1}{2c_1\phi_m}\\&\beta_2\geqslant\frac{c_2}{b_1(1-\alpha_2/2b_2\phi_m)}\left[\beta_1+\frac{b_1}{c_2}(\lambda_0D_2+d_2)-d_1+\frac{b_1}{2c_2\phi_m}\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

时，平衡解是渐近稳定的。

证明 当$a_i<2b_2\phi_m$时，区域Ⅰ：

$$\begin{cases}\beta_2\leqslant\left(\dfrac{b_2}{c_1}-\dfrac{a_1}{2c_1\phi_m}\right)\beta_1+d_2-\dfrac{b_2}{c_1}(\lambda_0D_1+d_1)-\dfrac{b_1}{2c_1\phi_m}\\ \beta_2\geqslant\dfrac{c_2}{b_1(1-a_2/2b_2\phi_m)}\left[\beta_1+\dfrac{b_1}{c_2}(\lambda_0D_2+d_2)-d_1+\dfrac{b_1}{2c_2\phi_m}\right]\end{cases}$$

落在区域Ⅱ：

$$\begin{cases}\beta_2\geqslant\dfrac{b_2}{c_1}\cdot\beta_1+d_2-\dfrac{b_2}{c_1}(\lambda_0D_1+d_1)\\ \beta_2\leqslant\dfrac{c_2}{b_1}\left[\beta_1+\dfrac{b_1}{c_2}(\lambda_0D_2+d_2)-d_1\right]\end{cases}$$

内，故在Ⅰ内，(1.6)～(1.9)的解(u_1, u_2)及平衡解(u_{1s}, u_{2s})都存在。且有

$$\frac{\beta_1-\lambda_0D_1-d_1-(c_1/b_2)(\beta_2-d_2)}{b_1+a_1\beta_1}\phi_m\geqslant\frac{1}{2b_2}$$

$$\frac{\beta_2-\lambda_0D_2-d_2-(c_2/b_1)(\beta_1-d_1)}{b_2+a_2\beta_2}\phi_m\geqslant\frac{1}{2b_2}$$

令$\alpha<1/2b_2$，则在Ⅰ内，$u_{1s}>\alpha$，$u_{2s}>\alpha$，根据引理，只要找到一个$\alpha_0>0$，使当$\alpha_0<\alpha<1/2b_2$时

$$\begin{cases}\lambda_0D_1+d_1-\beta_1+2b_1u_{1s}+c_1u_{2s}>c_1u_{1s}^2\\ \lambda_0D_2+d_2-\beta_2+2b_2u_{2s}+c_2u_{1s}>c_2u_{2s}/\alpha\end{cases}$$

同时成立，则平衡解(u_{1s}, u_{2s})是渐近稳定的。

在u_{1s}-u_{2s}平面上，讨论两条曲线：

l_1： $\left(u_{1s}-\dfrac{b_1}{c_1}\right)^2+\bar{A}=u_{2s}$，$\bar{A}=\dfrac{A_1}{c_1}-\dfrac{b_1^2}{c_1^2}$

$A_1=\beta_1-\lambda_0D_1-d_1$

l_2： $u_{1s}=\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{2b_2}{c_2}\right)u_{2s}+\dfrac{A_2}{c_2}$，$A_2=\beta_2-\lambda_0D_2-d_2$

过l_2上的点$(A_2/c_2, 0)$作l_1的切线l，l的方程为

$$u_{2s}=k(u_{1s}-A_2/c_2)$$

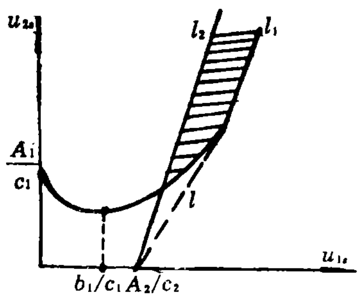

图 3

易求得：

$$k=\frac{A_2}{c_2}-\frac{b_1}{c_1}+\sqrt{\left(\frac{A_2}{c_2}-\frac{b_1}{c_1}\right)^2+\frac{A_1}{c_1}-\frac{b_1^2}{c_1^2}}$$

设$A_1/c_1-b_1^2/c_1^2>0$，则$k>0$

令 $$\frac{1}{1/\alpha-2b_2/c_2}>k$$

则 $$\alpha>\frac{1}{2b_2/c_2+1/k}=\alpha_0$$

(见图3)。当$c_2<1$时，有$\alpha_0<1/2b_2$，故当$\alpha_0<\alpha<1/2b_2$时，(3.4)式满足，稳定性证毕。

四、结论的生物学意义

从上面的讨论可知：

1．当$\beta_i\leqslant\lambda_0D_i+d_i(i=1,2)$，两种生物在短期内能共处于区域$\Omega$中，但由于生育参数太

小，或者由于死亡过多，扩散太快，两种种群都将趋向于灭绝状态，最终稳定地被消亡掉。

2．当$\beta_1>\lambda_0D_1+d_1$，$\beta_2\leqslant\lambda_0D_2+d_2$时，共处于$\Omega$中的两个种群，第二种群由于$\beta_2$太小，或者$D_2$，$d_2$过大，最终将趋于消亡，而第一种群，由于$\beta_1$较大，或者$D_1$，$d_1$较小，可以不被消亡，只$\beta_1$满足(3.6)，它最终将趋于稳定的平衡状态。

3．当$\beta_i>\lambda_0D_i+d_i(i=1,2)$时，如果$b_1b_2>c_1c_2$，则两种群可以共处于$\Omega$中；且当$a_i<2b_2\phi_m$，即环境因子较好时($a_i$较小)，它们可以永远共处于$\Omega$中；且当$\beta_1$，$\beta_2$满足(3.7)时，两种群永远不会被消亡，而最终稳定于平衡态(u_{1s}, u_{2s})。

参 考 文 献

[1] Gurtin, M. E. and R. C. MacCamy, Nonlinear age-dependent population dynamics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **54** (1974), 281—300.

[2] 宋健，人口系统的稳定性理论和临界妇女生育率，自动化学报，7(1)(1981)，1—12.

[3] 冯德兴，非线性人口发展方程的稳定性，数学物理学报，8(2)(1988)，159—167.

[4] Venturino, E., Age-structured predater-prey models, *Mathematical Modelling*, 5 (1984), 117—128.

[5] Langlais, M., Asymptotic behavior in some evolution equation arising in population dynamics, *Proceeding of Problems Elliptiques, Etparabliques Non-linear*, Nancy (1988).

[6] Webb, G.F., *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics*, Manuscritp (1985).

[7] Weinstock, E. and C. Rorres, Local stability of an age-structured population with density-dependent fertility and mortality, *SIAM, J. Appl. Math.*, 47(3) (1987), 589—603.

[8] Pao, C. V., Coexistence and stability of a competition-diffusion system in population dynamics, *J. Math. Anal. Appl.*, **83** (1981), 54—74.

[9] 叶其孝，《反应扩散方程引论》，科学出版社(1990).

On the Solution of the Model of Two Co-Affected Species

Zhang Wei-fu Lü Rong-qing

(*The Air Force Institute of Meteorology, Nanjing*)

Abstract

This paper discusses a model of two coeffected species with diffusion system, where the birth functions have the characteristic index decline, and then the circumstance factors a_i which are connected with natural resources, and the birth parameters β_i which could be controlled are introduced. By means of the upper-lower solutions, the existence, uniqueness and the local stability of equilibrium solutions of the model are discussed. It's discovered that the birth parameters β_i determine the developing tendency when other parameters are comparatively stable.

Key words birth function, dead function, effection-diffusion equation, upper-lower solutions