

阶梯形球面间流体流动的离心惯性效应*

刘震北

(哈尔滨工业大学, 1990年8月26日收到)

摘 要

本文推广运用了 Sommerfeld 代换方法, 从而导出了阶梯形球面间流体流动考虑离心惯性效应的解析解, 为球形静压推力轴承的精确设计提供了理论基础。

关键词 惯性 离心 雷诺数 压降

符 号

r, θ, φ ——球坐标

R ——球半径

e ——偏心距

c ——原始间隙

ε ——偏心率, $\varepsilon = \frac{e}{c}$

h ——油膜厚度

k ——油膜厚度比

$k = \frac{e=0 \text{ 时油室内油膜厚度}}{e=0 \text{ 时球环间隙内油膜厚度}}$

θ_0 ——供油孔出口角

θ_1 ——油室出口角

θ_2 ——球面出口角

u, v, w —— r, θ, φ 向分速度

v_0 ——油室进口平均速度

p ——压力

Q ——流量

ρ ——润滑油密度

μ ——润滑油粘度

Ω ——角速度

Re ——油室进口修正雷诺数

$$Re = \frac{\rho v_0 c}{\mu} \sin \theta_0 [2R + c(k + \varepsilon \cos \theta_0)] (k + \varepsilon \cos \theta_0)$$

一、引 言

为了提高承载能力和减少功率损失, 球形静压推力轴承被设计成带有阶梯形的油室早已为人们所熟知^[1,2], 但这是在 Navier-Stokes 方程式线性解基础上得到的。考虑各种惯性效应的非线性解, 只在球环间隙内被予以研究^[3,4]。对于阶梯形油室的惯性影响, 文献 [5] 曾就阶梯形平行圆板进行过有益的讨论。

本文将研究阶梯形球面间流体流动的离心惯性效应。如图 1 所示, 这里选择了最具代表性的间隙型球轴承为例进行分析。球半径小于球座半径, 球绕极轴旋转且沿其上有各种偏心

* 叶开沅推荐。

中国科学院自然科学基金资助课题。

移动。通过定义油膜厚度比 k ，并设在油室内 $k>1$ 和在球环间隙内 $k=1$ ，而对整个阶梯形球面间的流场建立了统一的数学模型。

二、支配方程

如图1所示的阶梯形球面间，工作流体是不可压缩、定常和常物性的，且沿子午面呈轴对称的层流流动；忽略质量力；又因 $h\ll R$ ，故可视径向分速度 $u=0$ ；由于压差流动沿程变

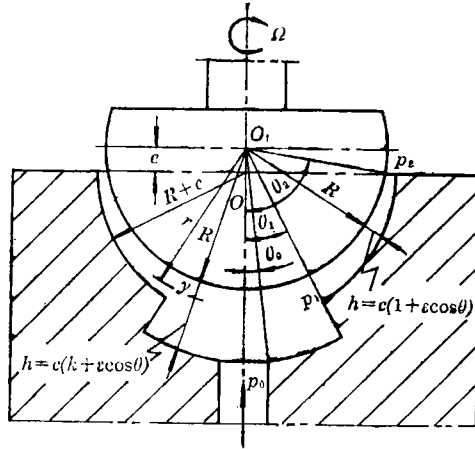


图1 阶梯形球面间流体的流动

化而引起的流动惯性很小，所以在 r, θ, φ 球坐标系中，Navier-Stokes方程式由数量级比较方法可简化成下列仅包含粘性项和离心惯性项的形式

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{w^2}{r} &= \frac{\partial p}{\partial r} \\ -\rho \frac{w^2 c t g \theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \\ 0 &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

而连续性方程式为

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) = 0 \quad (2.2)$$

式(2.2)在式(2.1)的简化过程中已自动得到了满足。令 $r=R+y$ ，则式(2.1)变为

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \frac{w^2}{R} &= \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\rho \frac{w^2 c t g \theta}{R} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

因为 $h\ll R$ ，仿曲面上边界层理论^[1]，将 p 视作与 y 无关，即有 $\partial p/\partial y=0$ 。因而 p 仅是 θ 的函数。

式(2.4)和(2.5)的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ 时, } v=0, w=\Omega R \sin\theta \\ y=h \text{ 时, } v=w=0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} h=kc+e\cos\theta=c(k+e\cos\theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ h=c+ccos\theta=e(1+c\cos\theta) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

把式(2.5)对 y 两次积分, 并利用边界条件(2.6), 求得

$$w=\Omega R \sin\theta(1-y/h) \quad (2.8)$$

将之代入式(2.4)左端的惯性项中, 整理得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\rho}{\mu} \Omega^2 R \sin\theta \cos\theta \left(1 - \frac{y}{h}\right)^2$$

因为 $\partial p/\partial \theta$ 与 y 无关, 将上式对 y 两次积分, 也利用边界条件(2.6), 求得

$$v = \frac{1}{2\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta} y(y-h) + \frac{\rho}{\mu} \Omega^2 R \sin\theta \cos\theta \left(\frac{hy}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3h} - \frac{y^4}{12h^2} \right) \quad (2.9)$$

引入通过任意 θ 处过流断面的流量

$$Q = \int_0^h v \cdot 2\pi R \sin\theta dy$$

将式(2.9)代入上式, 积分得

$$Q = -\frac{\pi h^3 \sin\theta}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\rho}{20\mu} \pi \Omega^2 R^2 h^3 \sin^2\theta \cos\theta \quad (2.10)$$

或者

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{6\mu Q}{\pi h^3 \sin\theta} + \frac{3}{10} \rho \Omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta \quad (2.11)$$

由于两个区间油膜厚度不同, 因而压力梯度对应于式(2.7)分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{6\mu Q}{\pi c^3 (k+e\cos\theta)^3 \sin\theta} + \frac{3}{10} \rho \Omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta \\ (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{6\mu Q}{\pi c^3 (1+e\cos\theta)^3 \sin\theta} + \frac{3}{10} \rho \Omega^2 R^2 \sin\theta \cos\theta \\ (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

求解上二式关键在于解决下述两个积分

$$\int \frac{d\theta}{(k+e\cos\theta)^3 \sin\theta} \quad (2.14)$$

$$\text{和} \quad \int \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^3 \sin\theta} \quad (2.15)$$

由于球面间的偏心率 e 有种种不同情况, 故上二式在不同情况下有不同的形式, 必须用相应不同的方法求解, 现分述如下。

三、压力分布和流量

1. $e < 1$

这时的油膜厚度即用式(2.7)表示:

$$\begin{cases} h=c(k+\varepsilon\cos\theta) & (\theta_0\leq\theta\leq\theta_1) \\ h=c(1+\varepsilon\cos\theta) & (\theta_1\leq\theta\leq\theta_2) \end{cases}$$

因为 $k\geq 1$, 所以 $\varepsilon < 1$ 时自然也会 $\varepsilon < k$. 故该情况下 $k=1$ 时, 式(2.15)与式(2.14)完全等效, 因此, 问题就归结为式(2.14)的积分如何进行. 其实, 求积分(2.15)并不困难, 这只要利用轴颈轴承研究中的Sommerfeld代换即可解决^[7], 然而积分(2.14)则需将此代换予以推广. 取代换角 α , 设

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon + k\cos\theta}{k + \varepsilon\cos\theta} \quad (3.1)$$

或

$$k - \varepsilon\cos\alpha = k - \frac{\varepsilon(\varepsilon + k\cos\theta)}{k + \varepsilon\cos\theta} = \frac{k^2 - \varepsilon^2}{k + \varepsilon\cos\theta}$$

所以

$$k + \varepsilon\cos\theta = \frac{k^2 - \varepsilon^2}{k - \varepsilon\cos\alpha} \quad (3.2)$$

得

$$\cos\theta = \frac{k\cos\alpha - \varepsilon}{k - \varepsilon\cos\alpha} \quad (3.3)$$

从而

$$\sin\theta = (1 - \cos^2\theta)^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{k\cos\alpha - \varepsilon}{k - \varepsilon\cos\alpha} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sin\alpha(k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}}{k - \varepsilon\cos\alpha} \quad (3.4)$$

由式(3.1):

$$\sin\alpha = (1 - \cos^2\alpha)^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{\varepsilon + k\cos\theta}{k + \varepsilon\cos\theta} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sin\theta(k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}}{k + \varepsilon\cos\theta} \quad (3.5)$$

微分式(3.2)并注意到式(3.5), 则

$$d\theta = \frac{(k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}}{k - \varepsilon\cos\alpha} d\alpha \quad (3.6)$$

又由式(3.1)和式(3.5), 得

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \ln \left[\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \right] = \ln \left[\frac{\frac{\sin\theta(k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}}{k + \varepsilon\cos\theta}}{1 + \frac{\varepsilon + k\cos\theta}{k + \varepsilon\cos\theta}} \right] \\ &= \ln \left[\frac{(k - \varepsilon)(1 - \cos\theta)}{(k + \varepsilon)(1 + \cos\theta)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

经过这一系列的代换和反代换的准备之后, 积分(2.14)即可由式(3.2)、(3.4)和(3.6)的代换来进行

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{(k + \varepsilon\cos\theta)^3 \sin\theta} &= \int \frac{(k - \varepsilon\cos\alpha)^3}{(k^2 - \varepsilon^2)^3} \cdot \frac{k - \varepsilon\cos\alpha}{\sin\alpha(k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}} \cdot \frac{(k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}}{k - \varepsilon\cos\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{(k^2 - \varepsilon^2)^3} \left[k(k^2 + 3\varepsilon^2) \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \varepsilon(3k^2 + \varepsilon^2) \ln \sin\alpha \right. \\ &\quad \left. + 3k\varepsilon^2 \cos\alpha + \frac{\varepsilon^3}{2} \sin^2\alpha \right] + C_1 \end{aligned}$$

由反代换式(3.1)、(3.5)和(3.7)代入上式, 即得

$$\begin{aligned}
 A(k, \varepsilon, \theta) = & \int \frac{d\theta}{(k + \varepsilon \cos\theta)^3 \sin\theta} = \frac{1}{(k^2 - \varepsilon^2)^3} \left\{ \frac{k}{2} (k^2 + 3\varepsilon^2) \right. \\
 & \cdot \ln \left[\frac{(k - \varepsilon)(1 - \cos\theta)}{(k + \varepsilon)(1 + \cos\theta)} \right] - \varepsilon(3k^2 + \varepsilon^2) \ln \left[\frac{\sin\theta (k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}}{k + \varepsilon \cos\theta} \right] \\
 & \left. + \frac{3k\varepsilon^2(\varepsilon + k \cos\theta)}{k + \varepsilon \cos\theta} + \frac{\varepsilon^3(k^2 - \varepsilon^2)\sin^2\theta}{2(k + \varepsilon \cos\theta)^2} \right\} + C_1 \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

而

$$A(1, \varepsilon, \theta) = \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos\theta)^3 \sin\theta} = A(k, \varepsilon, \theta)_{k=1} \quad (3.9)$$

利用上述结果, 方程式(2.12)和(2.13)分别对 θ 积分, 可得

$$\begin{cases} p = -\frac{6\mu Q}{\pi c^3} A(k, \varepsilon, \theta) + \frac{3}{20} \rho \Omega^2 R^2 \sin^2\theta + C_1 & (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ p = -\frac{6\mu Q}{\pi c^3} A(1, \varepsilon, \theta) + \frac{3}{20} \rho \Omega^2 R^2 \sin^2\theta + C_1 & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} p = -\frac{6\mu Q}{\pi c^3} A(k, \varepsilon, \theta) + \frac{3}{20} \rho \Omega^2 R^2 \sin^2\theta + C_1 & (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ p = -\frac{6\mu Q}{\pi c^3} A(1, \varepsilon, \theta) + \frac{3}{20} \rho \Omega^2 R^2 \sin^2\theta + C_1 & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{cases} \quad (3.11)$$

有关压力的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \theta = \theta_0 \text{ 时, } p = p_0 \\ \theta = \theta_1 \text{ 时, } p = p_1 \\ \theta = \theta_2 \text{ 时, } p = p_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

由以上三式即可得各区间的压力分布

$$\begin{cases} p - p_2 = \frac{6\mu Q}{\pi c^3} [A(k, \varepsilon, \theta_1) - A(k, \varepsilon, \theta) + A(1, \varepsilon, \theta_2) - A(1, \varepsilon, \theta_1)] \\ \quad + \frac{3}{20} \rho \Omega^2 R^2 (\sin^2\theta - \sin^2\theta_2) & (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} p - p_2 = \frac{6\mu Q}{\pi c^3} [A(1, \varepsilon, \theta_2) - A(1, \varepsilon, \theta)] + \frac{3}{20} \rho \Omega^2 R^2 (\sin^2\theta - \sin^2\theta_2) \\ & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{cases} \quad (3.14)$$

而油室进口与球面出口两端间的压力降为

$$\Delta p = p_0 - p_2 = \frac{6\mu Q}{\pi c^3} A_0 + \frac{3}{20} \rho \Omega^2 R^2 (\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta_2) \quad (3.15)$$

式中

$$A_0 = A(k, \varepsilon, \theta_1) - A(k, \varepsilon, \theta_0) + A(1, \varepsilon, \theta_2) - A(1, \varepsilon, \theta_1) \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} A(k, \varepsilon, \theta_0) = A(k, \varepsilon, \theta)_{\theta=\theta_0}, \quad A(k, \varepsilon, \theta_1) = A(k, \varepsilon, \theta)_{\theta=\theta_1} \\ A(1, \varepsilon, \theta_1) = A(k, \varepsilon, \theta)_{k=1, \theta=\theta_1}, \quad A(1, \varepsilon, \theta_2) = A(k, \varepsilon, \theta)_{k=1, \theta=\theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

显然, 当球静止不动时, 两端的压力降为

$$\Delta p_0 = (p_0 - p_2)_0 = \frac{6\mu Q}{\pi c^3} A_0 \quad (3.18)$$

设若 v_0 是进口($\theta = \theta_0$)处的平均流速, 引入流量

$$Q = v_0 \cdot \pi \sin\theta_0 [2R + c(k + c \cos\theta_0)] \cdot c(k + \varepsilon \cos\theta_0) \quad (3.19)$$

和进口修正雷诺数

$$Re = \frac{\rho v_0 c}{\mu} \cdot \frac{c}{\sin\theta_0 [2R + c(k + \varepsilon \cos\theta_0)] (k + \varepsilon \cos\theta_0)} \quad (3.20)$$

于是, 由式(3.13)、(3.14)、(3.18)、(3.19)和(3.20), 压力分布可做如下的无因次化

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p-p_2}{\Delta p_0} &= \left\{ [A(k, \varepsilon, \theta_1) - A(k, \varepsilon, \theta) + A(1, \varepsilon, \theta_2) - A(1, \varepsilon, \theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Re}{40} \left(\frac{\Omega R}{v_0} \right)^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_2) \right\} / A_0 \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \quad (3.21) \\ \frac{p-p_2}{\Delta p_0} &= \left\{ [A(1, \varepsilon, \theta_2) - A(1, \varepsilon, \theta)] + \frac{Re}{40} \left(\frac{\Omega R}{v_0} \right)^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_2) \right\} / A_0 \\ &\quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \quad (3.22) \end{aligned} \right.$$

定义压力损失系数，并注意到式(3.15)、(3.19)和(3.20)，则

$$\lambda_p = \frac{\Delta p}{\rho v_0^3 / 2} = \frac{12}{Re} A_0 + \beta \quad (3.23)$$

式中

$$\beta = \frac{3}{10} \left(\frac{\Omega R}{v_0} \right)^2 (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_2) \quad (3.24)$$

定义流量修正系数，并注意到式(3.23)和(3.20)，则

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\lambda_p}{12 A_0 / Re} = 1 + \frac{\beta}{12 A_0 / Re} \\ &= \frac{\Delta p c^2}{v_0 \cdot 6 \mu \sin \theta_0 [2R + c(k + \varepsilon \cos \theta_0)] (k + \varepsilon \cos \theta_0)} \quad (3.25) \end{aligned}$$

由上式求出 v_0 后代入式(3.19)，即得流量表达式

$$Q = \frac{\pi c^3 \Delta p}{6 \mu C_1 A_0} \quad (3.26)$$

以上推导及所得各式，适用于 $\varepsilon < 1$ 时的所有情况，即包括 $\varepsilon \leq 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$ 等。

2. $\varepsilon = 1$

这时的油膜厚度为

$$\begin{cases} h = c(k + \cos \theta) & (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ h = c(1 + \cos \theta) & (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{cases}$$

则积分(2.14)变为

$$\int \frac{d\theta}{(k + \cos \theta)^3 \sin \theta} = \int \frac{\sin \theta d\theta}{(k + \cos \theta)^3 \sin^2 \theta} = - \int \frac{d(\cos \theta)}{(k + \cos \theta)^3 (1 - \cos^2 \theta)}$$

将被积函数进行部分分式而后再积分，得

$$\begin{aligned} B(k, \theta) &= \int \frac{d\theta}{(k + \cos \theta)^3 \sin \theta} = \frac{1}{2(1-k^2)^3} \left[\frac{(k^2-1)^2}{(k+\cos\theta)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4k(k^2-1)}{k+\cos\theta} - 2(3k^2+1)\ln(k+\cos\theta) + (k+1)^3 \ln(1+\cos\theta) \right. \\ &\quad \left. - (k-1)^3 \ln(1-\cos\theta) \right] + C_2 \quad (3.27) \end{aligned}$$

同理，积分(2.15)变为

$$\begin{aligned} C(\theta) &= \int \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^3 \sin\theta} = \frac{1}{8} \left[\frac{4}{3(1+\cos\theta)^3} + \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+\cos\theta} + \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right] + C_3 \quad (3.28) \end{aligned}$$

以上二式不能归结为一式是显然的。因此，无因次压力分布为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p-p_2}{\Delta p_0} &= \left\{ [B(k, \theta_1) - B(k, \theta) + C(\theta_2) - C(\theta_1)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Re}{40} \left(\frac{\Omega R}{v_0} \right)^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_2) \right\} / B_0 \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ \frac{p-p_2}{\Delta p_0} &= \left\{ [C(\theta_2) - C(\theta)] + \frac{Re}{40} \left(\frac{\Omega R}{v_0} \right)^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_2) \right\} / B_0 \\ &\quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

式中

$$B_0 = B(k, \theta_1) - B(k, \theta_0) + C(\theta_2) - C(\theta_1) \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned} B(k, \theta_0) &= B(k, \theta)_{\theta=\theta_0}, \quad B(k, \theta_1) = B(k, \theta)_{\theta=\theta_1} \\ C(\theta_1) &= C(\theta)_{\theta=\theta_1}, \quad C(\theta_2) = C(\theta)_{\theta=\theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

而流量修正系数及流量分别为

$$C_t = 1 + \beta / \frac{12}{Re} B_0 \quad (3.33)$$

$$Q = \frac{\pi c^3 \Delta p}{6 \mu C_t B_0} \quad (3.34)$$

3. $k > \varepsilon > 1$

这时的油膜厚度仍为

$$\left\{ \begin{aligned} h &= c(k + \varepsilon \cos \theta) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \\ h &= c(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{aligned} \right.$$

由于 $k > \varepsilon$, 式 (3.8) 对阶梯油室仍然有效, 而在球环间隙内, 虽然 $k=1$, 但 $\varepsilon > 1$, 故式 (3.9) 不适用于此。欲求积分 (2.15), 又需对 Sommerfeld 代换做如下的推广。仍取代换角 α , 但设

$$\cos \alpha = \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \quad (3.35)$$

或

$$\varepsilon - \cos \alpha = \varepsilon - \frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\varepsilon + \cos \theta} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon + \cos \theta}$$

所以

$$\varepsilon + \cos \theta = \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon - \cos \alpha} \quad (3.36)$$

得

$$\cos \theta = \frac{\varepsilon \cos \alpha - 1}{\varepsilon - \cos \alpha} \quad (3.37)$$

从而

$$\sin \theta = (1 - \cos^2 \theta)^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{\varepsilon \cos \alpha - 1}{\varepsilon - \cos \alpha} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sin \alpha (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}}{\varepsilon - \cos \alpha} \quad (3.38)$$

由式 (3.35),

$$\sin \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{1 + \varepsilon \cos \theta}{\varepsilon + \cos \theta} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\sin \theta (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}}{\varepsilon + \cos \theta} \quad (3.39)$$

由式 (3.37),

$$1 + \varepsilon \cos \theta = 1 + \frac{\varepsilon(\varepsilon \cos \alpha - 1)}{\varepsilon - \cos \alpha} = \frac{(\varepsilon^2 - 1) \cos \alpha}{\varepsilon - \cos \alpha} \quad (3.40)$$

微分上式并注意到式(3.39)和(3.36), 则

$$d\theta = \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{1/2}}{\varepsilon - \cos \alpha} d\alpha \quad (3.41)$$

这样, 积分(2.15)即可由式(3.38)、(3.40)和(3.41)的代换来进行

$$\begin{aligned} \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3 \sin \theta} &= \int \frac{(\varepsilon - \cos \alpha)^3}{(\varepsilon^2 - 1)^3 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\varepsilon - \cos \alpha}{\sin \alpha (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}} \cdot \frac{(\varepsilon^2 - 1)^{1/2}}{\varepsilon - \cos \alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^3} \left[(1 + 3\varepsilon^2) \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \varepsilon(3 + \varepsilon^2) \ln \operatorname{tg} \alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\varepsilon^2}{\cos \alpha} - \frac{\varepsilon^3}{2 \cos^2 \alpha} \right] + C_4 \end{aligned}$$

把反代换式(3.35)和(3.39)代入上式, 即得

$$\begin{aligned} D(\varepsilon, \theta) &= \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3 \sin \theta} = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^3} \left\{ \frac{(1 + 3\varepsilon^2)}{2} \right. \\ &\quad \cdot \ln \left[\frac{(\varepsilon - 1)(1 - \cos \theta)}{(\varepsilon + 1)(\varepsilon + \cos \theta)} \right] - \varepsilon(3 + \varepsilon^2) \ln \left[\frac{\sin \theta (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right] \\ &\quad \left. + 3\varepsilon^2 \frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} - \frac{\varepsilon^3}{2} \left(\frac{\varepsilon + \cos \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right)^2 \right\} + C_4 \end{aligned} \quad (3.42)$$

于是, 无因次压力分布为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p - p_2}{\Delta p_0} &= \left[A(k, \varepsilon, \theta_1) - A(k, \varepsilon, \theta) + D(\varepsilon, \theta_2) - D(\varepsilon, \theta_1) \right] \\ &\quad + \frac{Re}{40} \left(\frac{\Omega R}{v_0} \right)^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_2) \Big/ D_0 \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1) \end{aligned} \right. \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p - p_2}{\Delta p_0} &= \left[D(\varepsilon, \theta_2) - D(\varepsilon, \theta) \right] + \frac{Re}{40} \left(\frac{\Omega R}{v_0} \right)^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_2) \Big/ D_0 \\ &\quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) \end{aligned} \right. \quad (3.44)$$

式中

$$D_0 = A(k, \varepsilon, \theta_1) - A(k, \varepsilon, \theta_0) + D(\varepsilon, \theta_2) - D(\varepsilon, \theta_1) \quad (3.45)$$

$$D(\varepsilon, \theta_1) = D(\varepsilon, \theta)_{\theta=\theta_1}, \quad D(\varepsilon, \theta_2) = D(\varepsilon, \theta)_{\theta=\theta_2} \quad (3.46)$$

而流量修正系数及流量分别为

$$C_t = 1 + \beta \Big/ \frac{12}{Re} D_0 \quad (3.47)$$

$$Q = \frac{\pi c^3 \Delta p}{6 \mu C_t D_0} \quad (3.48)$$

四、计算结果

阶梯形球面间流体的流动与其它类型间隙的过流流动一样, 压力无疑是一个重要参数, 令人最感兴趣的则是由于惯性效应所带来的压力分布的变化。由前分析已知, 油膜厚度比 k , 偏心率 ε , 坐标 θ , 速度参数 $\Omega R / u_0$ 和进口修正雷诺数 Re 都对压力分布有着不容忽视的影

计算所采用的阶梯球面为 $\theta_0=45^\circ$, $\theta_1=36^\circ$ 和 $\theta_2=90^\circ$, 与之进行比较的无阶梯连续球面亦为 $\theta_0=45^\circ$ 和 $\theta_2=90^\circ$. 同时, 为了简化分析, 参照轴承润滑理论, 一律取 $Re=1$.

首先, 图2所示为当 $e=0$ 时球静止不动情况下阶梯形球面间的压力分布. 可以看出, 随着油膜厚度比 k 的增加, 进油孔的压力是逐渐扩展到整个油室的. 从理论上讲, 只有当 $k \rightarrow \infty$ 时, 进油孔的压力才会完全充满整个油室, 而实际上, 当 $k=5$ 时, 阶梯外缘($\theta=\theta_1$)处的压力已不低于供油压力的98.52%. 因此, 在后面的所有计算中即取 $k=5$ 作为阶梯的适当深度.

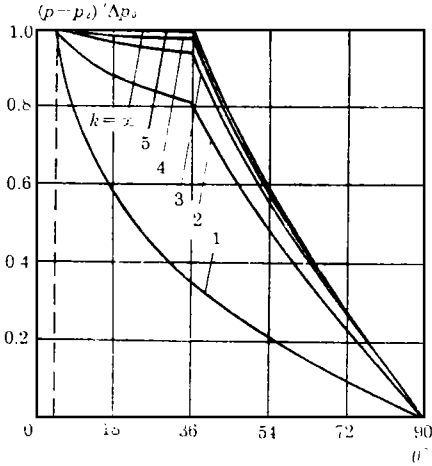


图2 球静止时阶梯形球面间的压力分布
($e=0, \Omega=0$)

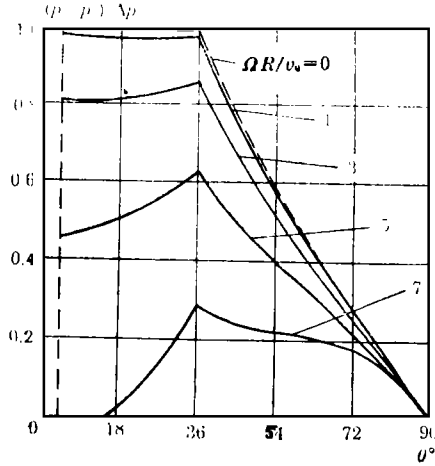


图3 阶梯形球面间的压力分布
($k=5, e=0, Re=1$)

图3和图4则显示了离心惯性效应在 $e=0$ 时对压力分布的影响. 图3所示阶梯油室入口处的压力降, 随着转速的增高, 比球静止时大幅度地下降, 而在接近油室出口处, 压力分布受离心惯性影响较小. 因此, 球环间隙内的压力分布, 比图4所示的连续球面对应区间大为改善, 尽管后者在入口处压力下降得较前者为少.

再把图3、图5、图6和图7综合起来观察分析, 可以看到, 离心惯性效应使压力分布较球静止时不同程度地下降, 而且转速越高, 压力下降得越多, 这对于各种偏心情况都是相同

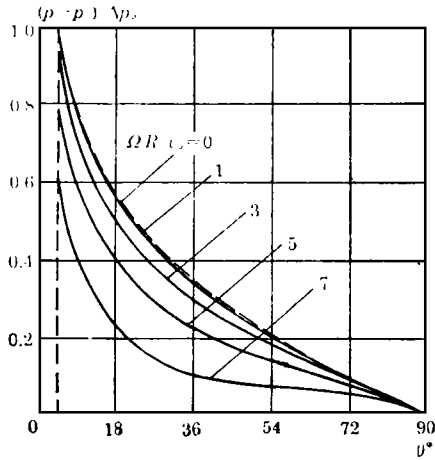


图4 无阶梯连续球面间的压力分布
($e=0, Re=1$)

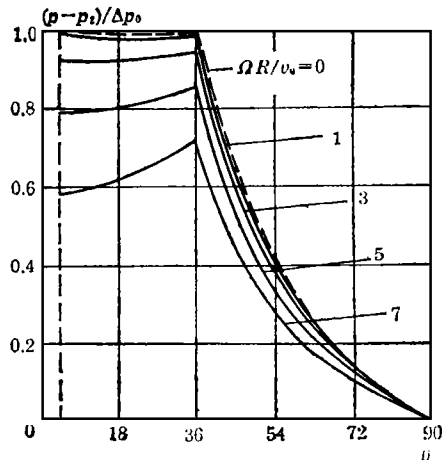


图5 阶梯形球面间的压力分布
($k=5, e=-0.5, Re=1$)

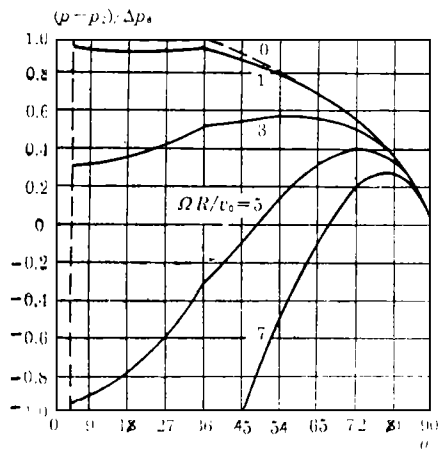


图6 阶梯形球面间的压力分布
($k=5, \epsilon=1.5, Re=1$)

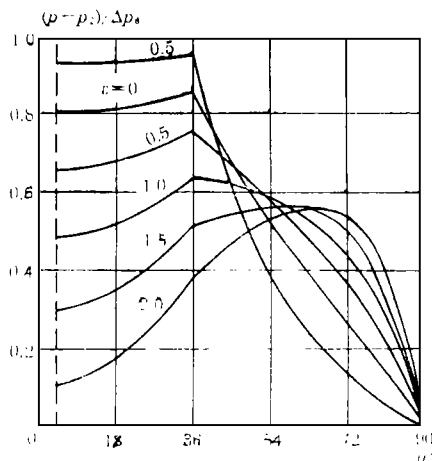


图7 阶梯形球面间的压力分布
($k=5, \Omega R / v_0 = 3, Re=1$)

的。而当转速保持不变时，由图7不难发现，在油室内，由于偏心率的加大，油膜厚度增大，则压力分布依次下降。特别是当 $\epsilon = -0.5$ 时，球沿极轴向下偏心，油膜厚度减小，故比起 $\epsilon = 0$ 时，压力分布反而升高。再看球环间隙内，当 $\epsilon = -0.5$ 时，间隙成为发散楔，其压力分布迅速降低，而 $\epsilon > 0$ 后，间隙成为收敛楔，压力分布下降遂缓慢，甚至出现上升，直至达到最大值以后，才在出口前迅速向零下降。

图8所示的流量修正系数，随着转速的升高和偏心率的加大均表现出了降低的趋势，由式(3.26)、(3.34)和(3.48)，则对应着流量的增加。

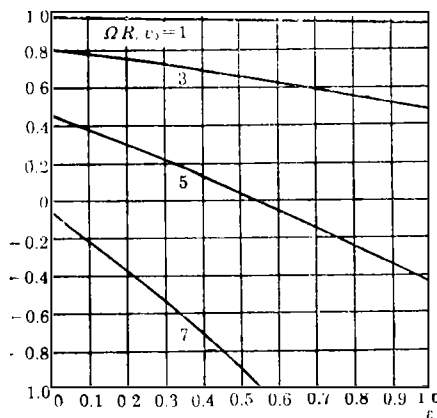


图8 流量修正系数($k=5, Re=1$)

五、讨 论

1. 本文在压力分布无因次化时除以了 Δp_0 ，从而准确地反映了考虑惯性前后压力分布的变化。而文献[4, 5]在本文符号意义下除以的 Δp ，由前分析已知， Δp 本身已经包含了惯性效应在内，用其使压力分布无因次化后再与线性解比较所得种种结论的不妥是不言而喻的。

2. 本文定义的油膜厚度比的概念不适用于球和球座半径相等的阶梯形球面间流体的流动，其分析方法笔者另文专述。

3. 本文为间隙型球形静压推力轴承的精确设计提供了新的理论基础，但欲完成其工程设计尚需解决承载能力等一系列实际问题。这里仅指出，承载能力计算式为

$$W = 2\pi R^2 \left[\int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta p \cdot \sin\theta \cos\theta d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta_1} (p - p_2) \sin\theta \cos\theta d\theta \right]$$

$$+ \int_{\theta_1}^{\theta_2} (p - p_2) \sin\theta \cos\theta d\theta \Big]$$

只要把本文前述各有关结果代入, 并需考虑偏心率 ε 更为细致的变化规律, 即可求得相应结果, 此不赘述。

参 考 文 献

- [1] Rippel, Harry C., *Cast Bronze Hydrostatic Bearing Design Manual*, Second Edition, Published by Cast Bronze Institute, INC (1975), 51—55.
- [2] 王致清、沙宝森、静压支承摩擦副的一种最优化设计法, 液压工业, (1) (1983), 15—20.
- [3] 王致清、刘震北, 球面间流体流动考虑流动惯性的近似解, 应用数学和力学, 5(2) (1984), 263—275.
- [4] Dowson, D. and C. M. Taylor, Fluid-inertia effects in spherical hydrostatic thrust bearings, *ASLE Trans.*, 10 (1976), 316—324.
- [5] Dowson, D., Inertia effects in hydrostatic thrust bearings, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 83(6) (1961), 227—234.
- [6] 赵学端、廖其莫, 《粘性流体力学》, 机械工业出版社 (1983), 103.
- [7] (英) Cameron, A., 《润滑理论基础》, 机械工业出版社 (1980), 93—95.

Centrifugal Inertia Effects of the Fluid Flow between Stepped Spherical Surfaces

Liu Zhen-bei

(Harbin Institute of Technology, Harbin)

Abstract

This paper generalizes and applies method of the Sommerfeld transformation, therefore, the analytical solutions of the fluid flow between stepped spherical surfaces are derived when the centrifugal inertia effects are taken into consideration. It presents a theoretical basis for exact design of the spherical hydrostatic thrust bearing.

Key words inertial, centrifugalization, Reynolds number, pressure drop