

电机工程中一类非线性振动 方程的渐近分析*

程友良 戴世强

(华北电力学院基础部) (上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所)

摘 要

本文采用文[1]中提出的修正的 Крылов-Боголюбов 方法, 研究电机工程中一类非线性振动方程, 定量地给出了存在极限环的参数范围以及极限环的振幅, 并判定该极限环是不稳定的, 这些结果与已知的定性分析结果完全一致, 从而进一步证实了上述渐近方法的有效性.

关键词 非线性振动 极限环 渐近分析 修正的 Крылов-Боголюбов 方法

一、引 言

强非线性问题的研究是一个非常热门而又颇有难度的课题. 近年来陆续有人用渐近方法来处理强非线性振动问题, 其中文献[1]就是一种尝试, 该文提出的修正的 Крылов-Боголюбов 方法在寻求这类问题的首项渐近解时往往十分有效. 本文试图用这一方法分析如下的强非线性振动问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{3}{2}x^2 &= -\varepsilon(\mu+x) \frac{dx}{dt} & (0 < \varepsilon \ll 1, \mu > 0) \\ x(0) = b, \quad \frac{dx}{dt}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

这个问题是在电机工程中提出来的, 文[2]采用 Мельников 方法对此作了定性研究, 确定 $\mu = \frac{2}{21}$ 为系统(1.1)的分支点, 当 $0 < \mu < \frac{2}{21}$ 时, 该系统存在唯一不稳定极限环, 当 $\mu > \frac{2}{21}$ 时, 系统(1.1)没有周期解, 并在周期扰动下出现浑沌解. 本文的研究结果定量地证实了上述分支点和极限环的结论, 并且给出了极限环的振幅.

二、渐 近 分 析

当 $\varepsilon=0$ 时, (1.1)式变成

* 上海市自然科学基金资助的课题.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{3}{2}x^2 &= 0 \\ x(0) = b, \quad \frac{dx}{dt}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

我们求(2.1)式的周期解

$$x = x_0(a, \varphi) \quad (2.2)$$

其中 a 为振幅 (常数), φ 为相位因子, x_0 为 φ 的周期函数, 不失一般性, 设周期为 2π , 而

$$\frac{d\varphi}{dt} = B_0(a), \quad \varphi(0) = 0 \quad (2.3)$$

将(2.2)式和(2.3)式代入(2.1)式, 得到

$$\left. \begin{aligned} B_0^2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \varphi^2} + x_0 + \frac{3}{2}x_0^2 &= 0 \\ x_0(a, 0) = b, \quad \frac{\partial x_0}{\partial \varphi}(a, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其初积分为

$$B_0^2 \left(\frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right)^2 + x_0^2 + x_0^3 = b^2 + b^3 \quad (2.5)$$

再积分一次, 得到符合各条件的解

$$x_0(a, \varphi) = b - a \operatorname{sn}^2(\Psi, k), \quad \Psi = \frac{K}{\pi} \varphi \quad (2.6)$$

其中,

$$B_0^2(a) = \left(\frac{\pi}{K} \right)^2 \frac{a}{4k^2} \quad (2.7)$$

$$k^2 = \frac{a}{-a+3b+1} = \frac{a^2}{2b+3b^2} \quad (2.8)$$

$\operatorname{sn}(\Psi, k)$ 是模为 k 的 Jacobi 椭圆正弦函数, $K = K(k)$ 是模为 k 的第一类完全椭圆积分, 而且可以证明仅当 $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1/3)$ 时才可能有上述周期解. 由(2.8)式可给出

$$b = \frac{1}{6} [3a - 2 + \sqrt{4 - 3a^2}] \quad (2.9)$$

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 根据文[1]中提出的方法, 假设(2.1)的解仍具有(2.6)式的形式, 只是

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + O(\varepsilon^2) \quad (2.10)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = B_0(a) + \varepsilon B_1(a) + O(\varepsilon^2) \quad (2.11)$$

将(2.10)、(2.11)和(2.6)式代入(2.1)式, 采取文[1]中的近似平均步骤, 得到

$$A_1(a) = \frac{F_1(a)}{D(a)} \quad (2.12)$$

$$B_1(a) = \frac{G_1(a)}{D(a)} \quad (2.13)$$

其中

$$F_1(a) = \int_0^{2\pi} x_{0\varphi} f(x_0, B_0 x_{0\varphi}) d\varphi \quad (2.14)$$

$$G_1(a) = - \int_0^{2\pi} x_{0a} f(x_0, B_0 x_{0\varphi}) d\varphi \quad (2.15)$$

$$D(a) = 2\pi B_0(a) W(a) \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} W(a) &= x_{0\varphi} \left(x_{0a\varphi} + \frac{B_0'}{B_0} x_{0\varphi} \right) - x_{a\varphi} x_{0\varphi\varphi} \\ &= b'(a) (2b + 3b^2) / 2B_0^2(a) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$W(a)$ 为文[3]中给出的Wronski行列式. $f(x, \dot{x}) = -(\mu + x)\dot{x}$.

于是,

$$\begin{aligned} F_1(a) &= -B_0 \left[\mu \int_0^{2\pi} x_0^2 d\varphi + \int_0^{2\pi} x_0 x_0^2 d\varphi \right] \\ &= -B_0 [\mu J_1(a) + J_2(a)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中

$$J_1(a) = \int_0^{2\pi} x_0^2 d\varphi, \quad J_2(a) = \int_0^{2\pi} x_0 x_0^2 d\varphi \quad (2.19)$$

x_0 由(2.6)给定, 于是

$$x_{0\varphi} = -2a \left(\frac{K}{\pi} \right) \operatorname{sn}\Psi \operatorname{cn}\Psi \operatorname{dn}\Psi \quad (2.20)$$

利用手册[4]中的公式求得

$$J_1(a) = - \frac{8a^2 K}{15\pi k^4} [(k^2 - 1)(k^2 - 2)K - 2(k^4 - k^2 + 1)E] \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} J_2(a) &= \frac{8a^3 K}{105\pi k^6} [(k^2 - 1)(4k^4 + k^2 - 8)K - (8k^6 - 5k^4 - 5k^2 + 8)E] \\ &\quad - \frac{8ab^2 K}{15\pi k^4} [(k^2 - 1)(k^2 - 2)K - 2(k^4 - k^2 + 1)E] \end{aligned} \quad (2.22)$$

其中 E 是模为 k 的第二类完全椭圆积分.

因为本文仅注意极限环性质的分析, 对 $G_1(a)$ 的形式就不作具体计算了. 原则上说来, 可求得确定的 $A_1(a)$ 和 $B_1(a)$, 由(2.10)式和(2.11)式可以解出 $a(t)$ 和 $\varphi(t)$, 从而求得问题的首项渐近解.

三、极限环分析

由上节的分析, 我们得到

$$A_1(a) = - \frac{B_0^2}{\pi b'} (2b + 3b^2) [\mu J_1(a) + J_2(a)] \quad (3.1)$$

由 $A_1(a) = 0$ 求得的根 a_0 即为一阶近似下的极限环振幅, 我们取 μ 在 $(0.05, 0.25)$ 区间内的若干个值画出 $A_1(a) \propto a$ 的曲线, 发现仅当 $\mu < 2/21$ 时, 曲线与 a 轴的 $(0, 1)$ 段有唯一的交点, 而当 $\mu > 2/21$ 时, 则无交点, 也就是说, 仅当 $0 < \mu < 2/21$ 时系统存在极限环 (参看图1).

我们从另一个角度来证实这一结论. 由(3.1)可见, 当 $A_1(a_0) = 0$ 时, 可得到

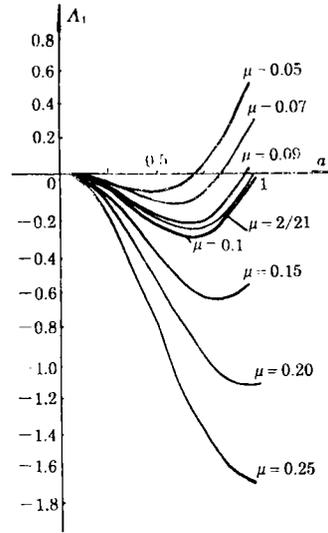


图 1

$$\mu = -\frac{J_2(a_0)}{J_1(a_0)} = \frac{a_0}{7k^2} \cdot \frac{(k^2-1)(4k^4+k^2-8)K - (8k^6-5k^4-5k^2+8)E}{(k^2-1)(k^2-2)K - 2(k^4-k^2+1)E} - b(a_0) \quad (3.2)$$

式中的 $k, E(k), K(k)$ 也取 $a=a_0$ 的值。我们画出 $\mu \propto a_0$ 的图 (见图 2), 发现当 $a_0 \in (0, 1)$ 时, μ 单调上升, 当 $\mu \in (0, \frac{2}{21})$ 时, a_0 单调上升, 而且可证

$$\lim_{a_0 \rightarrow 0} \mu = 0, \quad \lim_{a_0 \rightarrow 1} \mu = \frac{2}{21} \quad (3.3)$$

于是, 我们得出结论: 仅当 $0 < \mu < \frac{2}{21}$ 时才存在唯一的极限环, 由图 2 中给出的曲线, 可由每一个在 $(0, \frac{2}{21})$ 中的 μ 值得到对应的极限环振幅 a_0 值。当 $\mu = \frac{2}{21}$ 时, $a=1, b=\frac{1}{3}, k=1$,

$$x_0 = \frac{1}{3} - \tanh^2 \left[\frac{t}{2} (1 + \varepsilon B_1(1)) \right] \quad (3.4)$$

即为文 [2] 中给出的同宿轨道的修正形式 ([2] 中只给出了 $\varepsilon=0$ 时的同宿轨道)。

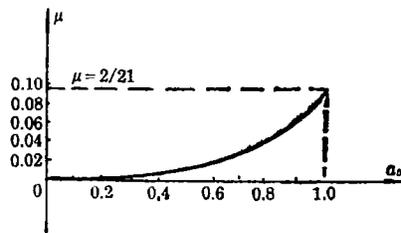


图 2

为了判定极限环的稳定性, 需要确定 $A_1'(a_0)$ 的符号, 若 $A_1'(a_0) < 0$ 则极限环稳定; 若 $A_1'(a_0) > 0$, 则极限环不稳定。由 (3.1)、(2.21)、(2.22) 式, 可以把 $A_1(a)$ 写成

$$A_1(a) = \frac{8aB_0^2}{105\pi^2 k^6 b' (2b+3b^2)} f(a) \tag{3.5}$$

其中

$$f(a) = 7(\mu+b) [(k^6 - 3k^4 + 2k^2)K - 2(k^6 - k^4 + k^2)E] - a[(4k^6 - 3k^4 - 9k^2 + 8)K - (8k^6 - 5k^4 - 5k^2 + 8)E] \tag{3.6}$$

由于(3.5)式右端的第一个因子恒正, $A_1(a_0) = 0$ 与 $f(a_0) = 0$ 是等价的, 因此

$$A_1'(a_0) = \frac{8a_0 B_0^2(a_0)}{105\pi^2 k^6(a_0) b'(a_0) [2b(a_0) + 3b^2(a_0)]} f'(a_0) \tag{3.7}$$

利用[4]中的公式, 可得

$$f'(a) = 7b'(a) [(k^6 - 3k^4 + 2k^2)K - 2(k^6 - k^4 + k^2)E] - [(4k^6 - 3k^4 - 9k^2 + 8)K - (8k^6 - 5k^4 - 5k^2 + 8)E] + \left\{ 7(\mu+b) \left[\left(\frac{1}{2} k^4 - \frac{11}{2} k^2 + 2 \right) K - (7k^4 - 4k^2 + 1) E \right] - a[(18k^4 - 7k^2 - 7)K - (28k^4 - 3k^2 - 7)E] \right\} \frac{dk^2}{da} \tag{3.8}$$

其中

$$b'(a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\sqrt{4-3a^2}}, \quad \frac{dk^2}{da} = \frac{8}{\sqrt{4-3a^2} (a + \sqrt{4-3a^2})} \tag{3.9}$$

将(3.8)中的 a 取为 a_0 , 代入(3.7)式, 即求得 $A_1'(a_0)$; 而对每一个 $\mu \in \left(0, \frac{2}{21}\right)$ 的值, a_0 由

$A_1(a_0) = 0$ 或(3.2)式确定, 我们画出 $A_1'(a_0) \propto a_0$ 的曲线 (见图3), 发现始终有

$$A_1'(a_0) > 0 \tag{3.10}$$

这就证实了所给出的极限环是不稳定的。

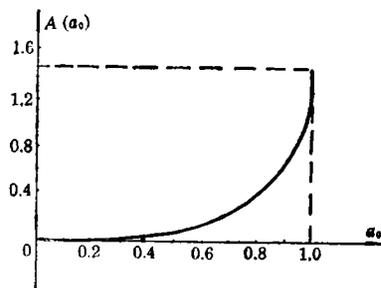


图 3

四、结 束 语

以上分析表明, 用修正的 K-B 方法研究本问题是十分有效的, 所得的定量结果与前人的定性结论相符, 而且还可得以确定极限环的振幅, 但尚不能确定极限环的具体形式, 用文[3]中的方法可解决这一问题, 我们将以另文介绍。

致谢 在本文的计算过程中, 乔宗椿、臧宏鸣同志曾给不少帮助, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] 戴世强, 强非线性振子的渐近分析, 应用数学和力学, 6(5)(1985), 395—400.
[2] 沈家骥、俞伯华, 非线性扰动方程的索动性态, 数学学报, 31(2)(1988), 215—220.
[3] 戴世强、庄峰青, 一类非线性振动系统的渐近解, 中国科学 (A辑), 29(1)(1986), 34—40.
[4] Byrd, P. F. and M. D., Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, 2nd ed., Springer, New York (1971).

Asymptotic Analysis of a Class of Nonlinear Oscillation Equation in Electrical Engineering

Cheng You-liang

(*Department of Fundamental Courses, North China Institute of Electric Power, Baoding*)

Dai Shi-qiang

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics;
Shanghai University of Technology, Shanghai*)

Abstract

In the present paper, we investigate a class of nonlinear oscillation equations in electrical engineering by using the modified Krylov-Bogolyubov method presented in [1]. We obtain quantitatively the parameter range for the existence of a limit cycle and the amplitude of the limit cycle, and find that the limit cycle is unstable. All the results agree entirely with the known results given by qualitative analysis, hence confirm the effectiveness of the above-mentioned asymptotic method.

Key words nonlinear oscillation, limit cycle, asymptotic analysis, modified Krylov-Bogolyubov method