应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类泛函微分方程周期解的存在性与应用*

赵杰民　黄克累　陆启韶

（北京航空航天大学应用数理系，1992年11月10日收到）

摘　　要

本文给出了一类滞后型泛函微分方程有一个周期解的四个充分性定理，其结果明显地优于著名的Yoshizawa周期解定理，最后给出了应用实例.

关键词　滞后型泛函微分方程　周期解　解的有界性

一、引　　言

滞后型泛函微分方程周期解的存在问题有着很重要的实际背景，在理论上也非常有意义，再加上其本身又具有较大的广泛性。例如，它包括了常微分方程、差分微分方程和积分微分方程等，因而这一问题引起了国内外众多学者的高度重视，并获得了一系列的研究成果。其中，Yoshizawa（吉泽太郎）周期解定理[1]十分著名，并且起着非常重要的作用，其应用也很广泛。二十六年来这一定理一直被普遍认为是最好的结果之一[2~3]。

Yoshizawa周期解定理指出：如果（i）时滞h小于或等于方程的周期ω；（ii）方程的解是一致有界的；（iii）方程的解对于界B是一致最终有界的，则方程有一个ω-周期解，它以B为界。但是，该定理不仅仅对任意有限时滞（即时滞h既可以大于周期ω，又可以等于或小于ω）的情形毫无办法。而且要求方程的解是一致有界的和对于界B是一致最终有界的条件也相当苛刻，既不易满足，又较难验证。

本文对任意有限时滞的情形证明了：若方程的解对于界B最终有界，则方程有一个ω-周期解，它以B为界，且当方程自治时，还有一个平衡解，它以B为界。从而去掉了Yoshizawa周期解定理的条件（i）和（ii），并将该定理的条件（iii）由较强的解对于界B一致最终有界减弱为解对于界B最终有界。同时还加强了结论。因此，本文的结果明显地改进了Yoshizawa周期解定理，并使得一些已有的结果均成为本文结果的简单推论。例如，文[3]的定理6和定理7、文[1]§37的推论等等。根据我们获得的上述结果，本文还给出了方程有一个ω-周期解的几个判别定理。

* 李骊推荐.
国家自然科学基金、航空科学基金和高等学校博士学科点专项科研基金资助项目.

最后，本文给出了应用实例．把我们获得的结果应用于T．A．Burton教授提出的具有延迟恢复力的一类反馈系统，得到了该系统有一个ω-周期运动的充分性条件，该条件没有周期ω必须大于或等于时滞的要求．

全文共分四部分，即：一、引言；二、定理表述；三、定理的证明；四、应用．

二、定理表述

设实常数$h\geqslant 0$，$C=C([-h,0],\ \mathbb{R}^n)$，$x\in\mathbb{R}^n$，$|x|$是$x$的范数，$x_t=x(t+\theta)$，$\theta\in[-h,0]$，对$\phi\in C$，定义$|\phi|=\sup\limits_{\theta\in[-h,0]}|\phi(\theta)|$，$\dot{x}$表示右导数，$x_t$是$C$的元素．$C$是具一致收敛拓扑的Banach空间．$F:\mathbb{R}\times C\to\mathbb{R}^n$完全连续、关于$t$是$\omega$-周期的，$\omega>0$，此处的$h$既可以小于或等于$\omega$，又可以大于$\omega$，并且滞后型泛函微分方程

$$\dot{x}(t)=F(t,\ x_t) \tag{2.1}$$

的过$(\sigma,\ \phi)\in\mathbb{R}\times C$的解唯一．

定理1 设(2.1)的解对于界B最终有界，则

1) (2.1)有一个ω-周期解，它以B为界；

2) 若(2.1)自治，则(2.1)有一个平衡解．它以B为界．

本文关于李雅普诺夫泛函$V(t,\ x_t)$的规定同文[1]，即$V(t,\ x_t)$为纯量连续泛函，且关于x_t满足局部Lipshitz条件．

定理2 设存在李雅普诺夫泛函$V(t,\ x_t)$，其定义在$\mathbb{R}\times C$上，满足下列条件：

1) $a(|x|)\leqslant V(t,\ x_t)$对$|x_t|\geqslant H$，其中$H>0$是常数，它可以是大的数，$a(r)$是：$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$的连续不减函数，对$r>H$，$a(r)>0$，且$\lim\limits_{r\to+\infty}a(r)=+\infty$；

2) $\dot{V}_{(2.1)}(t,\ x_t)\leqslant -p(t)V(t,\ x_t)+q(t)$，其中函数$p(t)$，$q(t)$均连续；

3) $\int_\sigma^{+\infty}p(t)dt=+\infty$且$q(t)\equiv 0$，其中$\sigma\in\mathbb{R}$为常数；或

3)′ $\int_\sigma^{+\infty}p(t)dt=+\infty$且存在常数$M_0$和$t_0$．使得当$t\geqslant t_0$时$q(t)\leqslant M_0p(t)$．

则(2.1)有一个ω-周期解．若(2.1)自治，(2.1)有一个平衡解．

定理3 设存在李雅普诺夫泛函$V(t,\ x_t)$．其定义在$\mathbb{R}\times C$上，满足下列条件：

1) $b(|x|)\leqslant V(t,\ x_t)$，其中$b(r)$是：$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$的连续不减函数，且$\lim\limits_{r\to+\infty}b(r)=+\infty$；

2) $\dot{V}_{(2.1)}(t,\ x_t)\leqslant -p(t)V(t,\ x_t)+q(t)V^\alpha(t,\ x_t)$，其中函数$p(t)$、$q(t)$均连续．$\alpha<1$为常数；

3) $\int_\sigma^{+\infty}p(t)dt=+\infty$且存在常数$M_0$和$t_0$，使得当$t\geqslant t_0$时$q(t)\leqslant M_0p(t)$．

则(2.1)有一个ω-周期解．若(2.1)自治，(2.1)有一个平衡解．

定理4 设存在李雅普诺夫泛函$V(t,\ x_t)$，其定义在$\mathbb{R}\times C$上 满足下列条件：

1) $b(|x|)\leqslant V(t,\ x_t)$，其中$b(r)$是：$\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\backslash\{0\}$的连续不减函数．且$\lim\limits_{r\to+\infty}b(r)=+\infty$；

2) $\dot{V}_{(2.1)}(t, x_t) \leqslant -p(t)V(t, x_t)+q(t)V^{\alpha}(t, x_t)$，其中函数 $p(t)$，$q(t)$ 均连续，$\alpha>1$ 为常数；

3) $\int_{\sigma}^{+\infty} p(t)dt=-\infty$ 且存在常数 $M_0>0$ 和常数 t_0，使得当 $t\geqslant t_0$ 时 $q(t)\leqslant M_0 p(t)$；或

3)′ $\int_{\sigma}^{+\infty} p(t)dt=-\infty$ 且

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_{\sigma}^{t}(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi}{\exp\left[\int_{\sigma}^{t}(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]}=+\infty.$$

则(2.1)有一个 ω-周期解。若(2.1)自治，(2.1)有一个平衡解。

三、定理的证明

1. **定理1的证明** 滞后型泛函微分方程(2.1)的过 $(\sigma, \phi)\in \mathbb{R}\times C$ 的解在 $\mathbb{R}^n$ 空间中记为 $x(x, \sigma, \phi)$，在 C 空间中记为 $x_t(\sigma, \phi)$，σ 为初始时刻，$T(t, \sigma)$ 为(2.1)的解映射：$T(t, \sigma)\phi=x_t(\sigma, \phi)$，$\phi\in C, t\geqslant\sigma$，$\sigma\in\mathbb{R}$。则对 $\forall t\in\mathbb{R}^+$、$\forall\phi\in C$、$\forall\sigma\in\mathbb{R}$ 以及 $\forall s\in\mathbb{R}^+$，有 $T(\sigma, \sigma)\phi=x_\sigma(\sigma, \phi)=\phi$。$T(\sigma+s+t, \sigma+s)T(\sigma+s, \sigma)\phi=T(\sigma+s+t, \sigma+s)x_{\sigma+s}(\sigma, \phi)=x_{\sigma+s+t}(\sigma+s, x_{\sigma+s}(\sigma, \phi))=x_{\sigma+s+t}(\sigma, \phi)=T(\sigma+s+t, \sigma)\phi$。$T(\sigma+\omega+t, \sigma+\omega)\phi=x_{\sigma+\omega+t}(\sigma+\omega, \phi)$，当 $t=0$ 时，$x_{\sigma+\omega+t}(\sigma+\omega, \phi)=x_{\sigma+\omega}(\sigma+\omega, \phi)=\phi$，因为 $T(\sigma+t, \sigma)\phi=x_{\sigma+t}(\sigma, \phi)$，当 $t=0$ 时，$x_{\sigma+t}(\sigma, \phi)=x_{\sigma+0}(\sigma, \phi)=\phi$，由于 $F(t, x_t)$ 关于 t 是 ω-周期的，并且方程(2.1)的过 $(0, \phi)$ 的解又是唯一的，所以 $x_{\sigma+\omega+t}(\sigma+\omega, \phi)\equiv x_{\sigma+t}(\sigma, \phi)$，故 $T(\sigma+\omega+t, \sigma+\omega)\phi=T(\sigma+t, \sigma)\phi$。由假设及连续依赖性定理知 $x_{\sigma+t}(\sigma, \phi)$ 是连续的。因此，方程(2.1)生成一个在Banach空间 C 上的 ω-周期过程。

对于 C 上的动力系统 $\{T(t): t\geqslant0\}$，如果存在序列 $\{c_n\}\subseteq C$，$\{t_n\}\subseteq(0, \infty)$ 满足 $T(t_n)c_n=c_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=0$，并且 $\{c_n\}$ 的某子列收敛于 c_0，我们知道，这时 c_0 是一个平衡点。对于 $t\geqslant\sigma$，我们把解映射 $T(t, \sigma)$ 写成：$T(t, \sigma)=D(t, \sigma)+A(t-\sigma)$，其中 $D(t, \sigma): C\to C$，$t\geqslant\sigma$，为

$$D(t, \sigma)\phi(\theta)=\begin{cases}\phi(0) & (t+\theta<\sigma).\\ \phi(0)+\int_{\sigma}^{t+\theta}F(s, T(s, \sigma)\phi)ds, & \\ & (t+\theta\geqslant\sigma,\ -h\leqslant\theta\leqslant0).\end{cases}$$

$A(t): C\to C$，$t\geqslant0$ 为

$$A(t)\phi(\theta)=\begin{cases}\phi(t+\theta)-\phi(0) & (t+\theta<0).\\ 0 & (t+\theta\geqslant0,\ -h\leqslant\theta\leqslant0).\end{cases}$$

对于 $t\geqslant\sigma$，$D(t, \sigma)$ 是条件完全连续的。算子 $A(t)$ 对每个 $t\geqslant0$ 都是 C 上的一个有界线性算子，并有：$A(t+\tau)=A(t)A(\tau)$，$t\geqslant0$，$\tau\geqslant0$；$A(t)=0$，$t\geqslant h$。于是，$T(t, \sigma)$，$t\geqslant\sigma+h$，是条件完全连续的。如果在 C 上的 ω—周期过程 U 是条件压缩的、有一个有界集 $\tilde{B}\subseteq C$ 使得 $\mathbb{R}\times\tilde{B}$ 吸引 C 的点，并且对某整数 N，$D(0, N\omega)$ 是条件完全连续的，我们知道，这时方程(2.1)必有一个 ω-周期轨道。因此，对于方程(2.1)生成的一个 ω-周期过程 U，如果存在一个有

界集 $\tilde{B}\subseteq C$ 使得 $\mathbb{R}\times\tilde{B}$ 吸引 C 的点，则方程（2.1）必有一个 ω-周期解，特别地，如果方程(2.1)是自治的，这时它必有一个平衡解．

由于方程(2.1)的解 $x(\sigma,\ \phi)(t)$ 对于界 B 是最终有界的．所以．对 $\forall(\sigma,\ \phi)\in\mathbb{R}\times C$，存在常数 $\bar{t}_0(\sigma,\ \phi)$，当 $t\geqslant\sigma+\bar{t}_0(\sigma,\ \phi)$ 时有 $|x(\sigma,\ \phi)(t)|<B$．取 $\tilde{B}=\{\ \ :_{\hat{\phi}}\in C,\ |\hat{\phi}|\leqslant B\}$，则 $\tilde{B}$ 是 C 中的一个有界集．当 $t\geqslant\bar{t}_0(\sigma,\ \phi)+h$ 时，必有 $t+\sigma+\theta\geqslant\bar{t}_0(\sigma,\ \phi)+\sigma$，$-h\leqslant\theta\leqslant0$．所以，当 $t\geqslant\bar{t}_0(\sigma,\ \phi)+h$ 时有 $|x_{t+\sigma}(\sigma,\ \phi)|<B$．故对 $\forall\varepsilon<0$、$\forall\sigma\in\mathbb{R}$、$\forall\phi\in C$，都存在常数 $\bar{t}_0(\sigma,\ \phi)+h$，对 $t\geqslant\bar{t}_0(\sigma,\ \phi)+h$，有

$$
\begin{aligned}
&(\sigma+t,\ T(\sigma+t,\ \sigma)\phi)=(\sigma+t,\ x_{\sigma+t}(\sigma,\ \phi))\\
&\quad\subseteq\{(\bar{t},\ \bar{c}):(\bar{t},\ \bar{c})\in\mathbb{R}\times C,\ \operatorname{dist}(\mathbb{R}\times\tilde{B},\ (\bar{t},\ \bar{c}))<\varepsilon\}\\
&\quad\overset{def}{=\!=\!=}\mathscr{B}(\mathbb{R}\times\tilde{B},\ \varepsilon).
\end{aligned}
$$

即存在一个有界集 $\tilde{B}\subseteq C$ 使得 $\mathbb{R}\times\tilde{B}$ 吸引 C 的点．于是，方程（2.1）有一个 ω-周期解 x_1，如果方程(2.1)是自治的，则方程(2.1)有一个平衡解 x_2．再由解对界 B 的最终有界性，即知 x_1 与 x_2 均以 B 为界．故定理 1 得证．证毕．

2．**定理 2 的证明**　对 $\forall\sigma\in\mathbb{R}$、$\forall\phi\in C$，由不等式

$$\dot{V}_{(2.1)}(t,\ x_t)\leqslant-p(t)V(t,\ x_t)+q(t)$$

成立及 $\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]$ 的非负性便有不等式

$$
\begin{aligned}
&[\dot{V}_{(2.1)}(t,\ x_t)+p(t)V(t,\ x_t)]\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]\\
&\quad\leqslant q(t)\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]
\end{aligned}
$$

成立，亦即不等式

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}_{(2.1)}(t,\ x_t)\cdot\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]+V(t,\ x_t)\frac{d}{dt}\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]\\
&\quad\leqslant q(t)\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]
\end{aligned}
$$

成立，故不等式

$$\frac{d}{dt}\left[V(t,\ x_t)\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]\leqslant q(t)\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]\right.$$

成立，便有不等式

$$
\begin{aligned}
&V(t,\ x_t)\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]-V(\sigma,\ \phi)\\
&\quad\leqslant\int_\sigma^t q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi p(\eta)d\eta\right]d\xi
\end{aligned}
$$

成立，所以有

$$V(t,\ x_t)\leqslant\frac{V(\sigma,\phi)+\int_\sigma^t q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi p(\eta)d\eta\right]d\xi}{\exp\left[\int_\sigma^t p(\xi)d\xi\right]}\tag{3.1}$$

由定理 1 下面只需证(2.1)的解在定理 2 的条件下是最终有界的即可．

如果$\int_{\sigma}^{+\infty}p(t)dt=+\infty$且$q(t)\equiv 0$，则存在常数$T_2(\sigma,\phi)$，使得当$t\geqslant\sigma+T_2(\sigma,\phi)$时有

$$\frac{V(\sigma,\phi)}{\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]}<a(H+1) \tag{3.2}$$

则当$t\geqslant\sigma+T_2(\sigma,\phi)$时有

$$|x(\sigma,\phi)(t)|<H+1 \tag{3.3}$$

若不然，则存在$t_1\geqslant\sigma+T_2(\sigma,\phi)$，使得

$$|x(\sigma,\phi)(t_1)|\geqslant H+1 \tag{3.4}$$

于是由(3.4)、(3.1)和(3.2)式有

$$\begin{aligned}a(H+1)&\leqslant a(|x(\sigma,\phi)(t_1)|)\leqslant V(t_1,x_{t_1})\\&\leqslant\frac{V(\sigma,\phi)}{\exp\left[\int_{\sigma}^{t_1}p(\xi)d\xi\right]}<a(H+1)\end{aligned} \tag{3.5}$$

即

$$a(H+1)<a(H+1) \tag{3.6}$$

矛盾.

如果$\int_{\sigma}^{+\infty}p(t)dt=+\infty$且存在常数$M_0$和$t_0$，使得当$t\geqslant t_0$时$q(t)\leqslant M_0p(t)$，则当$t\geqslant t_0$时由(3.1)式有

$$\begin{aligned}V(t,x_t)&\leqslant\frac{V(\sigma,\phi)+\int_{\sigma}^{t_0}q(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]d\xi+\int_{t_0}^{t}q(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]d\xi}{\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]}\\
&\leqslant\frac{V(\sigma,\phi)+\int_{\sigma}^{t_0}q(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]d\xi+\int_{t_0}^{t}M_0p(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]d\xi}{\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]}\\
&=\frac{V(\sigma,\phi)+\int_{\sigma}^{t_0}q(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]d\xi+\int_{t_0}^{t}M_0d\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]}{\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]}\\
&=\left[V(\sigma,\phi)+\int_{\sigma}^{t_0}q(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]d\xi\right.\\
&\quad\left.+M_0\left(\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]-\exp\left[\int_{\sigma}^{t_0}p(\xi)d\xi\right]\right)\right]\left(\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]\right)^{-1}\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{r\to+\infty}a(r)=+\infty$，所以存在常数$\tilde{B}\geqslant H+1$，使得

$$a(\tilde{B})>M_0 \tag{3.7}$$

于是存在常数$\tilde{T}_2(\sigma,\phi)$，使得当$t\geqslant\sigma+\tilde{T}_2(\sigma,\phi)$时有

$$\begin{aligned}V(t,x_t)&\leqslant\left[V(\sigma,\phi)+\int_{\sigma}^{t_0}q(\xi)\exp\left[\int_{\sigma}^{\xi}p(\eta)d\eta\right]d\xi\right.\\
&\quad\left.+M_0\left(\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]-\exp\left[\int_{\sigma}^{t_0}p(\xi)d\xi\right]\right)\right]\left(\exp\left[\int_{\sigma}^{t}p(\xi)d\xi\right]\right)^{-1}\\
&<a(\tilde{B})\end{aligned} \tag{3.8}$$

则当$t\geqslant\sigma+\tilde{T}_2(\sigma,\phi)$时有 $|x(\sigma,\phi)(t)|<\tilde{B}$ (3.9)

若不然，则存在$t_2\geqslant\sigma+\tilde{T}_2(\sigma,\phi)$使得 $|x(\sigma,\phi)(t_2)|\geqslant\tilde{B}$ (3.10)

于是由(3.10)和(3.8)式有

$$a(\bar{B})\leqslant a(|x(\sigma,\phi)(t_2)|)\leqslant V(t_2,x_{t_2})<a(\bar{B}) \tag{3.11}$$

即 $$a(\bar{B})<a(\bar{B}) \tag{3.12}$$

矛盾。

所以，在定理 2 的条件下(2.1)的解是最终有界的。证毕。

3 定理 3 的证明 $\forall(\sigma,\phi)\in \mathbb{R}\times C$，由

$$\dot{V}_{(2.1)}(t,x_t)\leqslant -p(t)V(t,x_t)+q(t)V^{\alpha}(t,x_t)$$

有

$$\frac{d}{dt}[V^{1-\alpha}(t,x_t)]\leqslant -(1-\alpha)p(t)V^{1-\alpha}(t,x_t)+(1-\alpha)q(t)$$

与定理 2 的证明过程类似，我们可以证明下面的不等式(3.13)成立

$$V^{1-\alpha}(t,x_t)\leqslant\frac{V^{1-\alpha}(\sigma,\phi)+\int_\sigma^t(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi}{\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\xi)d\xi\right]} \tag{3.13}$$

同理，我们也可以证明当 $t\geqslant t_0$ 时下面的不等式(3.14)成立

$$\begin{aligned}V^{1-\alpha}(t,x_t)\leqslant&\Big(V^{1-\alpha}(\sigma,\phi)+\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi\\&+M_0\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]-\exp\left[\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]\Big)\Big)\\&\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\xi)d\xi\right]\Big)^{-1}\end{aligned} \tag{3.14}$$

由于 $\lim\limits_{r\to+\infty}b(r)=+\infty$，所以存在常数 $B^*>0$ 使得 $b^{1-\alpha}(B^*)>M_0$，又因为 $1-\alpha>0$ 且 $\int_\sigma^{+\infty}p(t)=+\infty$，所以存在常数 $T_3(\sigma,\phi)$，使得当 $t\geqslant\sigma+T_3(\sigma,\phi)$ 时有

$$\begin{aligned}V^{1-\alpha}(t,x_t)\leqslant&\Big(V^{1-\alpha}(\sigma,\phi)+\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi\\&+M_0\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]-\exp\left[\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]\Big)\Big)\\&\cdot\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\xi)d\xi\right]\Big)^{-1}<b^{1-\alpha}(B^*)\end{aligned} \tag{3.15}$$

则当 $t\geqslant\sigma+T_3(\sigma,\phi)$ 时有

$$|x(\sigma,\phi)(t)|<B^* \tag{3.16}$$

若不然，则存在 $t_3\geqslant\sigma+T_3(\sigma,\phi)$ 使得

$$|x(\sigma,\phi)(t_3)|\geqslant B^* \tag{3.17}$$

于是由(3.17)和(3.15)式有

$$b^{1-\alpha}(B^*)\leqslant b^{1-\alpha}(|x(\sigma,\phi)(t_3)|)\leqslant V^{1-\alpha}(t_3,x_{t_3})<b^{1-\alpha}(B^*) \tag{3.18}$$

即 $$b^{1-\alpha}(B^*)<b^{1-\alpha}(B^*) \tag{3.19}$$

矛盾。

所以，在定理 3 的条件下(2.1)的解是最终有界的。由定理 1，定理 3 得证。证毕。

4. 定理 4 的证明 $\forall(\sigma,\phi)\in \mathbb{R}\times C$，由

$$\dot{V}_{(2.1)}(t,x_t)\leqslant -p(t)V(t,x_t)+q(t)V^{\alpha}(t,x_t)$$

有

$$\frac{d}{dt}[V^{1-\alpha}(t,x_t)]\geqslant -(1-\alpha)p(t)V^{1-\alpha}(t,x_t)+(1-\alpha)q(t)$$

同理可证下面的不等式(3.20)与(3.21)式都成立

$$V^{1-\alpha}(t,x_t)\geq\frac{V^{1-\alpha}(\sigma,\phi)+\int_\sigma^t(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi}{\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]}\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}V^{1-\alpha}(t,x_t)\geq&\Big[V^{1-\alpha}(\sigma,\phi)+\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi\\&+M_0\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]-\exp\left[\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]\Big)\Big]\\&\cdot\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]\Big)^{-1}\text{(当 }t\geq t_0\text{ 时)}\end{aligned}\tag{3.21}$$

因为 $\lim\limits_{r\to+\infty}b(r)=+\infty$，所以存在常数$\bar{B}>0$ 使得$b^{\alpha-1}(\bar{B})>\frac{1}{M_0}$，即$M_0>\frac{1}{b^{\alpha-1}(\bar{B})}$.又因为

$1-\alpha<0$ 且$\int_\sigma^{+\infty}p(t)dt=-\infty$，所以，存在常数$T_4(\sigma,\phi)$，使得当 $t\geq\sigma+T_4(\sigma,\phi)$时有

$$\begin{aligned}V^{1-\alpha}(t,x_t)\geq&\Big[V^{1-\alpha}(\sigma,\phi)+\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi\\&+M_0\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]-\exp\left[\int_\sigma^{t_0}(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]\Big)\Big]\\&\cdot\Big(\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]\Big)^{-1}>\frac{1}{b^{\alpha-1}(\bar{B})}\end{aligned}\tag{3.22}$$

则当 $t\geq\sigma+T_4(\sigma,\phi)$时有

$$|x(\sigma,\phi)(t)|<\bar{B}\tag{2.23}$$

若不然，则存在 $t_4\geq\sigma+T_4(\sigma,\phi)$使得

$$|x(\sigma,\phi)(t_4)|\geq\bar{B}\tag{3.24}$$

于是由(3.24)和(2.22)式有

$$b^{\alpha-1}(\bar{B})\leq b^{\alpha-1}(|x(\sigma,\phi)(t_4)|)\leq V^{\alpha-1}(t_4,\ x_{t_4})<b^{\alpha-1}(\bar{B})\text{，矛盾.}$$

如果$\int_\sigma^{+\infty}p(t)dt=-\infty$且

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_\sigma^t(1-\alpha)q(\xi)\exp\left[\int_\sigma^\xi(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]d\xi}{\exp\left[\int_\sigma^t(1-\alpha)p(\eta)d\eta\right]}=+\infty$$

由不等式(3.20)知：当 $t\to+\infty$ 时，$V(t,x_t)\to0$，因为 $\lim\limits_{r\to+\infty}b(r)=+\infty$，所以存在常数 $B_4>0$ 和常数$\bar{T}_4(\sigma,\phi)$，使得当 $t\geq\sigma+\bar{T}_4(\sigma,\phi)$ 时有

$$V(t,x_t)<b(B_4)\tag{3.25}$$

则当 $t\geq\sigma+\bar{T}_4(\sigma,\phi)$ 时有

$$|x(\sigma,\phi)(t)|<B_4\tag{3.26}$$

若不然，则存在 $\bar{t}_4\geq\sigma+\bar{T}_4(\sigma,\phi)$ 使得

$$|x(\sigma,\phi)(\bar{t}_4)|\geq B_4\tag{3.27}$$

于是由(3.27)和(3.25)式有

即 $$b(B_4)\leq b(|x(\sigma,\phi)(\bar{t}_4)|)\leq V(\bar{t}_4,\ x_{\bar{t}_4})<b(B_4)\tag{3.28}$$

$$b(B_4)<b(B_4) \tag{3.29}$$

矛盾。

所以在定理 4 的条件下(2.1)的解是最终有界的．由定理 1，定理 4 得证。证毕。

四、应　　用

考虑反馈系统[6]

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+g(x(t-\tau))=p(t) \tag{4.1}$$

其中 $p(t)$是外力，$g(x(t-\tau))$是延迟恢复力，时滞$\tau=\text{const}>0$，摩擦与速度成比例，$a=\text{const}>0$。

由本文定理 1 可以得到下面的讨论：

如果

1) $p(t)$是周期为 ω 的连续周期函数，g 是连续可微的；

2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x)\ \text{sgn}x=\infty$ 且存在一个包含原点在内的有界集 Ω 使得在Ω的补集 Ω^c 上 $|g'(x)|\leqslant c$；

3) $\tau c<a$，

则(4.1)有一个ω-周期运动．特别地，当 $p(t)=K=\text{const}$ 时，在上述条件下，(4.1) 有一个常数运动 $x=c_0$，并且常数 c_0 由

$$g(c_0)=K \tag{4.2}$$

给出。

实事上，由条件2)知必存在包含原点在内的有界集 Ω_1，使得在 Ω_1 的补集 Ω_1^c 上不等式 $|g'(x)|\leqslant c$和$\int_0^x g(\xi)d\xi>0$ 均成立．在$\Omega_1^c\times\mathbb{R}$上取

$$V=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(\xi)d\xi+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^0\int_{t+s}^t y^2(u)duds \tag{4.3}$$

为(4.1)的等价系统

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=y\\&\dot{y}=-ay-g(x)+\int_{-\tau}^0 g'_x(x(t+s))y(t+s)ds+p(t)\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

的Ляпунов泛函，则在$\Omega_1^c\times\mathbb{R}$上有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{(4.4)}&=y\dot{y}+g(x)\dot{x}+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^0[y^2(t)-y^2(t+s)]ds\\&=y\Big[-ay-g(x)+\int_{-\tau}^0 g'_x(x(t+s))y(t+s)ds\\&\quad+p(t)\Big]+g(x)y+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^0[y^2(t)-y^2(t+s)]ds\\&=-ay^2+y\int_{-\tau}^0 g'_x(x(t+s))y(t+s)ds\\&\quad+yp(t)+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^0[y^2(t)-y^2(t+s)]ds\end{aligned}$$

$$\leqslant -ay^2+\int_{-\tau}^{0}|y(t)||g'_x(x(t+s))||y(t+s)|ds$$

$$+yp(t)+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]ds$$

$$\leqslant -ay^2+\int_{-\tau}^{0}|y(t)|c|y(t+s)|ds$$

$$+yp(t)+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]ds$$

$$\leqslant -ay^2+\int_{-\tau}^{0}\frac{c}{2}[y^2(t)+y^2(t+s)]ds$$

$$+yp(t)+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]ds$$

$$=-ay^2+\tau cy^2+yp(t)=-\left[a-\tau c-\frac{p(t)}{y}\right]y^2$$

$$\leqslant -\left[a-\tau c-\frac{|p(t)|}{|y|}\right]y^2$$

由于不等式 $0<a-\tau c$ 成立，并且 $p(t)$ 是连续的周期函数，因此，必存在包含原点在内的有界集 $\Omega_2\supseteq\Omega_1$ 和正常数 μ，使得在 $\Omega_2^c\times \mathbb{R}$ 上有不等式

$$\mu\leqslant a-\tau c-\frac{|p(t)|}{|y|}$$

成立. 于是，在 $\Omega_2^c\times \mathbb{R}$ 上有

$$\dot V_{(4.4)}\leqslant -\mu y^2,\ \mu=\text{const}>0.$$

所以，(4.4) 的解的 y 坐标对某个常数 β 是最终有界的.

如果 $|y|\leqslant\beta$，$V_1=V+y$，由于 $p(t)$ 是连续的周期函数，故必存在常数 $K_1>0$，使得在 $\Omega_2^c\times \mathbb{R}$ 上有

$$\dot V_{1\,(4.4)}=\dot V_{(4.4)}+\dot y$$

$$=-ay^2+y\int_{-\tau}^{0}g'_x(x(t+s))y(t+s)ds$$

$$+yp(t)+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]ds+\Big[-ay-g(x)$$

$$+\int_{-\tau}^{0}g'_x(x(t+s))y(t+s)ds+p(t)\Big]\leqslant -g(x)+K_1$$

由于当 $x\to\infty$ 时，$g(x)\to\infty$，所以，我们能够选到常数 $B_1>0$，使得当 $x\geqslant B_1$ 时有 $\dot V_{1\,(4.4)}\leqslant -0.5$，因此，存在常数 $\alpha_1>0$，使得 (4.4) 的解的 x 坐标在 $|y|\leqslant\beta$ 内有 $x\leqslant\alpha_1$.

同理，如果 $|y|\leqslant\beta$，$V_2=V-y$，则必存在常数 $K_2>0$，使得在 $\Omega_2^c\times \mathbb{R}$ 上有

$$\dot V_{2\,(4.4)}=\dot V_{(4.4)}-\dot y$$

$$=-ay^2+y\int_{-\tau}^{0}g'_x(x(t+s))y(t+s)ds+yp(t)$$

$$+\frac{c}{2}\int_{-\tau}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]ds-\Big[-a^2-g(x)+\int_{-\tau}^{0}g'_x(x(t+s))y(t+s)ds$$

$$+p(t)\Big]\leqslant g(x)+K_2$$

由于当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，所以，我们可以选到常数 $B_2>0$，使得当 $x\leqslant -B_2$ 时有 $\dot{V}_{2(4.4)}\leqslant -0.5$，因此，存在常数 $\alpha_2>0$，使得(4.4)的解的 x 坐标在 $|y|\leqslant\beta$ 内有 $x\geqslant-\alpha_2$.

综上所述知(4.4)的运动最终有界. 所以，(4.1)有一个ω-周期运动，当$p(t)=K$时，(4.1)有一个常数运动 $x=c_0$，由(4.1)知常数 c_0 此时由(4.2)式给出.

参考文献

[1] Yoshizawa, T. (吉泽太郎), Stability theory by Liapunov's second method, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, (1966).

[2] Burton, T. A., *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York, (1983), 286—287.

[3] 李晓颖, 关于Massera及Yoshizawa周期解定理的推广, 东北师大学报自然科学版, 1(1987), 11—16.

[4] Hale, J. K. and O. Lopes, Fixed point theorems and dissipative processes, *J. Differential Equations*, 13(1973), 391—402.

[5] 赵杰民, 关于非自治离散周期系统的周期解问题, 数学研究与评论, (12) 3 (1992), 427—432.

[6] Burton, T. A., *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Academic Press (1985), 246—251.

The Existence of Periodic Solutions for a Class of Functional Differential Equations and Their Application

Zhao Jie-min Huang Ke-lei Lu Qi-shao

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

In this paper, the retarded functional differential equation

$$\ddot{x}(t)=F(t,x_t),\ x_t=x(t+\theta),\ \theta\in[-h,0],\ h\geqslant 0$$

are considered. We obtain four existence theorems of periodc solutions of it. The application of these theorems are convenient and efficient, and the theorem of this paPer is better than the well-known Yoshizawa's periodic solution theorem. A feedback system is discussed in detail and a sufficient condition of guaranteeing the existence of an ω-Periodic motion of the system is got by applying these theorems in this paper.

Key words retarded functional differential equation, periodic solution, boundedness of solutions