应用数学和力学，第14卷第12期（1993年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

H-空间的覆盖性质及其应用

丁协平* 陈国强**

（成都 四川师范大学）（加拿大 达尔豪斯大学）

（1992年5月25日收到）

摘 要

我们得到了 H-空间闭（开）覆盖性质的几个定理，改进和推广了 Sperner，Klee，Alexandroff-Pasynkoff，Berge，Ghouila-Houri，Danzer-Grünbaum-Klee，Ky Fan，Shih-Tan，Horvath 和 Lassonde等人的相应结果。作为应用，我们对$l.c.$-空间内的下半连续集值映象证明了一个几乎不动点定理并且推广吉洪诺夫不动点定理到$l.c.$-空间。这些定理改进了Ky Fan和Horvath的相应结果。

关键词 覆盖性性 H-空间 $l.c.$-空间 几乎不动点

一、引 言

在有限维空间情形，Sperner[18]和 Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz[15] 在单形覆盖性质上的古典结果已经在不同方向上被推广且有广泛的应用。在一般拓扑矢量空间内凸集的覆盖性质上的有关结果已由Berge[3]，Klee[14]，Chouila-Houri[10]，Ky Fan[9] 和 Lassonde[16]给出。

在本文中，通过使用我们在[6]中的结果和 Tarafdar[19]引入的 H-凸包概念，我们研究了H-空间的闭（开）覆盖性质，得到了H-空间的闭（开）覆盖性质的几个结果，推广了Sperner[18]，Klee[14]，Alexandroff-Pasynkoff[1]，Berge[3]，Ghouila-Houri[10]，Danzer-Grünbaum-Klee[5]，Ky Fan[7,8,9]，Shih-Tan[17]，Horvath[12]和Lassonde[16]等人的相应结果。作为应用，我们在由Horvath[12]引入的$l.c.$-空间内对下半连续集值映象证明了一个几乎不动点定理并且推广了Tychonoff[20]的不动点定理到$l.c.$-空间内的非紧非凸集。这些结果改进和推广了Ky Fan[9]和Horvath[12]的相应结果。

二、术语和记号

设 X 和 Y 是非空集，2^Y 表Y的一切非空子集的族，$\mathscr{F}(X)$表X的一切非空有限子集的族，Δ^N表具有顶点e_0，e_1，…，e_n的标准n维单形，其中$N=\{0，1，…，n\}$。对N的每一

* 国家自然科学基金资助项目
** 加拿大NSERC资助项目

非空子集J，定义$\Delta^J=\mathrm{co}\{e_j:j\in J\}$，集$\{e_j:j\in J\}$的凸包．我们将用$\mathbf{R}$表一切实数的集．

在Horvath[11]的工作启发下，Bardaro-Ceppitelli[2]引入了下列概念．

称（X，$\{F_A\}$）为H-空间（Horvath[12]称为c-空间）如果X是拓扑空间和$\{F_A\}$是由$A\in\mathscr{F}(X)$标号的X的一给定可缩子集族使得每当$A\subset A'$时，$F_A\subset F_{A'}$．令（X，$\{F_A\}$）是一H-空间．称X的非空子集D是H-凸的如果对每一$A\in\mathscr{F}(D)$，$F_A\subset D$．

下面概念归于Tarafdar[19]．

设D是H-空间（X，$\{F_A\}$）的非空子集．定义D的H-凸包为集

$H\text{-co}(D)=\cap\{B\subset X:B$是$H$-凸集和$D\subset B\}$．

显然$H\text{-co}(D)$是X的包含D的最小H-凸子集（见[19]）．

局部凸拓扑矢量空间概念由Horvath[12]作如下推广：H-空间（X，$\{F_A\}$）被说成是一$l.c.$-空间如果X是一致拓扑空间且存在一致结构的基$(V_i)_{i\in I}$使得对每一$i\in I$，每当E是H-凸集时，集$\{x\in X:E\cap V_i(x)\neq\phi\}$是$H$-凸的，其中$V_i(x)=\{y\in X:(x,y)\in V_i\}$．

三、H-空间的覆盖性质

在本节中我们将首先推广归于Ky Fan[7,8]的单形闭覆盖性质的定理和归于Idzik-Tan[13]和Shih-Tan[17]的单形开覆盖性质的定理到H-空间．其次归于Berge[3]，Ghouila-Houri[10]，Klee[14]，Ky Fan[9]和Lassonde[16]的关于一般拓扑矢量空间内凸集的覆盖性质定理也被推广到H-空间．

下面结果是Ding-Tan[6]的引理1，它被包含在Horvath[11]的定理1的证明中（也见Horvath[12]的定理1）．

引理1 设X是拓扑空间，对N的每一非空子集J，令F_J是X的一非空可缩子集．如果$J\subset J'$蕴含$F_J\subset F_{J'}$，则存在连续映象$f:\Delta^N\to X$使得对N的每一非空子集J，$f(\Delta^J)\subset F_J$．

下面结果是Ding-Tan[6]的引理2和引理3的推论．

引理2 设（X，$\{F_A\}$）是H-空间和$\{A_i\}_{i\in N}$是X的闭（开）子集族．假设存在$\bigcup\limits_{i\in N}A_i$的子集$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$使得对$N$的任何非空子集$J$，

$$H\text{-co}(\{x_j:j\in J\})\subset\bigcup_{j\in J}A_j$$

则$\bigcap\limits_{i\in N}A_i\neq\phi$．

证明 对N的每一非空子集J，令$F_J=F_{\{x_i\}_{i\in J}}$，则F_J是X的非空可缩子集，且每当$J\subset J'$时，$F_J\subset F_{J'}$．由H-凸包的定义，对N的每一非空子集J，

$$F_J=F_{\{x_i:i\in J\}}\subset H\text{-co}(\{x_i\}_{i\in J})\subset\bigcup_{i\in J}A_i$$

从Ding-Tan[6]的引理2（引理3）推得$\bigcap\limits_{i\in N}A_i\neq\phi$． □

下面结果是Ding-Tan[6]的定理1和定理2的直接推论．

引理3 设$(X,\{F_A\})$是H-空间，$\{A_i\}_{i\in N}$是X的闭（开）覆盖．则对X的任意$n+1$个点$x_0,x_1,\cdots,x_n$，存在N的非空子集J使得

$$F_{\{x_j:j\in J\}}\cap\Big(\bigcap_{i\in J}A_j\Big)\neq\phi$$

定理1 设（X，$\{F_A\}$）是H-空间，$\{A_i\}_{i\in N}$是X的闭（开）覆盖使得对每一$i\in N$，

$\bigcap_{j\neq i} A_j\neq\phi$，则存在$N$的非空子集$I$，$I\neq N$，使得

$$H\text{-co}(\bigcap\{A_i:i\in N\backslash I\})\cap(\bigcap_{i\in I}A_i)\neq\phi$$

证明 首先我们观察到如果$\bigcap_{i\in N} A_i\neq\phi$，则对满足$I\neq N$的$N$的任何非空子集$I$，结论成立。因此我们可以假设$\bigcap_{i\in N} A_i\neq\phi$。由假设对每一$i\in N$，$\bigcap_{j\neq i} A_j\neq\phi$，故我们能选取$x_i\in\bigcap_{j\neq i} A_j$。由引理3，存在$N$的非空子集$I$使得

$$F_{\{x_i:i\in I\}}\cap(\bigcap_{i\in I}A_i)\neq\phi \tag{*}$$

因$\bigcap_{i\in N} A_i=\phi$，我们必有$I\neq N$。注意到$\{x_i:i\in I\}\subset\bigcap\{A_i:i\in N\backslash I\}$，因此

$$F_{\{x_i:i\in I\}}\subset H\text{-co}(\{x_i:i\in I\})\subset H\text{-co}(\bigcap\{A_i:i\in N\backslash I\})$$

且由(*)式得

$$H\text{-co}(\bigcap\{A_i:i\in N\backslash I\})\cap(\bigcap_{i\in I}A_i)\neq\phi$$ □

定理1改进和推广了Lassonde[16, p.575]的结果，Klee[4]的（2.1）（此结果是Berge[3]的交定理）和Horvath[12]的系3到H-空间。

定理2 设$(X,\{F_A\})$是H-空间和$\{A_i\}_{i\in N}$是X的闭（开）覆盖。假设存在X的$n+1$个点x_0，x_1，…，x_n使得下列条件之一成立：

(a) 对每一$i\in N$，$H\text{-co}(\{x_j:j\in N\backslash\{i\}\})\cap A_i=\phi$；

(b) 对每一$i\in N$，$H\text{-co}(\{x_j:j\in N\backslash\{i\}\})\subset A_i$。

则$\bigcap_{i\in N} A_i\neq\phi$。

证明

情形1 假设条件(a)成立，则对N的任何非空子集J，我们有

$$H\text{-co}(\{x_i:i\in J\})\subset X=(\bigcup_{i\in N\backslash J}A_i)\cup(\bigcup_{i\in J}A_i)$$

注意到对每一$i\in N$，$\{x_j:j\in N\backslash\{i\}\}\subset H\text{-co}(\{x_j:j\in N\backslash\{i\}\})$且因此由假设

$$H\text{-co}(\{x_i:i\in J\})\cap A_i=\phi,\qquad 对一切i\in N\backslash J$$

由此推得

$$H\text{-co}(\{x_i:i\in J\})\subset\bigcup_{i\in J}A_i$$

由引理2，$\bigcap_{i\in N}A_i\neq\phi$

情形2 假设条件(b)成立。如果$\bigcap_{i\in N} A_i=\phi$，则$\{X\backslash A_i\}_{i\in N}$是$X$的开（闭）覆盖。由(b)，对每一$i\in N$，

$$H\text{-co}(\{x_j:j\in N\backslash\{i\}\})\cap(X\backslash A_i)=\phi$$

从情形1推得$\phi\neq\bigcap_{i\in N}(X\backslash A_i)=X\backslash(\bigcup_{i\in N}A_i)$，这与假设$\{A_i\}_{i\in N}$是$X$的闭（开）覆盖相矛盾，因此我们必有$\bigcap_{i\in N}A_i\neq\phi$。 □

当假设条件(a)成立时，定理2改进和推广了Sperner[18]的覆盖定理（[13]的定理3.1）。当假设条件(b)成立时，定理2推广了Alexandroff-Pasynkoff[1]和Ky Fan[7]给出的Sperner定理的改述([13]的定理3.2)。

定理3 设$(X,\{F_A\})$是H-空间，$\{A_i\}_{i\in N}$和$\{B_i\}_{i\in N}$是X的闭（开）子集的族使得

(1) $X=\bigcup_{i\in N}(A_i\cup B_i)$；

（2） 对每一$i\in N$，$A_i\cap B_i=\phi$；

（3） $\bigcap\limits_{i\in N}A_i=\phi$；

（4） 存在X的一子集$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$使得下列条件之一成立：

(a) 对每一$i\in N$，$H\text{-co}(\{x_j: j\in N\backslash\{i\}\})\subset A_i$；

(b) 对每一非空集$J\subset N$，$J\neq N$，

$$H\text{-co}(\{x_j: j\in J\})\subset\bigcup_{j\in J}A_j$$

则对N的每一非空子集I，

$$(\bigcap_{i\in N\backslash I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}B_i)\neq\phi$$

证明 不失一般性，我们可以假设$I=\{0,1,\cdots,m\}$，其中$0\leqslant m\leqslant n$. 对每一$i\in N$，定义

$$C_i=\begin{cases}A_0\cup\left(\bigcup\limits_{j=m}^{n}B_j\right), & \text{如果}i=0\\ A_i\cup B_{i-1}, & \text{如果}1\leqslant i\leqslant m\\ A_i, & \text{如果}m<i\leqslant n\end{cases}$$

则由(1)，$\{C_i\}_{i\in N}$是X的闭（开）覆盖.

情形1 假设条件(4)(a)成立. 则对每一$i\in N$，$H\text{-co}(\{x_j: j\in N\backslash\{i\}\})\subset A_i\subset C_i$，于是由定理2，$\bigcap\limits_{i\in N}C_i\neq\phi$.

情形2 假设条件(4)(b)成立. 由引理2，$\bigcap\limits_{i\in N}C_i=\phi$.

所以在两种情形下，我们都有$\bigcap\limits_{i\in N}C_i\neq\phi$，即有

$$\left(A_0\cup\left(\bigcup_{j=m}^{n}B_j\right)\right)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}(A_i\cup B_{i-1})\right)\cap\left(\bigcup_{i=m+1}^{n}A_i\right)\neq\phi \qquad (**)$$

注意到由(2)和(3)，我们有

$$A_0\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}(A_i\cup B_{i-1})\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=0}^{n}A_i=\phi$$

$$B_m\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}(A_i\cup B_{i-1})\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=0}^{m}B_i=\bigcap_{i\in I}B_i$$

$$\left(\bigcup_{i=m+1}^{n}B_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}(A_i\cup B_{i-1})\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n}A_i\right)=\phi$$

从(**)式推得

$$(\bigcap_{i\in N\backslash I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}B_i)\neq\phi \qquad \Box$$

当假设条件(4)(a)成立时，定理3推广了Ky Fan[8]的定理4([13]的定理3.6). 当假设条件(4)(b)成立时，定理3推广了Ky Fan[8]的定理3([13]的定理3.7).

定理4 设$(X, \{F_A\})$是H-空间，B，A_i，$i\in N$是X的闭（开）子集使得

（1） $X=B\cup(\bigcup\limits_{i\in N}A_i)$；

（2） $\bigcap\limits_{i\in N}A_i=\phi$；

（3） 存在X的子集$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$使得下列条件之一成立：

(a) 对每一$i\in N$，$H\text{-co}(\{x_j: j\in N\backslash\{i\}\})\subset A_i$；

(b) 对N的每一非空子集J，$J\neq N$，

$$H\text{-co}(\{x_j : j\in J\})\subset\bigcup_{j\in J}A_j.$$

则对N的每一非空子集I,

$$B\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}A_i')\neq\phi,$$

其中$A_i'=X\setminus A_i$，对每一$i\in N$。

证明 因为$(X,\{F_A\})$是H-空间，对N的每一非空子集J，我们可以定义$F_J=F_{\{x_j:j\in J\}}$．由引理1，存在连续映象$f:\Delta^N\to X$使得对N的每一非空子集J,

$$f(\Delta^J)\subset F_J=F_{\{x_j:j\in J\}} \tag{***}$$

令$E=f^{-1}(B)$和$D_i=f^{-1}(A_i)$，对每一$i\in N$；则E, D_i $i\in N$，是Δ^N的闭（开）子集使得

(i) $E\cup(\bigcup_{i\in N}D_i)=\Delta^N$ （由(1)），

(ii) $\bigcap_{i\in N}D_i=\phi$, （由(2)）．

情形1 假设(3)(a)成立．由H-凸包定义，对每一$i\in N$,

$$F_{N\setminus\{i\}}=F_{\{x_j:j\in N\setminus\{i\}\}}\subset H\text{-co}(\{x_j:j\in N\setminus\{i\}\})\subset A_i$$

从(***)式推得对每一$i\in N$,

$$\Delta^{N\setminus\{i\}}\subset f^{-1}(A_i)=D_i$$

因此由Ky Fan[7]的定理1([13]的定理3.4)，我们推得对N的每一非空子集I,

$$E\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}D_i)\cap(\bigcap_{i\in I}D_i')\neq\phi$$

其中$D_i'=\Delta^N\setminus D_i$，对每一$i\in N$．因此

$$B\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}A_i')\neq\phi$$

情形2 假设条件(3)(b)成立．对N的每一非空子集$J=\{i_0, i_1, \cdots, i_k\}$, $J\neq N$,

$$F_J=F_{\{x_{i_0},\cdots,x_{i_k}\}}\subset H\text{-co}(\{x_{i_0},\cdots,x_{i_k}\})\subset\bigcup_{j=0}^{k}A_{i_j}=\bigcup_{i\in J}A_i$$

从(3)推得

$$\Delta^J\subset f^{-1}(F_J)\subset\bigcup_{i\in J}f^{-1}(A_i)=\bigcup_{i\in J}D_i$$

由应用Ky Fan[8]的定理5([13]的定理3.5)，对N的每一非空子集I,

$$E\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}D_i)\cap(\bigcap_{i\in I}D_i')\neq\phi$$

因此我们必有

$$B\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}A_i')\neq\phi \qquad \square$$

定理4将[7]的定理1和[8]的定理5（[13]的定理3.4和3.5）从单形推广到H-空间．定理4也将Ky Fan[9]的定理5从拓扑矢量空间的凸集推广到H-空间．

定理5 设$(X,\{F_A\})$是H-空间，B, A_i, $i\in N$是X的闭（开）子集使得

(1) $X=B\cup(\bigcup_{i\in N}A_i)$;

(2) $\bigcap_{i\in N}A_i=\phi$;

(3) 存在X的非空子集$C_0,\cdots,C_n$使得对每一$i\in N$, $H\text{-co}(C_i)\subset A_i$和$\bigcap_{j\in N\setminus\{i\}}C_j\neq\phi$.

则对N的每一非空子集I,

$$B\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}A_i')\neq\phi$$

其中$A_i'=X\setminus A_i$，对每一$i\in N$.

证明　由(3)，对每一$i\in N$，我们可选取$x_i\in\bigcap_{j\in N\setminus\{i\}}C_j$，则$\{x_0,\cdots,x_n\}\subset X$满足：对每一$i\in N$，$\{x_j:j\in N\setminus\{i\}\}\subset C_i$且因此对每一$i\in N$，

$$H\text{-co}(\{x_j:j\in N\setminus\{i\}\})\subset H\text{-co}(C_i)\subset A_i$$

结论由定理4推得．　□

系1　设$(X,\{F_A\})$是H-空间，A_i，$i\in N$是X的闭（开）H-凸子集，使得$\bigcap_{i\in N}A_i=\phi$和对每一$i\in N$，$\bigcap_{j\in N\setminus\{i\}}A_i\neq\phi$．如果$B$是$X$的闭（开）子集使得$Y=B\cup(\bigcup_{i\in N}A_i)$是$H$-凸的，则对$N$的每一非空子集$I$，

$$B\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}A_i')\neq\phi$$

其中$A_i'=X\setminus A_i$，对每一$i\in N$．

定理5推广了Ky Fan[9]的定理4到H-空间．这里我们强调我们的证明方法完全不同于Ky Fan的证明方法．系1是定理5的特殊情形，系1推广了Ky Fan[9]的系3也顺次使Ghouila-Houri[10]的定理更加明晰．对Chouila-Houri的定理的某些有趣的推论见[4]，[5，pp．123—124]和[10]．

定理6　设$(X,\{F_A\})$是H-空间，B，A_i，$i\in N$，是X的闭（开）子集使得

（1）　$X=B\cup(\bigcup_{i\in N}A_i)$；

（2）　$\bigcap_{i\in N}A_i=\phi$；

（3）　存在X的非空H-凸子集$C_0,\cdots,C_n$使得对每一$i\in N$，$C_i\cap(B\cup A_i)\neq\phi$和$\bigcap_{j\in N\setminus\{i\}}C_j\neq\phi$．则对$N$的每一非空子集$I$，

$$B\cap(\bigcap_{i\in N\setminus I}A_i)\cap(\bigcap_{i\in I}A_i')\neq\phi$$

其中$A_i'=X\setminus A_i$，对每一$i\in N$．

证明　由(3)，对每一$i\in N$，我们可选取$x_i\in\bigcap_{j\in N\setminus\{i\}}C_j$，则$\{x_0,\cdots,x_n\}\subset X$且对$N$的每一非空子集$J$，$J\neq N$，有$\{x_i\}_{i\in J}\subset\bigcap_{i\in N\setminus J}C_i$．因为每一$C_i$是$H$-凸的，我们有$H\text{-co}(\{x_i\}_{i\in J})\subset\bigcap_{i\in N\setminus J}C_i$．从(1)和(3)推得

$$\bigcap_{i\in N\setminus J}C_i\subset\bigcap_{i\in N\setminus J}(X\setminus(B\cup A_i))=X\setminus(\bigcup_{i\in N\setminus J}(B\cup A_i))\subset\bigcup_{i\in J}A_i$$

因此

$$H\text{-co}(\{x_i\}_{i\in J})\subset\bigcup_{i\in J}A_i$$

从定理4立即得到结论．　□

定理6推广了Ky Fan[9]的定理6到H-空间．

四、应　　用

在本节中，作为定理4的应用，我们得到了Ky Fan[7]中系2的推广．作为引理2的应用，我们对$l.c.$-空间内的下半连续集值映象证明了一个几乎不动点定理和推广了Tychonff[20]的不动点定理到非紧非凸集．这些定理改进了Ky Fan[9]和Horvath[12]中的相应结果．

定理7 设f_0，f_1，…，f_n是H-空间$(X,\{F_A\})$上的连续实值函数．假设存在$\{x_0,\cdots,x_n\}\subset X$使得对每一$i\in N$和对一切$x\in H\text{-co}(\{x_j: j\in N\backslash\{i\}\})$，$f_i(x)\leqslant 0$．则下列结论之一成立：

(i) 存在$\hat{x}\in X$使得对一切$i\in N$，$f_i(\hat{x})\leqslant 0$；

(ii) 对N的每一非空子集I，存在$x_I\in X$使得对一切$i\in I$，$f_i(x_I)>0$和对一切$i\in N\backslash I$，$f_i(x_I)\leqslant 0$．

证明 对每一$i\in N$，定义$A_i=\{x\in X: f_i(x)\leqslant 0\}$．令$B=\{x\in X: f_i(x)\geqslant 0$ 对一切 $i\in N$成立$\}$．则由定理4立即得到结论． □

定理7推广了Ky Fan[7]的系2到H-空间．

定理8 设X是$l.c.$-空间$(Y,\{F_A\})$的非空H-凸子集，$f: X\to 2^Y$是下半连续映象使得对每一$x\in X$，$f(x)$是Y的非空H-凸子集．假设存在X的准紧子集K使得对每一$x\in X$，$f(x)\cap K\neq\phi$．则对每一环境$V\in(V_i)_{i\in I}$，存在$y_V\in X$使得

$$f(y_V)\cap V(y_V)\neq\phi$$

证明 对任意固定的$V\in(V_i)_{i\in I}$，不失一般性我们可以假设V是开的．定义映象$A: X\to 2^X$如下：

$$A(x)=\{y\in X: f(y)\cap V(x)\neq\phi\}$$

对每一$x\in X$．因$V(x)$是开集和f是下半连续的，故$A(x)$是X的闭子集．对X的准紧子集K，我们能找到X的有限子集$\{x_0,\cdots,x_n\}$使得

$$K\subset\bigcup_{i=0}^{n}V(x_i)$$

由此推得对每一$x\in X$，$f(x)\cap\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n}V(x_i)\right)\neq\phi$且因此$\bigcap\limits_{i=0}^{n}A(x_i)=\phi$．

注意到$(X,\{F_A\})$也是H-空间．由引理2，存在$\{x_0,\cdots,x_n\}$的非空子集$\{x_{i_0},\cdots,x_{i_k}\}$，$0\leqslant k\leqslant n$，和$y_V\in H\text{-co}(\{x_{i_0},\cdots,x_{i_k}\})$使得$y_V\notin\bigcup\limits_{j=0}^{k}A(x_{i_j})$，于是

$$f(y_V)\cap V(x_{i_j})\neq\phi,\qquad \text{对每一}j=0,\cdots,k;$$

即是

$$x_{i_j}\in\{y\in X: f(y_V)\cap V(y)\neq\phi\},\qquad \text{对每一}j=0,\cdots,k.$$

因为$f(y_V)$是H-凸的，且$(Y,\{F_A\})$是$l.c.$-空间，$\{y\in X: f(y_V)\cap V(y)\neq\phi\}$是$H$-凸的，由此推得

$$y_V\in H\text{-co}(\{x_{i_0},\cdots,x_{i_k}\})\subset\{y\in X: f(y_V)\cap V(y)\neq\phi\}$$

且因此

$$f(y_V)\cap V(y_V)\neq\phi$$

□

定理8推广了Ky Fan[9]的定理7到$l.c.$-空间．

系2 设$(X,\{F_A\})$是Hausdorff $l.c.$-空间使得对每一$x\in X$，$F_{\{x\}}=\{x\}$和$f: X\to X$是连续映象使得$f(X)$是准紧的．则f在X内有不动点．

证明 注意到H-凸包的定义，由假设，对每一$x\in X$，$\{x\}=F_{\{x\}}=H\text{-co}(\{x\})$．由应用且有单值映象的定理8，对每一环境$V\in(V_i)_{i\in I}$，存在$y_V\in X$使得$(y_V, f(y_V))\in V$．从$\overline{f(X)}$的紧性推得$f$必在$X$内有一不动点． □

系2推广了Horvath[12]的系4.4，X不必是完备距离空间，系2也推广了Ky Fan[9]的定理6和Tychonoff不动点定理[20]到$l.c.$-空间的非紧非凸集．

参 考 文 献

[1] Alexandroff, P. and B. Pasynkoff, Elementary proof of the essentiality of the identical mapping of a simplex. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, 12(5),(77) (1957), 175—179. (in Russian)

[2] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Some further generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax ineguulities, *J. Math. Anal. Appl.*, 132 (1988), 484—490.

[3] Berge, C., *Espace Topologiques, Fonctions Multivogues*, Dunod, Paris (1959).

[4] Berge, C., Sur une propriete combinatoire des ensembles convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 (1959), 2698—2699.

[5] Danzer, L., B. Grünbaum and V. Klee, Helly's theorem and its relatives, convexity, *Proc. Sympos. Pure Math.* 7, Edited by V. Klee, Amer. Math. Soc. Providence, RI (1963), 101—177.

[6] Ding, X. P. and K. K. Tan, Matching theorems, fixed point theorems and minimax inequalities without convexity, *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)*, 49 (1990), 111—128.

[7] Fan, K., A covering property of simplexes, *Math. Scand.*, 22 (1968), 17—20.

[8] Fan, K., A combinatorial property of pseudomanifolds and covering properties of simplexes, *J. Math. Anal. Appl.*, 31 (1970), 68—80.

[9] Fan, K., Covering properties of convex sets and fixed point theorems in topological vector spaces, *Sympos. on Infinite Dimensional Topology*, Ed. by R. D. Anderson, Princeton (1972), 79—92.

[10] Ghouila-Houri, A., Sur letude combinatoire des familles de convexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 252 (1961), 494—496.

[11] Horvath, C., Some results on multivalued mappings and inequalities without conexity, *Nonlinear and Convex Analysis*, Ed. by B. L. Lin and S. Simons, Marcel Dekker (1987), 99—106.

[12] Horvath, C., Contractibility and generalized convexity, *J. Math. Anal. Appl.*, 156 (1991), 341—357.

[13] Idzik, A. and K. K. Tan, Covering properties of simplexes, *J. Math. Anal. Appl.* (to appear)

[14] Klee, V.L., On certain intersection properties of convex sets, *Canada J. Math.*, 3 (1951), 272—275.

[15] Knaster, B., C. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, Ein beweis des fixpunktsatzes für *n*-dimensionale simplexe, *Fund. Math.*, 14 (1929), 132—137.

[16] Lassonde, M., Sur le principle KKM, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.* 1, 310 (1990), 573—576.

[17] Shih, M. H. and K. K. Tan, Covering theorems of simplexes and system of linear inequalities, *Linear and Multilinear Algebra*, 19 (1986), 309—320.

[18] Sperner, E., Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6 (1928), 265—272.

[19] Tarafdar, E., A fixed point theorem in *H*-space and related results, *Bull.*

Austral. Math. Soc., 42 (1990), 133—140.
[20] Tychonoff, A., Ein Fixpunktsatz, *Math. Annalen*, 111 (1935), 767—776.

Covering Properties of H-Spaces and Applications

Ding Xie-ping

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu)

Kok-Keong Tan

(Department of Mathematics, Statistics and Computing Science, Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, Canada)

Abstract

Several theorems on closed (esp. open) covering properties of H-spaces are obtained which improve and generalize the corresponding results of Sperner, Klee, Alexandroff-Pasynkoff, Berge, Ghouila-Houri, Danzer-Grünbaum-Klee, Ky Fan, Shih-Tan, Horvath and Lassonde. As application an almost fixed point theorem for lower semi-continuous map in $l.c.$-spaces and a generalization of Tychonoff's fixed point theorem are proved in $l.c.$-spaces which improve those results of Ky Fan and Horvath.

Key words covering property, H-space, H-convex, H-convex hull, almost fixed point, lower semi-continuous, $l.c.$-space, simplex, uniform structure, topological vector space, locally convex space, contractible