应用数学和力学，第14卷第12期（1993年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非完整系统分析动力学中的几个重要问题

梁立孚　　石志飞

（哈尔滨船舶工程学院）（哈尔滨工业大学）

（叶开沅推荐；1992年9月12日收到）

摘　要

本文从变分原理和分析约束的力学性质两个方面入手，首次用演绎法推导出Chetaev条件，并且进行了验证，指出认为对非完整系统分析动力学d-δ交换性不成立的观点实际上是一种误解。在此基础上，首次提出非完整系统分析动力学中的两个经典关系。最后，进一步讨论了积分变分原理应用于非完整系统的问题。

关键词　分析动力学　变分原理　非完整系统　演绎法　Chetaev条件

一、引　　言

专著[1]指出，由于历史较短和问题复杂，至今，在非完整系统分析动力学中，仍存在一些有待进一步澄清和发展的问题。例如：关于Chetaev条件的问题、关于d-δ交换性问题、关于Hamilton一类积分变分原理能否应用于和如何应用于非完整系统的问题、……。对于这样一些重大问题，我们曾在文[12]中做了初步探讨，在文[13]又做了进一步的探讨，本文将更深入地讨论这些问题。

二、关于Chetaev条件

本世纪30年代，Chetaev发现，对于带有非线性约束的力学系统，某些学者的研究导致Gauss原理和D'Alembert原理不一致。为了解决这一矛盾，Chetaev引入一个假设，后人称之为Chetaev条件[2][3]。

在Chetaev条件问世至今的半个世纪中，不少学者从不同的角度对Chetaev条件进行了解释。有的学者认为Chetaev条件是将非线性约束线性化[2]；有的学者认为Chetaev条件是对虚位移施加的额外的限制[1]；有的学者认为Chetaev条件是将Gauss微变空间定义为一阶非线性虚位移空间[4]；还有的学者认为，Chetaev条件定义了非完整系统的一个空间瞬时固定的位形[5]；……。上述事实反映了对Chetaev条件的不断深化的认识。

本文以变分原理为基础，以分析非完整约束的力学性质为手段，通过演绎的方法，推导

出Chetaev条件，为更加深入地研究Chetaev条件，奠定了基础。

考虑一个动力学系统，该系统由Lagrange函数$L(q,\ \dot{q},\ t)$和理想非完整约束的独立方程

$$f_\beta(q,\ \dot{q},\ t)=0 \tag{2.1}$$

来描述，一般说来f_β对$\dot{q}$不是线性的。这里q_s和$\dot{q}_s=dq_s/dt$分别为Lagrange坐标和广义速度，t是时间，$s=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；$\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ g$；$g<n$。

其边界条件为

$$q_s=\bar{q}_{s0}\quad (t=t_0),\quad q_s=\bar{q}_{s1}\quad (t=t_1) \tag{2.2}$$

对于如上的非完整系统，Hamilton原理的泛函为

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1} L(q,\ \dot{q},\ t)\,dt \tag{2.3}$$

其约束条件为(2.1)、(2.2)式。

将Π变分，并令$\delta\Pi=0$，则得

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)dt=0 \tag{2.4}$$

其约束条件变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)=0 \tag{2.5}$$

$$\delta q_s=0\qquad (t=t_0\text{或}t=t_1) \tag{2.6}$$

引入Lagrange乘子μ_β，将约束条件（2.5）纳入泛函（2.4）中，经分部积分，并考虑到（2.6）式，则有

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right]\delta q_s\,dt=0 \tag{2.7}$$

由于引入Lagrange乘子，使得δq_s相互独立，故由（2.7）式可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{\partial t}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0 \tag{2.8}$$

可见，方程（2.8）和其约束条件(2.1)、(2.2)一起，构成封闭的微分方程组。文献[6]、[7]称（2.8）式为测地轨道方程。

在测地轨道方程中，表示约束力的诸项记为

$$R_s=-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{2.9}$$

将n维矢量$\boldsymbol{R}$（约束力）和n维矢量$\delta\boldsymbol{q}$（虚位移）点乘

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}&=\sum_{s=1}^{n}R_s\delta q_s\\&=\sum_{s=1}^{n}\left[-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right]\delta q_s\end{aligned} \tag{2.10}$$

由（2.5）式可知

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s \tag{2.11}$$

将（2.11）代入(2.10)，则有

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}=\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\left[\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s+\mu_\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s+\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right]$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right)$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{d}{dt}\left(\mu_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right) \tag{2.12}$$

一般说来，(2.12)式不为零，即

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}=\sum_{s=1}^{n}R_s\delta q_s\neq 0 \tag{2.13}$$

（2.13）式表明，约束力$\boldsymbol{R}$在虚位移$\delta\boldsymbol{q}$上所做虚功不为零，这类约束称为非理想约束．为了使这类非理想约束理想化，以便与已知条件中（2.1）式的理想非完整约束相吻合，必使

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0 \tag{2.14}$$

（2.14）式不是别的，正是Chetaev条件．

以上，用变分原理为基础，以分析约束的力学性质为手段，用演绎法推导出了Chetaev条件．下面来验证这一结论的正确性。

引入Lagrange乘子λ_β，将Chetaev条件（2.14）纳入泛函（2.4）中，经分部积分，并考虑到（2.6）式，则有

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s\right]dt=0 \tag{2.15}$$

由于引入Lagrange乘子，使得δq_s相互独立，故由（2.15）式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}=0 \tag{2.16}$$

可见，方程（2.16）与其约束条件(2.1)、(2.2)一起，构成封闭的微分方程组．文献[6]、[7]称（2.16）式为真实轨道方程．

有趣的是，我们还可以用如下的方法来推导真实轨道方程．

将（2.14）式微分，可得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s\right)=0 \tag{2.17}$$

引入Lagrange乘子μ_β，将（2.17）纳入泛函（2.4）中，经分部积分，并考虑到(2.6)式，可得

$$\delta \Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)dq_s\right]dt=0 \tag{2.18}$$

由于引入Lagrange乘子，使得δq_s相互独立，故由（2.18）式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0 \tag{2.19}$$

可见，只要使$\lambda_\beta=-\dot{\mu}_\beta$，则（2.19）式便与（2.16）式相同，因此，方程（2.19）也是文献[6]、[7]所指的真实轨道方程．

在真实轨道方程（2.19）中，表示约束力的诸项记为

$$R_s=\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{2.20}$$

将n维矢量$\boldsymbol{R}$（约束力）和n维矢量$\delta\boldsymbol{q}$（虚位移）点乘

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}=\sum_{s=1}^{n}R_s\delta q_s=\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right) \tag{2.21}$$

由Chetaev条件（2.14）可知，

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}=\sum_{s=1}^{n}R_s\delta q_s=0 \tag{2.22}$$

（2.22）式表明，约束力$\boldsymbol{R}$在虚位移$\delta\boldsymbol{q}$上所做虚功为零，这类约束称为理想约束．这便验证了，Chetaev条件确实使约束理想化了．

三、关于d-δ交换性

长期以来，许多学者认为，在非完整系统分析动力学中，微分运算d和变分运算δ次序不能交换．他们的理由如下：

对于如前所述的非完整系统，当Jacobi行列式

$$\frac{D(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_g)}{D(\dot{q}_{\varepsilon+1}\dot{q}_{\varepsilon+2},\ \cdots,\ \dot{q}_n)}\neq 0$$

时，由（2.1）式可以解得

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\ \dot{q}_\sigma,\ t)\qquad(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ \varepsilon;\ \varepsilon=n-g) \tag{3.1}$$

对（3.1）式应用Chetaev条件，则有

$$\delta q_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \tag{3.2}$$

将（3.2）式微分，得

$$\frac{d}{dt}\delta q_{\varepsilon+\beta}=\frac{d}{dt}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma$$

将（3.1）式变分，得

$$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}\delta\dot{q}_\sigma$$

然后相减，一般说来，

$$\frac{d}{dt}\delta q_{\varepsilon+\beta}-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}\neq 0 \tag{3.3}$$

许多学者由（3.3）式作出结论，微分运算和变分运算次序不能交换。

初看起来，在（3.3）式中，第一项是先变分再微分，第二项是先微分再变分，二者相减不为零，说明微分运算和变分运算次序不能交换，这似乎很有道理。但是，如果我们稍微仔细一点考虑问题，就会发现：在前面的论述中$(d/dt)\delta q_{\varepsilon+\beta}$中的$q_{\varepsilon+\beta}$是应用Chetaev条件后的变量，不妨记为$q_{1\,\varepsilon+\beta}$；而$\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$中的$q_{\varepsilon+\beta}$是应用Chetaev条件前的变量，不妨记为$q_{2\,\varepsilon+\beta}$。下面，我们将要证明，$q_{1\,\varepsilon+\beta}\neq q_{2\,\varepsilon+\beta}$。使得（3.3）式成立的原因，正是$q_{1\,\varepsilon+\beta}\neq q_{2\,\varepsilon+\beta}$，而与$d$与$\delta$是否交换无关。因此，许多学者认为，在非完整系统中$d$-$\delta$交换性不成立，实际上是一种误解。

对于应用Chetaev条件后的情况，(2.4)交换为

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}\delta q_{1s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1s}}\delta\dot{q}_{1s}\right)dt=0 \tag{3.4}$$

其约束条件变换为

$$\frac{d}{dt}\delta q_{1\,\varepsilon+\beta}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\delta q_{1\sigma}\right) \tag{3.5}$$

$$\delta q_{1s}=0\qquad (t=t_0\text{或}t=t_1) \tag{3.6}$$

引入Lagrange乘子μ_β，将（3.5）纳入泛函（3.4）中，经分部积分，并考虑到（3.6）式，可得

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\Bigg[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\right)\delta q_{1\sigma}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta\right)\delta q_{1\,\varepsilon+\beta}\Bigg]dt=0 \tag{3.7}$$

由于引入Lagrange乘子，使得$\delta q_{1\sigma}$，$\delta q_{1\,\varepsilon+\beta}$相互独立，故由（3.7）式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}=0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta=0 \tag{3.9}$$

由（3.9）解得

$$\dot{\mu}_\beta=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial L}{\partial q_{1\,\varepsilon+\beta}}$$

然后代入(3.8)，可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}=0 \tag{3.10}$$

可见，方程（3.10）即为Maggi型方程，它是与方程（2.16）或（2.19）同类性质的方程，即为真实轨道方程。方程（3.10）与其约束条件一起，构成封闭的微分方程组。通过它可以解得系统的真实轨道。

对于应用Chetaev条件前的情况，(2.4)变换为

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta\dot{q}_{2s}\right)dt=0 \tag{3.11}$$

其约束条件变换为

$$\delta\dot{q}_{2\,\varepsilon+\beta}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\delta\dot{q}_{2\sigma} \tag{3.12}$$

$$\delta q_{2s}=0\qquad(t=t_0\text{或}t=t_1) \tag{3.13}$$

引入Lagrange乘子μ_β，将(3.12)纳入泛函(3.11)中，经过分部积分，并考虑到(3.13)式，则有

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right)\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right]\delta q_{2\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\,\varepsilon+\beta}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2\,\varepsilon+\beta}}\right.$$

$$\left.\left.+\dot{\mu}_\beta\right)\delta q_{2\,\varepsilon+\beta}\right\}dt=0 \tag{3.14}$$

由于引入Lagrange乘子，使得$\delta q_{2\sigma}$，$\delta q_{2\,\varepsilon+\beta}$相互独立，故由(3.14)式可得

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}=0 &(3.15)\\&\frac{\partial L}{\partial q_{2\,\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\,\varepsilon+\beta}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{q_{2\,\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta=0 &(3.16)\end{aligned}\right.$$

可见，方程(3.15)、(3.16)与其约束条件一起，构成封闭的微分方程组．它是与方程(2.8)同类性质的方程，即为测地轨道方程．通过它可以解得系统的测地轨道．

通过如上的分析可知，应用(3.5)可以建立非完整系统的真实轨道方程，最终解得系统的真实轨道；应用(3.12)可以建立非完整系统的测地轨道方程，最终解得系统的测地轨道．这便说明，$q_{1\,\varepsilon+\beta}$在真实轨道上取值，而$q_{2\,\varepsilon+\beta}$在测地轨道上取值，一般说来$q_{1\,\varepsilon+\beta}\neq q_{2\,\varepsilon+\beta}$．

长期以来，许多学者均忽视了$q_{1\,\varepsilon+\beta}\neq q_{2\,\varepsilon+\beta}$这一基本事实，而把它们写成相同的符号$q_{\varepsilon+\beta}$，从而由

$$\frac{d}{dt}\delta q_{\varepsilon+\beta}-\delta\dot{q}_{\varepsilon+\beta}\neq 0 \tag{3.3}$$

导致微分运算和变分运算次序不能交换的误解．

一旦我们注意到$q_{1\,\varepsilon+\beta}\neq q_{2\,\varepsilon+\beta}$这一基本事实，我们就不仅可以写出

$$\frac{d}{dt}\delta q_{1\,\varepsilon+\beta}-\delta\dot{q}_{2\,\varepsilon+\beta}\neq 0 \tag{3.17}$$

而且还可以写出

$$\frac{d}{dt}\delta q_{1\,\varepsilon+\beta}-\frac{d}{dt}\delta q_{2\,\varepsilon+\beta}\neq 0 \tag{3.18}$$

$$\delta\dot{q}_{1\,\varepsilon+\beta}-\delta\dot{q}_{2\,\varepsilon+\beta}\neq 0 \tag{3.19}$$

$$\delta\dot{q}_{1\ \varepsilon+\beta}-\frac{d}{dt}\delta q_{2\ \varepsilon+\beta}\neq 0 \tag{3.20}$$

(3.17)、(3.18)、(3.19)、(3.20)的结果，都是由$q_{1\ \varepsilon+\beta}\neq q_{2\ \varepsilon+\beta}$导致的，而与微分运算和变分运算是否交换次序无关．因此，我们可以作出结论：微分运算和变分运算次序可以交换是变分学中的基本原理，这一基本原理对非完整系统也是适用的．

我们注意到，认为在非完整系统中d-δ交换性不成立的学者们，仅认为对由于非完整约束的存在而变得不独立的$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}$而言，$d$-$\delta$交换性不成立；而对独立的$\dot{q}_\sigma$而言，$d$-$\delta$交换性仍成立．但是，我们还注意到，不仅$q_{1\ \varepsilon+\beta}\neq q_{2\ \varepsilon+\beta}$是一个基本事实，而且$q_{1\sigma}\neq q_{2\sigma}$也是一个基本事实．因此，我们不仅可以写出(3.17)、(3.18)、(3.19)、(3.20)式，而且还可以写出

$$\frac{d}{dt}\delta q_{1\sigma}-\delta\dot{q}_{2\sigma}\neq 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dt}\delta q_{1\sigma}-\frac{d}{dt}\delta q_{2\sigma}\neq 0 \tag{3.22}$$

$$\delta\dot{q}_{1\sigma}-\delta\dot{q}_{2\sigma}\neq 0 \tag{3.23}$$

$$\delta\dot{q}_{1\sigma}-\frac{d}{dt}\delta q_{2\sigma}\neq 0 \tag{3.24}$$

按照认为d-δ交换性不成立的学者们的做法，将$q_{1\sigma}$和$q_{2\sigma}$写成相同的符号q_σ，则（3.21）变换为

$$\frac{d}{dt}\delta q_\sigma-\delta\dot{q}_\sigma\neq 0 \tag{3.25}$$

进而作出结论，对独立的$\dot{q}_\sigma$而言，d-δ交换性也不成立．这是多么荒唐的结论啊！

由以上分析可见，认为在非完整系统中，d-δ交换性不成立，实际上是一种误解。

四、非完整系统分析动力学中的两个经典关系

在完整系统分析动力学中，存在两个经典关系，它们是

$$\partial\dot{\boldsymbol{r}}/\partial\dot{q}_s=\partial\boldsymbol{r}/\partial q_s \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_s}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_s} \tag{4.2}$$

由于这两个经典关系是由分析力学的创始人Lagrange给出的，所以有的学者称之为Lagrange的两个经典关系．

在非完整系统分析动力学中，关于Chetaev条件的问题和关于d-δ交换性问题，像一对孪生姐妹，诱惑着许多学者为之倾倒．经过半个多世纪的精心研究，人们终于发现，在非完整系统分析动力学中，也存在两个经典关系，它们乃是寓于这一对孪生姐妹之中．

比较（2.8）式和（2.19）式，如果满足条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}=\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s} \tag{4.3}$$

则测地轨道方程与真实轨道方程重合．比较（3.8）式与（3.15）式可知，条件（4.3）的另一种表达方式为

$$\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\sigma}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma} \tag{4.4}$$

这便是非完整系统分析动力学中的一个经典关系。它与完整系统中的关系（4.1）相呼应。

非完整系统分析动力学中的另一个经典关系，即为d-δ交换关系

$$\frac{d}{dt}\delta q_s=\delta\dot{q}_s \tag{4.5}$$

它与完整系统分析动力学的关系（4.2）相呼应。

非完整系统分析动力学中的两个经典关系，不仅是广大力学工作者和数学工作者半个世纪的研究成果的结晶，而且将为非完整系统分析动力学的进一步发展奠定基础，它还使得完整系统分析动力学与非完整系统分析动力学成为一个合谐的整体。

五、积分变分原理应用于非完整系统

许多学者认为，对于非完整系统，Hamilton原理不是驻值变分原理[6][7]，积分变分原理不能应用于非完整系统。我们在另文中，充分而又必要地证明了，Hamilton原理是驻值变分原理，积分变分原理可以应用于非完整系统。这里仅补充说明，引入非完整系统的两个经典关系，给积分变分原理应用于非完整系统带来的好处。以下以Lagrange乘子法为例来说明问题。

1. 在泛函的变分式中引入Lagrange乘子

Hamilton原理的泛函为

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\ \dot{q},\ t)dt \tag{2.3}$$

其约束条件为(2.1)、(2.2)式。

将Π变分，并令$\delta\Pi=0$，则有

$$\delta\Pi=\int_{t_1}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)\right]dt=0 \tag{2.4}$$

其约束条件变换为

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)=0 \tag{2.5}$$

$$\delta q_s=0\qquad (t=t_0\text{或}t=t_1) \tag{2.6}$$

引入Lagrange乘子μ_β，将约束条件（2.5）纳入泛函（2.4）中，经分部积分，应用经典关系(4.3)，并考虑到（2.6）式，则有

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\delta q_s\right]dt=0 \tag{5.1}$$

由于引入Lagrange乘子，使得δq_s相互独立，故由（5.1）式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}=0 \tag{5.2}$$

可见，方程（5.2）与其约束条件一起，构成封闭的微分方程组。

2. 在泛函的全量式中引入Lagrange乘子，Lagrange乘子不参加变分[7]

Hamilton原理的泛函为

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1} L(q,\ \dot{q},\ t)dt \tag{2.3}$$

其约束条件为(2.1)，(2.2)。

引入Lagrange乘子M_β，将（2.1）纳入泛函中

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q,\ \dot{q},\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta f_\beta(q,\dot{q},\ t)\right]dt \tag{5.3}$$

将Π变分，并令$\delta\Pi=0$，经分部积分，应用经典关系(4.3)，考虑到(2.6)，则有

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\right]dt=0 \tag{5.4}$$

由于引入Lagrange乘子，使得δq_s相互独立，故由（5.4）式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0 \tag{5.5}$$

可见，方程（5.5）与其约束条件一起，构成封闭的微分方程组。

3. 在泛函的全量式中引入Lagrange乘子，Lagrange乘子参加变分[8]

Hamilton原理的泛函为

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1} L(q,\ \dot{q},\ t)dt \tag{2.3}$$

其约束条件为(2.1)，(2.2)。

引入Lagrange乘子μ_β，将约束条件(2.1)纳入泛函中，则有

$$\Pi_g=\int_{t_0}^{t_1}\left[L(q,\ \dot{q},\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta f_\beta(q,\ \dot{q},\ t)\right]dt \tag{5.6}$$

将Π_g变分，并令$\delta\Pi_g=0$，经分部积分，应用经典关系(4.3)，注意到Lagrange乘子作为独立变量参加变分，并考虑到（2.6）式，则有

$$\delta\Pi_g=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\right.$$

$$\left.+\sum_{\beta=1}^{g}f_\beta(q,\ \dot{q},\ t)\delta\mu_\beta\right]dt=0 \tag{5.7}$$

由于引入Lagrange乘子使得δq_s相互独立，并考虑到$\delta\mu_\beta$的独立性，故由（5.7）可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial q_s}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0 & (5.8)\\ f_\beta(q,\ \dot{q},\ t)=0 & (5.9)\end{cases}$$

由上式可见，应用文献[8]所指Lagrange乘子法，将泛函的约束条件（2.1）转化为泛函的自然条件(5.9)，从而使变分原理广义化。

我们曾在文[13]中，应用Lagrange乘子法的这种程式，推导出Vacco方程和（5.9）式。那是因为没有使用经典关系（4.3）所致。

4. 应用变分原理进行近似计算

基于积分变分原理的近似计算方法有多种，这里仅以有限元法为例来说明问题。

将连续的时间域$[t_0, t_1]$划分为N个元素Δt_1，Δt_2，…，Δt_a，Δt_b，…，Δt_N，并且$q_s^{(1)}$，$q_s^{(2)}$，…，$q_s^{(a)}$，$q_s^{(b)}$，…，$q_s^{(N)}$满足条件

（1）　在元素内$q_s^{(a)}$连续。

（2）　在无际边界t_{ab}上，$q_s^{(a)}=q_s^{(b)}$。

在进行了如上的处理之后，适于有限元计算的广义变分原理为

$$\Pi_g=\sum\int_{\Delta t_a}\Big[L(q^{(a)},\ \dot q^{(a)},\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta f_\beta(q^{(a)},\ \dot q^{(a)},\ t)\Big]dt \tag{5.10}$$

其约束条件为原边界条件（2.2）和无际边界条件

$$q_s^{(a)}=q_s^{(b)}\qquad(\text{在}t_{ab}\text{上})$$

按照文献[9]、[10]、[11]，该变分原理提供了协调元模型。

如果引入Lagrange乘子μ_{ab}，将无际边界条件纳入泛函中，则有

$$\Pi_{mg}=\sum\int_{\Delta t_a}\Big[L(q^{(a)},\ \dot q^{(a)},\ t)+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta^{(a)} f_\beta(q^{(a)},\ \dot q^{(a)},t)\Big]dt$$

$$+\sum\mu_{ab}(q_s^{(a)}-q_s^{(b)}) \tag{5.11}$$

其约束条件为（2.2）式.这就是修正的广义变分原理，它提供了杂交元模型[9][10][11]。

参　考　文　献

[1] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社（1985）.

[2] Четаев Н.Г.,Устойчивость движения, *Работи по Аналитической Механике*, Изд-во АН СССР (1962), 499.

[3] Четаев Н.Г., Одно видоизменение принчипа Гаусса, *ПММ*, 5 (1941).

[4] 陈滨，《分析动力学》，北京大学出版社（1987）.

[5] Rumjantsev, V. V., On variational principles of analytical mechanics, *Applied Mechanics*, Ed. by Zheng Zhe-min, Pergamon Press, Beijing (1989).

[6] Румянчев В. В., О принципе гамильтона для неголономных систем, *ПММ*, 42 (1978).

[7] Румянцев В. В., Об интегральных принципах для неголономных систем, *ПММ*, 46 (1982).

[8] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践，（1-2）（1979）.

[9] 钱伟长，《变分法和有限元》，科学出版社（1980）.

[10] 胡海昌，《弹性力学变分原理及其应用》，科学出版社（1981）.

[11] Washizu, K., *Variational Method in Elasticity and Plasticity*, 3rd Ed., Pergamon Press (1982).

[12] 梁立孚，Hamilton原理应用于非完整系统，中国兵工系统一般力学讨论会，杭州（1987）.

[13] Liang, L.F., On a problem of analytical dynamics of non-holonomic systems, *Applied Mechanics*, Vol.1, Ed. by Zheng Zhe-min, Pergamon Press, Beijing (1989).

On Some Important Problems in Analytical Dynamics of Non-Holonomic Systems

Liang Li-fu

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute, Harbin)

Shi Zhi-fei

(Harbin Institute of Technology, Harbin)

Abstract

By using the deductive method, Chetaev condition is derived in this paper. We point out that the processes of variation and differentiation are not permutable in non-holonomic dynamics is a misunderstanding. The paper gives two classical relations of non-holonomic systems and points out integral variational principles can be applied in non-holonomic systems.

Key words analytical dynamics, variational principle, non-holonomic systems, the deductive method, Chetaev condition, constraint force