应用数学和力学，第14卷第12期（1993年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

双周期裂纹场平面弹性焊接的数学问题*

李 星

（银川 宁夏大学，1992年7月24日收到）

摘 要

本文讨论双周期胞腔中含任意形状裂纹的不同材料的弹性平面焊接（焊线为任意形状的封闭光滑曲线）的第二基本问题．运用Мусхелишвили复变函数方法，对这类弹性平面问题建立起了数学模型，将求解弹性平衡问题化归为寻求复应力函数满足一定边界条件的边值问题，然后构造其解的形式，再将其转化为正则型的奇异积分方程，数学上严格证明其解的存在与唯一．

关键词 双周期 裂纹 焊接

一、引 言

双周期解析函数的Riemann边值问题，Hilbert边值问题以及Ponincaré问题已有研究[9~12]，具双周期核的奇异积分方程也有研究[9,13]．本文运用这些理论与结果于双周期平面弹性理论中．在现代工程中，平面弹性材料具双周期裂纹的弹性问题是十分重要的和经常遇到的．例如在岩石力学、混凝土力学和固体力学中等等常常遇到此类问题，但由于问题较难因此研究者为数不多．[4,15]证明了单一材料具双周期孔洞问题的解的存在与唯一性，[5]研究了单一材料具双周期直裂纹的问题，单一材料既带孔洞又带裂纹的双周期平面弹性问题的解的存在与唯一性[16]作过证明，而[6]证明了不具裂纹的复合材料双周期平面弹性问题的解的存在与唯一性．不同材料双周期裂纹场的弹性焊接问题还更切实际，更值得研究．

现在我们考虑一无穷大板带有基本周期为$2\omega_1$，$2\omega_2$的任意形状的裂纹和任意形状的孔洞．各孔洞均焊接另一种材料．设P_0为一以$\pm\omega_1\pm\omega_2$为顶点的平行四边形基本胞腔，且不妨设$\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$，$\mathrm{Im}\omega_1=0$；$P_0$的边界取反时针向为正向，记为$\Gamma$，且$\Gamma=\sum_{i=1}^{4}\Gamma_i$，$P_0$内的焊线记为$L=L_0$，它是一条任意形状的光滑封闭曲线，以时针向为正向．如图记Γ与L所围的内域为S_0^+，L的内部区域为S_0^-，$S_0^\pm$为不同的弹性材料，分别有弹性常数$\kappa^\pm$，$\mu^\pm$．为方便，假定S_0^+与S_0^-内各有一条裂纹，记为$\gamma_j(j=1,2)$，且记$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$，γ_j均取自a_j到b_j为正向，它们是互不穿透也不与L，Γ相交的光滑曲线段．并设$0\in S_0^+$．则S^+为$S_0^++\Gamma$作双周期延拓

* 周焕文推荐．

国家自然科学基金资助课题．

的结果，S^-是S_0^-作双周期延拓的结果，当然S_0^+的合同区域与S_0^+有相同的弹性材料和裂纹，所以整个弹性区域为$S=S^++S^-$.

对于双周期问题而言，应力分布是双周期的.

$$\sigma_x(z+2\omega_k)=\sigma_x(z) \tag{1.1}$$

$$\sigma_y(z+2\omega_k)=\sigma_y(z) \qquad (k=1,\ 2) \tag{1.2}$$

$$\sigma_{xy}(z+2\omega_k)=\sigma_{xy}(z) \tag{1.3}$$

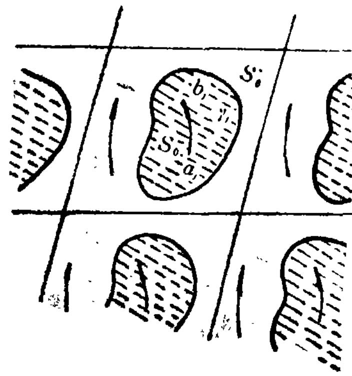

图 1

应力与位移和Колосов-Мусхелишвили复势函数的关系如下[1]

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}[\phi'(z)] \tag{1.4}$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\sigma_{xy}=2[\bar z\phi''(z)+\psi'(z)] \tag{1.5}$$

$$2G(u+iv)=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)} \tag{1.6}$$

由(1.1)～(1.6)立即推出$\phi'(z)$，$\bar z\phi'(z)+\psi(z)$是双周期函数，当然$\phi(z)$便是加法双准周期函数，位移便是加法双准周期函数[15].

记γ_j两侧的外应力为：

$$X_n^{\pm}(\tau)+iY_n^{\pm}(\tau),\ \tau\in\gamma_j, \qquad (j=1,\ 2)$$

外应力主矢量：

$$X_j^{\pm}+iY_j^{\pm}=\int_{\gamma}[X_n^{\pm}(\tau)+iY_n^{\pm}(\tau)]ds \qquad (j=1,\ 2)$$

则其上合主矢量：

$$X_j+iY_j=(X_j^++iY_j^+)+(X_j^-+iY_j^-)$$

其中ds为$\gamma_j(j=1,\ 2)$上的弧长微分. 还设γ_j两侧的外应力满足Hölder条件.

由双周期性，在P_0两对对边上的外应力主矢量应互相抵消，且考虑到焊线L两侧的应力平衡，则由力的平衡原理必有：

$$\sum_{j=1}^{2}(X_j+iY_j)=0 \tag{1.7}$$

如果我们记$g_j^{\pm}(\tau)=u_j^{\pm}(\tau)+iv_j^{\pm}(\tau)$分别为点$\tau\in\gamma_j(j=1,\ 2)$正侧和负侧的位移，$u_j^{\pm}(t)+iv_j^{\pm}(t)$分别为点$t\in L$正侧和负侧的位移，则位移之差为$g(t)=[u^+(t)+iv^+(t)]-[u^-(t)+iv^-(t)]$且$g(t)\in H$.

二、第二基本问题的提法

所谓第二基本问题，就是已知γ_j两侧的位移$g_j^{\pm}(t)$，$t\in\gamma_j$及其位移加数$g_j^{(k)}$ $(j,k=1,2)$，而各个裂纹两侧的外应力主矢量X_j+iY_j为未知函数，但满足(1.7)式，寻求双准周期分区全纯函数$\phi(z)$和满足$\psi(z)+\bar z\phi'(z)$为一双准周期函数的分区全纯函数$\psi(z)$，满足下列边值条件：

同[1]在裂纹γ_j上有：

$$\kappa_j\phi^{\pm}(t)-t\overline{\phi'^{\pm}(t)}-\overline{\psi^{\pm}(t)}=f^{\pm}(t), \qquad t\in\gamma \tag{2.1}$$

$$\phi^+(t)+t\overline{\phi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)}=\phi^-(t)+t\overline{\phi'^-(t)}+\overline{\psi^-(t)}, \qquad t\in L \tag{2.2}$$

$$\alpha^+\phi^+(t)-\beta^+[t\overline{\phi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)}]=\alpha^-\phi^-(t)-\beta^-[t\overline{\phi'^-(t)}+\overline{\psi^-(t)}]+2g(t), \qquad t\in L \tag{2.3}$$

$$[\kappa_z\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}]\Big|_z^{z+2\omega_k}=2\mu_z g_z^{k)}, \qquad (k=1,2) \tag{2.4}$$

这里已令 $f^{\pm}(t)=2\mu_j g_j^{\pm}(t)$, $t\in\gamma_j$

$$\kappa_j=\begin{cases}\kappa^+, & t\in\gamma_1\\ \kappa^-, & t\in\gamma_2\end{cases},\quad \mu_j=\begin{cases}\mu^+ & t\in\gamma_1\\ \mu^- & t\in\gamma_2\end{cases},\quad \kappa_z=\begin{cases}\kappa^+, & z\in S_0^+\\ \kappa^-, & z\in S_0^-\end{cases}$$

$$g_z^{k)}=\begin{cases}g_1^{k)} & 当z\in S_0^+\\ g_2^{k)} & 当z\in S_0^-\end{cases}\quad (k=1,2),\quad \mu_z=\begin{cases}\mu^+, & z\in S_0^+\\ \mu^-, & z\in S_0^-\end{cases}$$

$$\alpha^{\pm}=\kappa^{\pm}/\mu^{\pm},\quad \beta^{\pm}=1/\mu^{\pm}$$

它们都是正数。

三、化为奇异积分方程

为求解边值问题(2.1)～(2.4)，引进新的未知函数 $\omega(t)\in H$, $t\in L+\gamma$. 记 $A_j=-(X_j+iY_j)/4\pi$ 为未知（待定）常数($j=1,2$)，使得：

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\omega(t)\zeta(t-z)dt+\frac{1}{\kappa_z+1}\sum_{j=1}^{2}A_j[\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)$$
$$-H_j(z)]+A_z z+C \tag{3.1}$$

$$\psi(z)=-\sum_{j=1}^{2}\frac{\kappa_j}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\overline{\omega(t)}\zeta(t-z)dt-\frac{\kappa_z}{\kappa_z+1}\sum_{j=1}^{2}\bar{A}_j[\log\sigma(z-a_j)\sigma(z-b_j)$$
$$-H_j(z)]-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(t)}\zeta(t-z)dt-\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\overline{m(t)}\omega'(t)\zeta(t-z)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L H(t)\zeta(t-z)dt+D(z)\phi'(z)-D(z)\phi'(0)+P_z z$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\bar{g}^+-\bar{g}^-)\zeta(t-z)dt \tag{3.2}$$

上式中的对数对于同一 j 要取同一支。$H(t)$ 为一待定函数。

$$H_j(z)=\int_{\gamma_j}h_j(\tau)\zeta(\tau-z)d\tau,\quad h_j(\tau)=(2\tau-a_j-b_j)/(b_j-a_j)\quad (j=1,2)$$

$$m(z)=2+\overline{D(z)},\quad D(z)=\delta_1\zeta(z)+\delta_2 z$$

$$\delta_1=\frac{2}{\pi i}(\bar{\omega}_2\omega_1-\bar{\omega}_1\omega_2),\quad \delta_2=\frac{2}{\pi i}(\bar{\omega}_1\eta_2-\bar{\omega}_2\eta_1)$$

$\zeta(z)$, $\sigma(z)$ 分别为 Weierstrass ζ 和 σ 函数，

$$\sigma'(z)/\sigma(z)=\zeta(z),\quad \zeta(z+\omega_k)=\zeta(z)+2\eta_k$$
$$\eta_k=\zeta(\omega_k)\qquad (k=1,2)$$
$$\omega_1\eta_2-\omega_2\eta_1=(\pi i)/2$$

以上表明 $m(z)$ 为双周期函数，而 $H_j(z)$ 分别在 $z=a_j, b_j$ 点具有与 $\log(z-a_j)$ 和 $\log(z-b_j)$ 相同的奇性，并且 $H_j(z)$ 为一单值函数。

不妨设[8]

$$\omega(a_j)=\omega(b_j)=0\qquad (j=1,2) \tag{*}$$

将(3.1)、(3.2)代入(2.4)整理得：

$$2[(\kappa_z A_z-\bar{A}_z)\omega_k-\bar{B}_z\bar{\omega}_k]=\frac{\kappa_z\eta_k}{\pi i}\int_{L+\gamma}\omega(t)dt$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\frac{\kappa_j\bar{\eta}_k}{\pi i}\int_{\gamma_j}\omega(t)d\bar{t}-\frac{\bar{\eta}_k}{\pi i}\int_L\omega(t)d\bar{t}-\frac{\bar{\eta}_k}{\pi i}\int_{L+\gamma}m(t)\omega'(t)d\bar{t}$$

$$+\frac{\bar{\eta}_k}{\pi i}\int_\gamma(g^+-g^-)d\bar{t}$$

$$-\frac{\omega_k}{\pi i}\int_{L+\gamma}\overline{\omega'(t)}\ \overline{\zeta(t)}dt+\eta_k/(\pi i)\int_L H(t)d\bar{t}+2\mu_z g_z^{k)} \tag{3.3}$$

方程组(3.3)的系数行列式为：

$$\begin{vmatrix}2\omega_1 & 2\bar{\omega}_1\\ 2\omega_2 & 2\bar{\omega}_2\end{vmatrix}=4(\omega_1{}_2\bar{\omega}-\omega_2\bar{\omega}_1)=-2iS\neq0$$

这里S为基本胞腔的面积。

由方程组(3.3)解得：

$$A_z=\kappa_z R_z+\bar{R}_z/(\kappa_z^2-1) \tag{3.4}$$

$$R_z=p_z+q/(2\pi i)\int_L H(t)dt,\ p_z=\begin{cases}p^+, & z\in S^+\\ p^-, & z\in S^-\end{cases},\quad q=\frac{\delta_1}{8iS} \tag{3.5}$$

$$p^\pm=[-\kappa^\pm\delta_1\int_{L+\gamma}\omega(t)dt+\sum_{j=1}^{2}\kappa_j\int_{\gamma_j}\omega(t)dt+\int_{L+\gamma}m(t)\omega'(t)d\bar{t}$$

$$+\mu^\pm(\bar{\omega}_1 g_2-\bar{\omega}_2 g_1)]/(2iS)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\overline{\omega'(t)}\ \overline{\zeta(t)}d\bar{t} \tag{3.6}$$

$$\bar{B}^\pm=p'^\pm+q'\int_L H(t)d\bar{t},\quad p'^\pm=\begin{cases}p'^+, & z\in S^+\\ p'^-, & z\in S^-\end{cases},\quad q'=-\frac{1}{8iS} \tag{3.7}$$

$$p'^\pm=\left\{\frac{1}{2}\kappa^\pm\int_{L+\gamma}\omega(t)dt-\left[\sum_{j=1}^{2}\kappa_j\int_{\gamma_j}\omega(t)d\bar{t}+\int_L\omega(t)d\bar{t}+\int_{L+\gamma}m(t)\omega'(t)d\bar{t}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_\gamma(g^+-g^-)d\bar{t}\right]\delta_1\right\}\Big/(8iS)+[\mu^\pm(\omega_1 g_2-\omega_2 g_1)]/(4iS) \tag{3.8}$$

令$z\to t_0\in L$利用推广的Plemelj公式代入(2.2)，再将上述待定常数代入整理得：

$$\left(\frac{1}{\kappa^+-1}-\frac{1}{\kappa^--1}\right)\left[\bar{q}\int_L\overline{H(t)}dt+q\int_L H(t)d\bar{t}\right]t_0+H(t_0)=Q(t_0) \tag{3.9}$$

其中

$$Q(t_0)=\left(\frac{1}{\kappa^-+1}-\frac{1}{\kappa^++1}\right)\sum_{j=1}^{2}A_j[\log\sigma(t_0-a_j)\sigma(t_0-b_j)-H_j(t_0)]$$

$$+\left(\frac{1}{\kappa^++1}-\frac{1}{\kappa^++1}\right)t_0\sum_{j=1}^{2}\bar{A}_j[\overline{\zeta(t_0-a_j)}+\overline{\zeta(t_0-b_j)}-H_j'(t_0)]$$

$$-\left(\frac{p^+-\bar{p}^+}{\kappa^+-1}-\frac{p^--\bar{p}^-}{\kappa^--1}\right)t_0$$

(3.9)式两端同乘$d\bar{t}_0$并沿L积分，且考虑到 0 在L的外部有：

$$\int_L H(t_0)\,d\bar{t}_0=\int_L Q(t_0)\,d\bar{t}_0 \tag{3.10}$$

于是
$$H(t_0)=Q(t_0)-\left(\frac{1}{\kappa^+-1}-\frac{1}{\kappa^--1}\right)\left[\bar{q}\int_L\overline{Q(t)}\,dt+q\int_L Q(t)\,d\bar{t}\right]t_0 \tag{3.11}$$

因此，我们就以此式作为(3.2)中函数$H(t)$，则(2.2)式自动满足。

令$z\to t_0\in L$，利用推广的 Plemelj 公式将(3.1)，(3.2)代入(2.3)，且考虑到$\kappa^\pm\beta^\pm=\alpha^\pm$得方程：

$$\begin{aligned}
&(\alpha^++\alpha^-+\beta^++\beta^-)\omega(t_0)+\frac{\alpha^+-\alpha^-+\beta^--\beta^+}{\pi i}\int_{L+\gamma}\omega(t)\overline{\zeta(t-t_0)}\,d\bar{t}\\
&\quad+\frac{\beta^+-\beta^-}{\pi i}\int_L\omega(t)\,d\log\frac{\sigma(t-t_0)}{\overline{\sigma(t-t_0)}}+\frac{\beta^+-\beta^-}{\pi i}\int_L\overline{\omega(t)}\,d[(m(t)\\
&\quad-m(t_0))\overline{\zeta(t-t_0)}]-\frac{\beta^+-\beta^-}{\pi i}\sum_{j=1}^{2}\kappa_j\int_{\gamma_j}\omega(t)\overline{\zeta(t-t_0)}\,d\bar{t}\\
&=4\left(\frac{\beta^+}{\kappa^++1}-\frac{\beta^-}{\kappa^-+1}\right)\log|\sigma(t_0-a_j)\sigma(t_0-b_j)-H_j(t_0)|\\
&\quad+2\left(\frac{\beta^+}{\kappa^++1}-\frac{\beta^-}{\kappa^-+1}\right)\sum_{j=1}^{2}\bar{A}_j[\overline{\zeta(t_0-a_j)}+\overline{\zeta(t_0-b_j)}\\
&\quad-\overline{H'_j(t_0)}\,]+4g_0(t)-\frac{\beta^+-\beta^-}{\pi i}\int_\gamma(f^+-f^-)\overline{\zeta(t-t_0)}\,d\bar{t}
\end{aligned}\tag{3.12}$$

令$z\to t_0\in\gamma$，利用推广的Plemelj公式由(2.3)的正负边值出发得同一方程：

$$\begin{aligned}
&\kappa_j\omega(t_0)+\frac{\kappa_j}{2\pi i}\int_\gamma\omega(t)\,d\log\frac{\sigma(t-t_0)}{\overline{\sigma(t-t_0)}}+\sum_{k\neq j}\frac{1}{2\pi i}\left\{\kappa_j\int_{\gamma_k}\omega(t)\zeta(t-t_0)\,dt\right.\\
&\quad\left.-\kappa_k\int_{\gamma_k}\omega(t)\overline{\zeta(t-t_0)}\,d\bar{t}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\left\{\kappa_j\int_L\omega(t)\zeta(t-t_0)\,dt\right.\\
&\quad\left.-\int_L\overline{\omega(t)}\,\overline{\zeta(t-t_0)}\,d\bar{t}+\int_L\overline{\omega(t)}\,d[(m(t)-m(t_0))\overline{\zeta(t-t_0)}\,]\right\}\\
&=\frac{m(t_0)}{\kappa_j+1}\sum_{r=1}^{2}\bar{A}_r[\overline{\zeta(t_0-a_j)}+\overline{\zeta(t_0-b_j)}-\overline{H'_j(t_0)}\,]\\
&\quad-\frac{2\kappa_j}{\kappa_j+1}\sum_{r=1}^{2}A_r\log|\sigma(t_0-a_r)\sigma(t_0-b_r)-H_r(t_0)|\\
&\quad-\frac{1}{2\pi i}\int_L(f^+-f^-)\overline{\zeta(t-t_0)}\,d\bar{t}+\frac{1}{2}(f^+(t_0)+f^-(t^0))
\end{aligned}\tag{3.13}$$

因为$t_0\in\gamma$，$\gamma\cap L=\phi$，所以$t_0\notin L$，故

$$\int_L\omega(t)\zeta(t-t_0)\,dt$$

是 Fredholm 项。

于是(3.12)，(3.13)合在一起构成$\omega(t)$在$L+\gamma$上的一个正则型奇异积分方程，其中正好有2×2个待定实常数，X_1，Y_1，D_1，D_2(由(1.7)，$X_1=-X_2$，$Y_1=-Y_2$)，这里D_1，D_2为(3.1)中C的实部和虚部，$D_1=\mathrm{Re}C$，$D_2=\mathrm{Im}C$.

现在我们证明当X_1，Y_1，D_1，D_2适当选定的时候，方程(3.12)，(3.13)在$h_{2\times2}$类中唯一可解. 类似于[1]，我们首先证明当$g_j^+(\tau)=0$，$\tau\in\gamma$；$g(t)=0$，$t\in L$. $X_1=X_1^0$，$Y_1=Y_1^0$，$D_1=D_1^0$，$D_2=D_2^0$适当选定后方程(3.12)，(3.13)相应的解$\omega_0(t)\equiv0$于$t\in L+\gamma$。(故$X_1^0=Y_1^0=D_1^0=D_2^0=0$是必要的)。

设由$\omega_0(t)$代入(3.1)，(3.2)求得的复应力函数为$\phi^0(z)$，$\psi^0(z)$，容易验证它们满足第二基本问题的零边值条件(2.1)～(2.3)，由[8]中的唯一性定理得：

$$\phi^0(z)=C_z\quad \psi^0(z)=\kappa_z C_z \tag{3.14}$$

将(3.14)代入(2.3)得：

$$(\kappa^++1)C^+=(\kappa^-+1)C^- \tag{3.15}$$

此处 $$C_z=\begin{cases}C^+, & z\in S^+\\ C^-, & z\in S^-\end{cases}$$

既然$\phi^0(z)$是一单值函数，由(3.1)我们有：

$$A_j^0=X_j^0+iY_j^0=0 \tag{3.16}$$

则 $$C_z=\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\omega_0(t)\zeta(t-z)dt+A_z^0t \tag{3.17}$$

$$\kappa_z\bar{C}_z=-\sum_{j=1}^{2}\frac{\kappa_j}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\overline{\omega_0}(t)\zeta(t-z)dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega_0(t)}\zeta(t-z)dt$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\overline{m(t)}\omega_0'(t)\zeta(t-z)dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{H}(t)\zeta(t-z)dt+B_z^0t \tag{3.18}$$

比较(3.17)，(3.18)两式的两端双准周期加数得：

$$\left.\begin{aligned}&A_z^0=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\omega_0(t)dt=0\\ &B_z^0=0,\quad -\sum_{j=1}^{2}\frac{\kappa_j}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\overline{\omega_0}(t)\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega_0(t)\,d\\ &\qquad\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{L+\gamma}\overline{m}(t)\omega'(t)dt=0\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

从(3.18)，(3.19)我们知：

$$\omega_0(t)=C^+-C^-,\quad t\in L;\quad \omega_0(t)=0,\quad t\in\gamma \tag{3.20}$$

不妨假定$z\in S_0^+$，由(3.17)立得：

$$C_z=(C^+-C^-)/(2\pi i)\int_L\omega_0(t)\zeta(t-z)dt \tag{3.21}$$

因$z=0\in S_0^+$，故由Cauchy定理知$C^+=0$，从(3.15)得$C^-=0$，

故 $$\omega_0(t)=0,\qquad t\in L \tag{3.22}$$

由(3.20)，(3.22)知$\omega_0(t)\equiv0$，$t\in L+\gamma$.

回到一般方程(3.12)，(3.13)，它在$h_{2\times2}$类中的指标为-2，而它相应的齐次方程又只

有零解，故其相联方程有4个线性无关的解$\sigma_1(t)$，…，$\sigma_4(t)$，而它在$h_{2\times 2}$类中可解（且解唯一）的充要条件是下列四个条件（见[2] §113，§110）：

$$\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} C_j\int_{\gamma} \sigma_k(t)\,dt=\lambda_k \qquad (k=1,\ \cdots,\ 4) \tag{3.23}$$

这里 $$\lambda_k=\mathrm{Re}\int_{L+\gamma}\bar{H}(t)\sigma_k(t)\,dt \qquad (k=1,\ \cdots,\ 4)$$

其中$\bar{H}(t)$表示(3.12)，(3.13)中不含待定常数X_1，Y_1，D_1，D_2的右端，它是已知函数．分开(3.23)的实部与虚部，则变为含4个实未知数的4阶线性方程组．此方程组是非退化的，因为当$\bar{H}(t)=0$时它仅有平凡解$X_1^0=Y_1^0=D_1^0=D_2^0=0$，于是$\lambda_k=0$．综上所述(3.12)，(3.13)在$h_{2\times 2}$类中当$X_1$，$Y_1$，$D_1$，$D_2$选定后总是唯一可解的．

衷心感谢我的导师路见可教授和刘士强教授的精心指导与热情帮助！

参 考 文 献

[1] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen (1963).

[2] Muskhelishvili, N. I., *Singular Integral Equations*, 3rd Ed., Nauka, Moscow (1968).

[3] Koiter, W. T., Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions, *Proc. Kon. Ned. AK. WT. Amsecrdam*, A, 57(2) (1959), 120—128.

[4] Koiter, W. T., Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly periodic set of holes, *Boundary Problems in Differential Equations*, The Univ. of Wisconsin Press, Madison (1960), 191—213.

[5] Панасюк В. В., Распределение напряжения около трещин в пластинах и оболочках, *Киев «Наукова Думка»*, Акад. Наук. УССР, Хиз-Махан ИН-Т, (443) (1976), 149—162.

[6] Фильштинский Л. А., К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой, *ПММ*, 37 (1973), 263—273.

[7] 路见可，《平面弹性复变方法》，武汉大学出版社，武汉（1986）．

[8] 刘士强，弹性长条的周期基本问题，数学杂志，(2)（1984）．

[9] 路见可，《解析函数边值问题》，上海科技出版社，上海（1986）．

[10] 郭建林，双周期解析函数的 Poincaré 问题，科学通报，14(13)（1987）．

[11] 黄烈德，Riemann-Hilbert 问题的一些新发展，数学进展，(3)（1990）．

[12] 李星，具有间断系数的双周期和双准周期 Riemann 边值问题，宁夏大学学报（自然科学版）(1)（1988）．

[13] 李星，具有间断系数的双周期核的奇异积分方程，宁夏大学学报，(2)（1989），1—6．

[14] Zhang Xiao-si, General solutions of double periodic cracks in an anisotropic infinite plate, *Scientia Sinica (Series A)*, 28 (1985).

[15] 郑可，双周期平面弹性基本问题，数学物理学报，8(1)（1988）．

[16] 李星，带双周期裂缝与孔洞的弹性平面基本问题，宁夏大学学报，(2)（1990），11—24．

On the Mathematical Problems of Composite Materials with a Doubly Periodic Set of Cracks

Li Xing

(*Ningxia University, Yinchuan*)

Abstract

In this paper, the mathematical problem of the second fundmental problem of composite materials with a doubly periodic set of arbitrary shape cracks are investigated, and the interface is arbitrary smooth closed contours. At first, we establish mathematical models by using Muskhelisvili complex variable methods, change the primitive problems into searching complex stress functions which satify four boundary value problems and construct forms of the solution, then, under some general restrictions it is reduced to normal type singular integral equation, the unique solvability is proved mathematically.

Key words double period, crack, welding