应用数学和力学，第14卷第12期（1993年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

塑性全量理论的变分不等式模式及其无迭代解*

郭小明　余颖禾

（南京 东南大学数学力学系，1992年10月17日收到）

摘　要

变分不等式是解决一类带单侧约束的定常力学问题的有效数学工具．本文就弹塑性全量理论构造了等价的变分不等式模式，解除了弹塑性问题本构约束的不等式关系，比一般能量形式的描述更为简洁．它便于计算，具有可靠的数学依据，可以用二次规划法求解．计算时无需分级加载迭代，一步即可得收敛解．

关键词　塑性全量理论　变分不等式　二次规划

对于弹塑性问题，由于本构方程是一个不等式，它的求解比较复杂．经典变分原理要求自变量在取值范围内不受约束，因此用它来处理此类问题是比较困难的．

一种解决的方法是直接运用规划法求泛函的极值，将非线性问题化为一系列线性互补问题来求解．

本文就塑性全量理论建立了相等价的变分不等式模式，运用二次规划法求得弹塑性问题的全量无迭代解，得到了令人满意的结果．

一、塑性全量理论

假定材料满足小变形简单加载的条件，应力张量各分量之间保持不变，即

$$\sigma_{ij}=\sigma^{\circ}_{ij}\Phi,\quad S_{ij}=S^{\circ}_{ij}\Phi \tag{1.1}$$

这里 Φ 为比例参数，σ°_{ij}，S°_{ij} 为某一时刻的非零应力张量和应力偏张量．

根据关联流动法则，可得塑性应变增量和有效应变增量为[1,2]

$$d\varepsilon^{p}_{ij}=\frac{3S_{ij}}{2\bar{\sigma}}d\lambda \tag{1.2}$$

$$d\bar{\varepsilon}^{p}=\sqrt{(2/3)d\varepsilon^{p}_{ij}\cdot d\varepsilon^{p}_{ij}}=d\lambda \tag{1.3}$$

令　$$R_{ij}=\frac{3}{2}\frac{S^{\circ}_{ij}}{\bar{\sigma}^{\circ}}=\frac{3}{2}\frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}}$$

* 钱伟长推荐．

则式(1.2)可写成

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=R_{ij}d\lambda \tag{1.4}$$

由于所研究的是简单加载，因此有

$$\varepsilon_{ij}^{p}=\int d\varepsilon_{ij}^{p}=\int R_{ij}d\lambda=R_{ij}\lambda \tag{1.5}$$

$$\bar{\varepsilon}^{p}=\int d\bar{\varepsilon}^{p}=\int d\lambda=\lambda \tag{1.6}$$

再由

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}\cdot d\varepsilon_{kl}^{e}=D_{ijkl}(d\varepsilon_{kl}-d\varepsilon_{kl}^{p}) \tag{1.7}$$

积分可得

$$\sigma_{ij}=D_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-R_{kl}\cdot\lambda) \tag{1.8}$$

因此可得应力强度$\bar{\sigma}$为

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}\cdot S_{ij}}=\frac{\sqrt{3/2}\,S_{ij}\cdot S_{ij}}{\sqrt{S_{ij}\cdot S_{ij}}}=\frac{\sqrt{3/2}\,S_{ij}\cdot\sigma_{ij}}{\sqrt{S_{ij}\cdot S_{ij}}}$$

$$=R_{ij}\sigma_{ij}=w_{kl}\cdot\varepsilon_{kl}-\tilde{D}\lambda \tag{1.9}$$

其中 $w_{kl}=R_{ij}\cdot D_{ijkl}$，$\tilde{D}=R_{ij}D_{ijkl}R_{kl}$

这样，等效应力$\bar{\sigma}$就表示成了σ_{ij}或ε_{ij}和λ的线性函数.

设材料服从Mises屈服准则

$$f=\bar{\sigma}-\sigma_{s}-h\left(\int d\bar{\varepsilon}^{p}\right)\leqslant 0 \tag{1.10}$$

即

$$w_{ij}\varepsilon_{ij}-\sigma_{s}-\tilde{D}\lambda-h(\lambda)\leqslant 0 \tag{1.11}$$

由于简单加载过程只考虑等向强化，其硬化规律可作线性化处理[2]：

$$h(\lambda)=\bar{h}\cdot\lambda$$

于是式(1.11)可表示成

$$f=w_{ij}\varepsilon_{ij}-\sigma_{s}-(\tilde{D}+\bar{h})\lambda\leqslant 0 \tag{1.12}$$

其中λ为流动参数，其各个分量λ_a满足

$$\lambda_a\begin{cases}\geqslant 0, & \text{当} f_a=0\text{时}\\ =0, & \text{当} f_a<0\text{时}\end{cases} \tag{1.13}$$

$a=1,2,\cdots,m$（m为构成塑性势面的个数）.

因此，全量应变ε_{ij}线性的屈服条件为

$$(\tilde{D}+\bar{h})\lambda-w^{T}\varepsilon(u)+\sigma_{s}\geqslant 0 \tag{1.14}$$

$$\lambda_a[(\tilde{D}+\bar{h})\lambda-w^{T}\varepsilon(u)+\sigma_{s}]=0 \tag{1.15}$$

在塑性全量理论中，平衡方程、边界条件、协调条件为

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0 \tag{1.16}$$

$$\sigma_{ij}\cdot n_j=p_i,\qquad \text{在}\Gamma_p\text{上} \tag{1.17}$$

$$u_i=u_i^{0},\qquad \text{在}\Gamma_u\text{上} \tag{1.18}$$

$$\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2 \tag{1.19}$$

最后得到了塑性全量理论的全套方程(1.14)～(1.19).

二、等价的变分不等式模式

在以下的讨论中，取位移$u_i(i=1,2,3)$作状态变量，流动参数λ作为系统的控制变量。因此在下面的空间中讨论该问题。

$$H_1^1(\Omega)=\{u|u\in H_1(\Omega),\ u|_{\Gamma_u}=u^\circ\},\ H_1(\Omega)\text{——Sobolev空间}$$

$$H_1^0(\Omega)=\{u|u\in H_1(\Omega),\ u|_{\Gamma_u}=0\}$$

$$\bar{H}_1^1(\Omega)=[H_1^1(\Omega)]^3,\ \bar{H}_1^0(\Omega)=[H_1^0(\Omega)]^3$$

$$\bar{L}_2(\Omega)=[L_2(\Omega)]^m,\ L_2(\Omega)\text{——Hilbert空间}$$

$$\tilde{K}=\{\{u,\lambda\}|\{u,\lambda\}\in\bar{H}_1^1(\Omega)\times\bar{L}_2(\Omega),\lambda_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots,m\}$$

于是得到与式(1.14)～(1.19)相等价的变分不等式提法：

求$\{u,\lambda\}\in\tilde{K}$，使得

$$a(u,v-u)-b(v-u,\lambda)+c(\lambda,r-\lambda)-b(u,r-\lambda)+j(r-\lambda)\geqslant L(v-u)\qquad\forall\{v,r\}\in\tilde{K}\tag{2.1}$$

其中
$$a(u,v)=\int_\Omega\varepsilon^T(u)D\varepsilon(v)d\Omega$$

$$b(u,\lambda)=\int_\Omega\sum_{\alpha=1}^m\varepsilon^T(u)w\cdot\lambda_\alpha d\Omega$$

$$c(\lambda,r)=\int_\Omega\sum_{\alpha,j}^m\lambda_\alpha(\tilde{D}+\tilde{h})r_jd\Omega$$

$$j(r)=\int_\Omega\sum_\alpha^m r_\alpha\sigma_s d\Omega$$

$$L(v)=\int_\Omega v^Tfd\Omega+\int_{\Gamma_p}v^Tpd\Gamma$$

下面证明式(1.14)～(1.19)与式(2.1)相等价。

1. 假设$\{u,\lambda\}\in\bar{H}_1^1(\Omega)\times\bar{L}_2(\Omega)$，式(1.14)～(1.19)成立。

根据虚功原理，由式(1.16)～(1.19)知在所有满足式(1.18)、(1.19)条件的可能位移场中有

$$\forall\omega\in\bar{H}_1^0(\Omega),\int_\Omega\varepsilon^T(\omega)D[\varepsilon(u)-R\lambda]d\Omega=\int_\Omega\omega^Tfd\Omega+\int_{\Gamma_p}\omega^Tpd\Gamma\tag{2.2}$$

即

$$a(u,\omega)-b(\omega,\lambda)=L(\omega),\qquad\forall\omega\in\bar{H}_1^0(\Omega)\tag{2.3}$$

令 $v=u+\omega\in\bar{H}_1^1(\Omega)$

则得
$$a(u,v-u)-b(v-u,\lambda)=L(v-u)\tag{2.4}$$

由式(1.14)、(1.15)可得

$$\int_\Omega\sum_\alpha\left(\sum_j(\tilde{D}+\tilde{h})\lambda_j+\varepsilon^T(u)w+\sigma_s\right)(r_\alpha-\lambda_\alpha)\geqslant 0\tag{2.5}$$

$$\forall r_\alpha\geqslant 0\qquad(\alpha=1,2,3,\cdots,m)$$

即得

$$c(\lambda,r-\lambda)+b(u,r-\lambda)+j(r-\lambda)\geqslant 0 \tag{2.6}$$

将式(2.4)和式(2.6)相加即得

$$a(u,v-u)-b(v-u,\lambda)+c(\lambda,r-\lambda)+b(u,r-\lambda)+j(r-\lambda)\geqslant L(v-u)$$
$$\forall\{v,r\}\in\tilde{K}$$

2. 假设式(2.1)成立.

对任意的$\omega\in \mathring{H}_1(\Omega)$，在式(2.1)中取$\{v,r\}=\{u\pm\omega,\lambda\}\in\tilde{K}$，有

$$a(u,\pm\omega)-b(\pm\omega,\lambda)\geqslant L(\pm\omega) \tag{2.7}$$

即可得到

$$a(u,\omega)-b(\omega,\lambda)=L(\omega) \tag{2.8}$$

即为式(2.2)，因此不难得到式(1.16)～(1.19).

再由式(2.8)有

$$a(u,v-u)-b(v-u,\lambda)=L(v-u) \tag{2.9}$$

代入式(2.1)，可得

$$c(\lambda,r-\lambda)+b(u,r-\lambda)+j(r-\lambda)\geqslant 0 \tag{2.10}$$

在式(2.10)中取$r=2\lambda\in\tilde{L}_2(\Omega)$，$r=0\in\tilde{L}_2(\Omega)$，则

$$c(\lambda,\lambda)+b(u,\lambda)+j(\lambda)=0 \tag{2.11}$$

代回到式(2.10)中，有

$$c(\lambda,r)+b(u,r)+j(r)\geqslant 0 \tag{2.12}$$

写出具体形式即为：

$$\int_\Omega\sum_a\Big(\sum_j(\tilde{D}+\tilde{h})\lambda_j+\varepsilon^T(u)w+\sigma_s\Big)r_a\geqslant 0 \tag{2.13}$$
$$\forall r\in\tilde{L}_2(\Omega),\ r_k\geqslant 0\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

由$r_k\geqslant 0$的任意性可得

$$\sum_j(\tilde{D}+\tilde{h})\lambda_j+\varepsilon^T(u)w+\sigma_s\geqslant 0 \tag{2.14}$$

上式即为式(1.14)，至于$r_k\geqslant 0$自然是成立的.

又由式(2.11)得

$$\int_\Omega\sum_a\lambda_a\Big(\sum_i(\tilde{D}+\tilde{h})\lambda_j+\varepsilon^T(u)w+\sigma_s\Big)=0 \tag{2.15}$$

因为$\lambda_k\geqslant 0$，故由式(2.14)、(2.15)可得

$$\lambda_a\Big(\sum_j(\tilde{D}+\tilde{h})\lambda_j+\varepsilon^T(u)w+\sigma_s\Big)=0 \tag{2.16}$$

即式(1.15)成立.

等价性证明完毕.

三、势能极值形式及解析算例

对于Mises屈服准则，不难推出式(2.1)等价于

求

$$J(u,\lambda)=\min_{\{v,r\}\in\tilde{K}}[J(v,r)] \tag{3.1}$$

其中

$$J(v,r)=\frac{1}{2}a(v,v)+\frac{1}{2}c(r,r)-b(v,r)+j(r)-L(v)$$

由于$\tilde{K}$是一个闭凸集，而本问题的目标函数是一个凸函数，因此式(3.1)是一个凸规划问题.

例1 对于截面为A的试件作压缩试验(如图1)，上压板上连接一个刚度为K的弹性环，试件的应力应变关系如图2，其中E_0，E_1分别表示弹性阶段和强化阶段的弹性模量，$E_1>0$，$E_1=0$，$E_1<0$分别代表硬化、理想、软化材料.

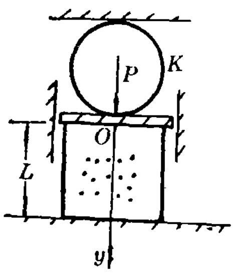

图1 压缩试验示意图

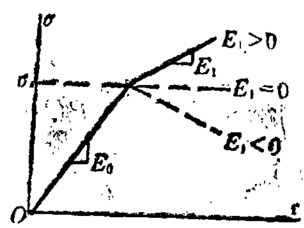

图2 试件应力应变关系

设材料服从Mises屈服准则，本例中$w_{ij}=E_0$，$\tilde{D}=E_0$. 服从的强化规律为

$$dK=\frac{E_0E_1}{E_0-E_1}\lambda,\ \text{即}\ \tilde{h}\lambda=\frac{E_0E_1}{E_0-E_1}\lambda \tag{3.2}$$

于是

$$J(u,\lambda)=\int_0^L\int_A\frac{E_0}{2}\varepsilon^2dAdy-\int_0^L\int_AE_0\lambda\varepsilon dAdy-\left[Pv_0-\frac{1}{2}Kv_0^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^L\int_A\frac{E_0^2}{E_0-E_1}\lambda^2dAdy+\int_0^L\int_A\sigma_s\lambda dAdy \tag{3.3}$$

其中 $v_0=v|_{y=0}$

选取位移函数$v=v(y)=\xi(L-y)$，满足$v(L)=0$. 则有

$$J(u,\lambda)=\frac{1}{2}E_0\xi^2AL-E_0\xi\lambda AL-P\xi L+\frac{1}{2}KL^2\xi^2+\frac{1}{2}\frac{E_0^2}{E_0-E_1}\lambda^2AL$$
$$+\sigma_s\lambda AL \tag{3.4}$$

J在$\lambda\geqslant0$的条件下取最小，应满足Kuln-Tucker条件[6]即

$$\left.\begin{array}{l}\partial J/\partial\xi=0\\ \partial J/\partial\lambda=0,\ \text{当}\lambda>0\text{时}\\ \partial J/\partial\lambda\geqslant0,\ \text{当}\lambda=0\text{时}\end{array}\right\} \tag{3.5}$$

于是可得

$$\xi=\frac{E_0A\lambda+P}{EL+E_0A} \tag{3.6}$$

$$-\frac{E_0^2A\lambda+E_0P}{KL+E_0A}+\frac{E_0^2}{E_0-E_1}\lambda+\sigma_s=0,\ \lambda>0 \tag{3.7}$$

$$-\frac{E_0^2A\lambda+E_0P}{KL+E_0A}+\frac{E_0^2}{E_0-E_1}\lambda+\sigma_s\geqslant0,\ \lambda=0 \tag{3.8}$$

引入松驰变量$\nu\geqslant0$，式(3.7)、(3.8)可化为

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{E_0^2 A\lambda+E_0P}{KL+E_0A}+\dfrac{E_0^2}{E_0-E_1}\lambda+\sigma_s-\nu=0 \\ \nu\lambda=0,\ \nu\geqslant0,\ \lambda\geqslant0\end{array}\right\} \tag{3.9}$$

由λ，ν的互补性可知

当$\lambda=0$时，$\nu=\sigma_s-\dfrac{E_0P}{KL+E_0A}>0$，即$P<\sigma_s(A+KL/E_0)$；

当$\nu=0$时，$\lambda=\dfrac{(E_0-E_1)(E_0P-\sigma_s(E_0A+KL))}{E_0^2(E_1A+KL)}\geqslant0$.

由此可得解：

当$P<\sigma_s(A+KL/E_0)$时，$\lambda=0$，属弹性解.

$$\varepsilon=\xi=\frac{P}{KL+E_0A} \tag{3.10}$$

$$v=\xi(L-y)=\frac{P(L-y)}{KL+E_0A} \tag{3.11}$$

$$\sigma=E_0\varepsilon=\frac{PE_0}{KL+E_0A} \tag{3.12}$$

当$P\geqslant\sigma_s(A+KL/E_0)$时，$\lambda>0$，为塑性解

$$\varepsilon=\xi=\frac{P-(1-E_1/E_0)A\sigma_s}{E_1A+KL} \tag{3.13}$$

$$v=\xi(L-y)=\frac{[P-(1-E_1/E_0)A\sigma_s][L-y]}{E_1A+KL} \tag{3.14}$$

$$\sigma=E(\varepsilon-\lambda\partial f/\partial\sigma)=\frac{E_0E_1P+KL(E_0-E_1)\sigma_s}{E_0^2(E_1A+KL)} \tag{3.15}$$

对于软化材料$(E_1<0)$，为保证解存在唯一，应有$K>-E_1A/L$.

四、全量理论的有限元解

本节运用上面所推的变分不等式对分段线性强化问题进行有限元求解. 将物体Ω进行剖分，单元总数为N_e，其中弹塑性单元为$N_1(N_1\leqslant N_e)$. 假定一个弹塑性单元只能有一种弹性或塑性状态，第e个单元的强化规律由L_e $(L_e\geqslant1)$ 折线组成（图 3)，那么系统共有$L=\sum_{e=1}^{N_1}L_e$个状态方程.

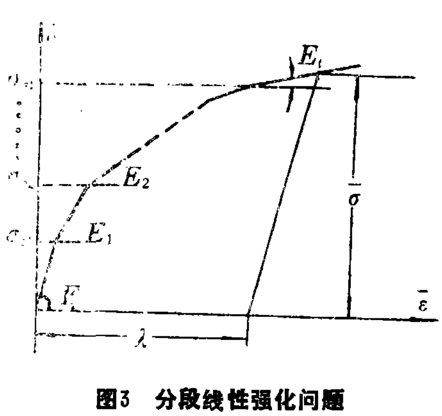

图3 分段线性强化问题

对式(2.1)进行有限元离散，引进位移形函数N和算子B，分别对u和ε用节点位移δ插值，对v用节点位移φ插值，

$$u=N\delta,\quad \varepsilon(u)=B\delta$$
$$v=N\varphi,\quad \varepsilon(v-u)=B(\varphi-\delta)$$

就得到

$$[\varphi-\delta]^T[K\delta-C^T\lambda-t]+[r-\lambda]^T[U\lambda-C\delta+d]\geqslant 0 \tag{4.1}$$

其中

$$K=\sum_{e=1}^{N_e}\int_{\Omega^e}B^TDBd\Omega$$

$$t=\sum_{e=1}^{N_e}\left\{\int_{\Omega^e}N^Tfd\Omega+\int_{\Gamma^e}N^T\bar{P}d\Gamma\right\}$$

$$C=\sum_{e=1}^{N_1}\int_{\Omega^e}\begin{bmatrix} w_x & w_y & w_z & w_{xy} & w_{yz} & w_{zx} \\ w_x & w_y & w_z & w_{xy} & w_{yz} & w_{zx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_x & w_y & w_z & w_{xy} & w_{yz} & w_{zx} \end{bmatrix}Bd\Omega$$

$$U=\sum_{e=1}^{N_1}\int_{\Omega^e}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1L_e} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2L_e} \\ \vdots & \vdots & & \\ m_{L_e1} & m_{L_e2} & \cdots & m_{L_eL_e} \end{bmatrix}d\Omega$$

$$m_{\alpha\beta}=\tilde{D}+\frac{E_{\alpha-1}E_\alpha}{E_{\alpha-1}-E_\alpha}\delta_{\alpha\beta}$$

$$d=\sum_{e=1}^{N_1}\int_{\Omega^e}\{\sigma_{s1},\sigma_{s2},\cdots,\sigma_{sL_e}\}^Td\Omega$$

$$\lambda=\{\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots\lambda_{L_1}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{L_2}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(N_1)},\lambda_2^{(N_1)},\cdots,\lambda_{LN_1}^{(N_1)}\}^T$$

以上 K, t 分别是弹性刚阵和荷载向量，C, U, d 分别称为约束阵、强化阵和宽余向量.

对于式(4.1)，由$\{\varphi,r\}$的任意性可得

$$\begin{cases} K\delta-C^T\lambda-t=0 & (4.2) \\ U\lambda-C\delta+d\geqslant 0 & (4.3) \end{cases}$$

引入松弛变量 $\nu=\{\nu_1^{(1)},\nu_2^{(2)},\cdots,\nu_{L_1}^{(1)},\cdots,\nu_1^{(N_1)},\nu_2^{(N_1)},\cdots\nu_{LN_1}^{(N_1)}\}^T$可得

$$\left.\begin{array}{l} K\delta-C^T\lambda-t=0 \\ C\delta-U\lambda-d+\nu=0 \\ \lambda^T\nu=0, \qquad \nu\geqslant 0,\lambda\geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

这是一个自由变量的二次规划问题，其形式与塑性增量理论的公式[2]完全相同。可以按二次规划法中线性互补问题的Lemke 算法求解[5]。采用此算法，只需一步加载，不需迭代即可得解.

例2 无限长厚壁圆筒受内压作用(图4)，按理想弹塑性问题计算，$\sigma_s=240$MPa, $E=200$GPa, $R_1=5$cm, $R_2=15$cm.

沿半径方向分 20 个八节点轴对称等参单元，用本文算法计算的塑性区与弹性区交界半径ρ与理论解完全一致，内壁($R=5$cm) 处的径向位移值如表1.

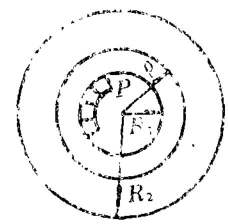

图4 受内压作用的无限长厚壁圆筒

表 1 $R=5$cm**处的径向位移值**（单位 cm）

P (MPa)		-20.000	-144.557	-174.620	-198.667	-233.022
ρ (cm)		弹性	6.000	7.000	8.000	10.000
$\mu=0.25$	理论解	0.0007422	0.0058413	0.0082965	0.0112958	0.0188590
	本文解	0.0007464	0.0059182	0.0083141	0.0111862	0.0181073
$\mu=0.45$	理论解	0.0008247	0.0063664	0.0087456	0.0115294	0.0182953
	本文解	0.0008296	0.0064703	0.0088072	0.0114894	0.0177198

例3 截面为矩形的试件受刚性压条作用（图5），物理性质和试件尺寸见图（为便于比较，所取数据单位与文[7]一致），假设压条和试件接触完全粗糙，所用材料假定为理想弹塑性并服从Mises屈服准则.

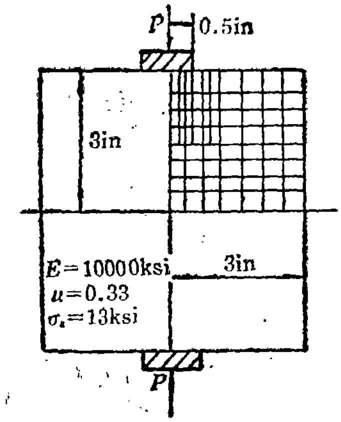

图5 受刚性压条作用的试件

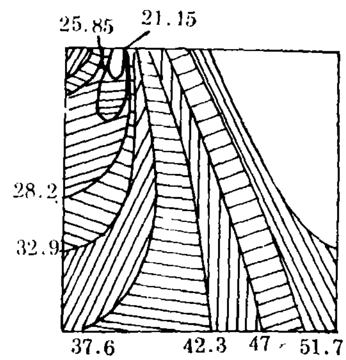

图6 塑性区的发展情况

由于试件对称，取其四分之一截面划分单元（图5），图6为塑性区随 P 增加而发展的情况. 首先进入屈服的是靠近压条边缘处，图7为P-δ曲线，所得解与文[7]用三角形单元计算的解很相近，但文[7]采用了274个三角形单元，120多个增量步，而本文只采用了68个四节点单元，仅46次基交换即得解，由此可见本文在精度、收敛性方面的优越性.

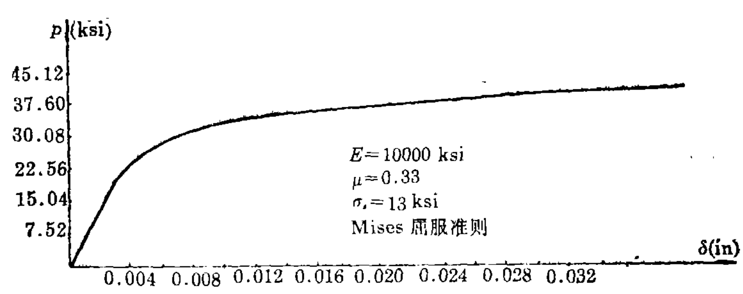

图7 P-δ曲线（载荷中心线处）

参 考 文 献

[1] 王仁等，《塑性力学基础》，科学出版社，北京（1982）.

[2] 郭小明，弹塑性问题的变分不等式模式及其二次规划解，东南大学硕士论文（1990）.

[3] 张柔雷，塑性全量理论中的控制变量变分原理，上海力学，10(4)(1989)，45—53.
[4] Lions, J. Variational inequality, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 20 (1967), 493—519.
[5] 张柔雷，二次规划问题的两步算法，计算结构力学及其应用，4(4)(1987)，71—75.
[6] 程耿东，《工程优化设计基础》，水利电力出版社 (1984).
[7] Chen, W. F., *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, Amsterdam (1975).

The Variational Inequality Formulation for the Deformation Theory in Plasticity and Its Non-Iterative Solution

Guo Xiao-ming She Ying-he

(Southeast University, Nanjing)

Abstract

In this paper, the deformation theory in plasticity is formulated in the variational inequality, which can relax the constraint conditions of the constitutive equations. The new form makes the calculation more convenient than general energy forms and have reliable mathematical basis. Thus the plasticity theory may be solved by means of the quadratic programming instead of the iterative methods, and the solutions can be made in one step without any diversion of the load.

Key words deformation theory in plasticity, variational inequality, quadratic programming