A. 产用品子馆 法利益 4-1月

and the second states of the

湍流边界层底层相干结构的一个理论模型。

罗纪生 周恒

(天津大学力学系, 1992年5月25日收到) 自动控制 计正行相关下 地毯建设 4月

1.1.2 而然是於何處從自然的推測也像是一些一個的是你的是一些強笑。

本文采用非线性稳定性分析方法,研究了湍流边界层底层相干结构的成因,计算得到的增长 **最快**的不稳定波的展向尺度与纵向尺度都与实验相符。这一分析的特点是采用了不同于湍流平均 速度剖面的更合理的速度剖面作为稳定性分析的基础,并采用了新的非线性理论。文中结果有助 于理解湍流边界层底层相干结构前拟有序现象。

关键词 相干结构 共振三波 幅值演化

2. 単身に長いていなどを認いましたであり、

湍流边界层底层的相干结构与湍流边界层中湍流动能的产生有着密切的关系。对相干结 构产生、演化机理的研究将有助于对相干结构起源及性质的理解,并可为建立更合理的边界 层湍流模式提供依据。

Blackwelder¹¹ 在总结了前人工作的基础上曾指出,湍流边界层底层的相干结构,至 少在好几方面与层流边界层转捩区域成微凹平板上的不稳定波有类似的地方。Jang 等音采 用准层流模型,并假设基本流是湍流边界层平均速度,利用 Benney¹³的 直接共振概念, 研究了扰动波频率的选择性问题。得到了与实验近似的条纹结构参数。但这一模型只能给出 单一的波参数,而在实验中慢速条纹的参数分散性是很大的。而且,该模型给出的纵向涡的 衰减率很大,这也与实验不符。周恒半也用同样的基本流,研究了底层的相干结构。结果发 现,线性理论不能给出不稳定波,而非线性的共振三波理论给出的产生不稳定波的最小阈值 与实际情况不符。如果仅用一对三维波,所得到的具有最小阈值的波的展向尺度与实验是一 致的,但纵向尺度差距较大,本文也利用流动稳定性理论,并采用一种复合的基本流速度剖 面,建立湍流边界层底层相干结构的理论模型。

另外,最近周恒¹⁵的研究表明,流动稳定性原有的弱非线性理论没有很大的缺点,该理 论中,高次谐波及平均流的修正项都被认为是保形的,而在实际的演化过程中,其形状是变 化的,如果还用原来的弱非线性理论,则与实际情况出入甚大,因此,本文不再采用原弱非 线性理论的保形假设,而考虑高次谐波的形状变化,把高次谐波化为初、边值问题来解的。

* 国家自然科学基金及教委优秀青年教师基金资助项目.

二、基本流速度分布

在 Jang等²²和周恒¹⁴的理论模型中,基本流速度分布采用的都是湍流边界层平均速度 分布,所得结果都与实验不太相符。我们认为可能的原因之一是所采用的基本流不合理。在 用流动稳定性研究相干结构时,相干结构被认为是一种不稳定波,而基本流应该是不存在这 种波时的平均流。可以没想,如论在湍流边界层的底层不存在猝发现象,则底层的雷诺应力 显然会小得多,速度剖面就一定没有湍流边界层平均速度 剖 面 那 么 饱 满, Blackwelder 等。63台出的猝发期间的相位平均速度剖面,在底层处,大部分时间内较湍流平均速度剖面饱 满.这就从实验的角度证实了在猝发周期以外的时间,速度的平均剖面不如湍流平均速度饱 满,而相干结构或者说不稳定波则是在这种不太饱满的速度分布下发生、发展的,也正是相 干结构的增长,发展,形成了猝发过程,才使原来不太饱满的剖面变得饱满起来,从而达到 充分发展的程度,湍流边界层平均速度剖面正是这种活跃期和相对平静期剖面平均的结果,在 平板湍流边界层中,导致猝发的相干结构主要集中于边界层底层约为0.05个边界层厚度以 内。在这个范围内,如果不在猝发期内,雷诺应力很小,应是粘性起主要作用。因此,层流 边界层方程可以应用于这一薄层内,从而一种可能的近似基本流分布可以是经平板法向坐标 压缩了的 Blasius 速度分布,在这个范围以外,才是湍流边界层 平均 速度 剖 面,变形的 Blasius 速度分布和湍流边界层平均速度分布在某个合适的位置连接起来, 就构成了研究流 动不稳定性的基本流速度分布,作为理论模型,本文正是采用这样的复合速度分布来研究湍 流边界层底层的相干结构的.

本文中湍流边界层的平均速度采用 Spalding 速度分布,记为 u_s(见White⁷),将 Blasius 速度分布 u_b,在法向y上进行压缩,并改变其大小,使得u_b在y_v处与 u_s接起来,在 0<y<m内用修正后的 u_b,在 y₁<y<y_n用 u_s,设 u_c为u_b值的改变量,k_c为法向坐标的压缩 量,则连接的条件是速度及其一阶导数连续,即:

$$u_{c} \cdot u_{B} \begin{pmatrix} y_{l} \\ k_{c} \delta \end{pmatrix} = u_{s} \begin{pmatrix} 1/l \\ \delta \end{pmatrix}$$
$$u_{c} \cdot u_{B}' \begin{pmatrix} y_{l} \\ k_{c} \delta \end{pmatrix} = k_{c} \cdot u'_{s} \begin{pmatrix} y_{l} \\ \delta \end{pmatrix}$$

对于给定的 yu, 可求出 ue和ke, 但速度的二阶导数在 u处并不连续、为此, 作局部光滑化,

$$\Leftrightarrow \qquad g = \frac{1}{2} \left[k_c^2 u_{\bullet}''(y_l/\delta) - u_c u_B''(y_l/k_c \cdot \delta) \right]$$

则*g* ≠ 0.

选拟合函数 $f = \exp\left[-a\left(\frac{y-y_{l}}{k_{c}\delta}\right)^{2}\right]$, 当 $y = y_{l}$ 时,它衰减 很快,最后选取复合速度的表达式为

$$u_{l} = \begin{cases} u_{o}u_{B}\left(\frac{y}{k_{c}\delta}\right) + g \int_{0}^{y} \int_{0}^{y} fd\left(\frac{y}{k_{c}\delta}\right) d\left(\frac{y}{k_{c}\delta}\right) & (0 < y < y_{l}) \\ u_{s}\left(\frac{y}{\delta}\right) - g \int_{0}^{y} \int_{0}^{y} fd\left(\frac{y}{k_{c}\delta}\right) d\left(\frac{y}{k_{c}\delta}\right) & (y_{l} < y < y_{n}) \end{cases}$$

$$(2.1)$$

由于相干结构主要存在于底层厚约 100l⁺左右的范围内,这里 l⁺ 是摩擦长度。因此,在本文的计算中y⁺定在100左右,可以调整,而y⁺取为300l⁺。

为了使结果更可信,本文还考虑了介于复合速度 ou 与湍流边界层平均速度 os 之间的情况,其速度表达式为:

$$u = u_s + \exp\left[-k\left(\begin{array}{c}y\\y_{l}\end{array}\right)^2\right](u_l - u_s)$$

当k=0时,u就是上述的复合速度分布,当k不为零时,u就介于ui与us之间。

三、扰动方程及幅值演化方程

"谈流向x,平板法向y,展向z的流速分量分别为u,v,w,(或用向量u表示),由于考虑 的是猝发产生前的问题,雷诺应力很小,故可采用层流模型.设瞬时速度可分解为基本流项 和表示相干结构的扰动项.

$$\mathbf{u} = \mathbf{\hat{u}} + \mathbf{\tilde{u}} \tag{3.1}$$

采用平行流假设,则 $\mathbf{u} = (\mathbf{u}(y), 0, 0), \mathbf{u}(y)$ 为上节的复合速度.这样扰动项满足的无量纲 涡量方程为

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{R} \nabla^2 \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) + \bar{u}' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{u}' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \bar{u}'' \tilde{v}$$

$$= - \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} \right) \right]$$

$$(3.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{R} \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \bar{u}' \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$= - \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{w} - \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v}) \right]$$
(3.2b)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{R} \nabla^2 \right) \left(-\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) + \bar{u}' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$$= - \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{u} \cdot \nabla \bar{u} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{u} \cdot \nabla \bar{w} \right) \right]$$

$$(3.2c)$$

(3.2a)对x求导,(3.2b)对z求导,并利用连续性方程,可得到砂满足的方程式:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R} \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} - \bar{u} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \nabla^2 \bar{v} + \bar{u}'' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$
$$= \nabla^2 (\bar{u} \cdot \nabla \bar{v}) - \frac{\partial}{\partial y} [\nabla \cdot (\hat{u} \cdot \nabla \bar{u})]$$
(3.3)

这样方程(3.3), (3.2c)以及连续方程构成了求解v, ũ, む的三个方程。

作为非线性分析的出发点,线性问题,可以设扰动速度有行进波的形式,即设

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = [u(y), v(y), w(y)] \exp[i(ax + \beta z - \omega t)]$$
(3.4)

代入(3.3), (3.2b)和连续性方程,并略去非线性项可得

$$L_0(\alpha, \beta, \omega)v(y) = 0 \tag{3.5a}$$

$$L_1(a, \beta, \omega)[i\beta u(y) - iaw(y)] = i\beta \tilde{u}' v(y)$$
(3.5b)

$$iau(y) + i\beta\omega(y) = -Dv(y)$$
(3.5c)

其中

$$L_0(\alpha, \beta, \omega) = \left[\frac{1}{i_{\mathcal{I}}} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 - i(\alpha u - \omega) (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i\alpha \overline{u}'' \right]$$

$$L_1(\alpha, \beta, \omega) = \left[\frac{1}{d} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) - i(\alpha u - \omega) \right]$$
$$D = \frac{d}{dy}$$

v(y)满足的是一个齐次方程,a, β 为流向和展向波数,设为实数,对二维情况 β 为零, ω 为频率,设为复数,记为 $\omega = \omega r + i\omega$;

按处理非线性问题的共振三波理论,基本波由满足线性问题的一个二维波和一对三维波 组成,即

$$\mathbf{\bar{u}}_1 = A\mathbf{u}_1 \exp[i\theta_1] + B_1\mathbf{u}_2 \exp[i\theta_2]$$

$$+B_{s}\mathbf{u}_{s}\exp[i\theta_{s}]+c_{c}c$$

其中 $\theta_1 = a_1 x - \omega_{1r}$, $\theta_2 = a_2 x + \beta z - \omega_{2r} t$, $\theta_3 = a_2 x - \beta z - \omega_{2r} t$, 并要求满足共振条件

 $\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$

c c表示共轭项.在通常用共振三波处理问题时还 要求 ω_{1r}=ω_{2r}=0,这表示基本波应处于 中性状态,但根据罗纪生³⁸的方法,在利用可解条件求解幅值演化方程系数时,不需要这个 条件.这也就是说,在扰动波之间发生共振时,并不要求其幅值是不变的.因而这个条件是 可以放弃的.对于线性情况,取复幅值为

> $A = a_0 \exp[i\theta_{00}] \exp[\omega_{1r}t]$ $B_1 = b_{10} \exp[i\theta_{10}] \exp[\omega_{2r}t]$ $B_2 = b_{20} \exp[i\theta_{20}] \exp[\omega_{2r}t]$

其中 a_0, b_{10}, b_{20} 为扰动波的初始幅值, $\theta_{00}, \theta_{10}, \theta_{20}$ 为扰动波的初始相位.这样,幅值的 演化方程为

$$\frac{dA}{di} = \omega_{1i}A; \quad \frac{bB_1}{dt} = \omega_{2i}B_1, \quad \frac{dB_2}{dt} = \omega_{2i}B_2$$
(3.6)

为了研究非线性的演化情况,把ǔ1代入(3.3)(3.2c)右边的非线性项中,可得到二次 谐 波满足的方法的非齐次项。根据非线性项的性质,二次谐波的一般形式可写为。

$$\begin{split} \tilde{\mathbf{u}}_2 &= A^2 \mathbf{u}_{11} \exp[i2\theta_2] + B_1^2 \mathbf{u}_{22} \exp[i2\theta_2] + B_2^2 \mathbf{u}_{33} \exp[i2\theta_3] \\ &+ AB_1 \mathbf{u}_{12} \exp[i(\theta_1 + \theta_2)] + AB_2 \mathbf{u}_{13} \exp[i(\theta_1 + \theta_3)] \\ &+ B_1 B_2 \mathbf{u}_{23} \exp[i(\theta_2 + \theta_3)] + A\overline{B}_1 \mathbf{u}_{1B} \exp[i(\theta_1 - \theta_2)] \\ &+ A\overline{B}_2 \mathbf{u}_{10} \exp[i(\theta_1 - \theta_3)] + B_1 \overline{B}_2 \mathbf{u}_{20} \exp[i(\theta_2 - \theta_3)] \\ &+ A\overline{A} \mathbf{u}_{1A} + B_1 \overline{B}_1 \mathbf{u}_{2B} + B_2 \overline{B}_2 \mathbf{u}_{30} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{split}$$

由于 θ₁, θ₂, θ₃满足共振条件,所以两个三维波相互作用,可以产生一个与二维基本波 参数一致的波,而二维基本波与一个三维基本波作用,也可产生与另一个三维基本波参数一 致的波.在ũ₂中,u₂₃就是两个三维基本波作用产生的二维波,其参数与二维基本波一致.u₁, u₁ σ 是 由二维基本波分别与两个三维基本波作用产生的与另一个三维基本波参数一致的波, 在求解u₂₃, u₁, u₁ σ时,利用只解条件,就可以定出 A, B₁, B₂,满足的精确到二阶量的方 程,即

$$\frac{dA}{dt} = \omega_{1t}A + A_{23}B_{1}B_{2}
\frac{dB_{1}}{dt} = \omega_{2t}B_{1} + A_{1c}A\bar{B}_{2}
\frac{dB_{2}}{dt} = \omega_{2t}B_{2} + A_{1B}A\bar{B}_{1}$$
(3.7)

v23, **v**18, **v**10对应的方程式的非齐次项也有相应的变化。

方程(3.7)就是通常共振三波方法得到的精确到二阶量的幅值演化方程,其中包含了基本波之间产生共振的影响,但还没有包含基本波自身的非线性影响,为了考虑这一点,还要求解出二次谐波的各项,再利用可解条件,求出精确到更高一阶的幅值演化方程.

在二次谐波的求解中,本文放弃了保形性的假设,设二次谐波是从零开始演化起来的.这 样ú2中的各次ui3就不只是9的函数,而且还与时间 * 有关. ui3所满足的是一个同时要满足初 始条件及边界条件的偏微分方程式. 求出ui3之后,把基本波站和二次谐波 ū2 再代入(3.3)和 (3.2c)的非线性项中,可得到三次谐波满足的方程,利用可解条件,就可确定包含基本波自 身非线性作用影响的幅值演化方程的系数。精确到三阶量的幅值演化方程有如下形式.

$$\frac{dA}{dt} = \omega_{1i}A + A_{22}B_{1}B_{2} + [A_{00}a^{2} + A_{01}(b_{1}^{2} + b_{2}^{2})]A
\frac{dB_{1}}{dt} = \omega_{2i}B_{1} + A_{10}A\bar{B}_{2} + [A_{10}a^{2} + A_{11}b_{1}^{2} + A_{12}b_{2}^{2}]B_{1}
\frac{dB_{2}}{dt} = \omega_{2i}B_{2} + A_{1B}A\bar{B}_{1} + [A_{10}a^{2} + A_{12}b_{1}^{2} + A_{11}b_{2}^{2}]B^{2}$$
(3.8)

其中a = |A|, $b_1 = |B_1|$, $b_2 = |B_2|$, 并考虑到 $u_2 = |u_3|$ 之间的关系. 方程(3.8)与原来的 弱非 线性理论所给的方程根本不同之处是其系数不再是常数, 这是因为 u_2 表达式中的 u_{ij} 不再单 纯是y的函数而且还依赖于时间t的缘故.

由幅值方程(3.8)可以推出以下结论,如果 $b_1 = b_2$ 的初始值相等,即 $b_{10} = b_{20} = b_0$,则 $b_1 = b_2$ 始终相等。可令 $b = b_1 = b_2$ 。在此前提下,幅值a, b的演化,除了与R, a_1 , a_2 , β , ω_1 , ω_2 有关外,只与初始幅值 a_0 , b_0 以及初始相位差 $\theta_0 = \theta_{00} - \theta_{10} - \theta_{20}$ 有关。

四、计算结果

本文针对雷诺数 $R_{r} = u_{\infty} \delta/v = 50000$ 的情况进行了系统的计算,其中 u_{∞} 为自由来流速度, δ 为湍流边界层名义厚度。在本文中,速度的无量纲量为 u_{∞} ,长度的无量纲量为经 y 方向压缩后的 Blasius 边界层排移厚度 δ_{l} 。图 1 给出了连接位置 y^{\dagger} 为 100 时,复合速度的分布,为了比较,还同时给出了 Spalding 速度分布。

本文针对二维基本波初始幅值为0.005,三维基本波初始幅值为0.001进行了计算,图 2 至图 7 给出了连接位置y[†]为 80,100,120,相位差 θ_0 为零时,二维基本波幅值a,和三维 基本波幅值 b 随时间的演化结果,以及当无量纲时间 t 为10时,a,b随波数a₂的变化曲线.



 $x_{1}^{+} = 100$



图2, 4, 6为a, b随时间的演化情况。

图3, 5, 7, 为t=10时, a, b随a2的变化情况。

由图 2 至图 7 可以看出,二维波总的变化趋势是幅值在衰减,但衰减率很小,而对于三维波 来说一些 α 的值可以使幅值很快地增长起来,而另一些 α 则不能使幅值增长。这说 明 本 文 的理论模型对不稳定波的参数具有选择性,而且这种选择不是单一的,是波数空间的一个范 图。表 1 给出了三种连接情况中增长最快的三维波的展向尺度^λ, 纵向尺度^λ, 及t = 0时, 三 维波幅值的增长倍数b/b。

え		增大意识	增大意快的二年政的李叡,及其增长借载		
u ⁺	α_2	β	λ_{i}^{+}	λţ	<i>b/b</i> ₀
80	0.32	2.2356679	87.65	612.36	10.092
100	0.29	2.1919420	110.55	835.58	15.982
100	0.27	2.1630280	133.45	1069.12	22.783

从表 1 可以看出,当 $y_{\tau}^{\dagger}=100$ 时, $\lambda_{\tau}^{\dagger}\lambda_{\tau}^{\dagger}$ 都与实验值相符, $\lambda_{\tau}^{\dagger}\lambda_{\tau}^{\dagger}$ 随 y_{τ}^{\dagger} 的增大而增大,但仍 在实验的范围之内。

图 8 给出了 $y_1^{\dagger} = 100$, t = 10时 $\alpha_2 = 0.27$, 0.29, 0.32时三维基本波幅值与初始相位差 θ_0 的 关系,由图可知,三维基本波幅值在 $\theta_0 = 0.4\pi$ 时增长最快。图 9 给出了 $y_1^{\dagger} = 100$ 时,初始相 位差 $\theta_0 = 0.4\pi$ 时三维基本波幅值与 α_2 的关系,其中t = 10,由图 9 可以看到,在 θ_0 等于零时 增长最快的波当 $\theta_0 = 0.4\pi$ 时也增长得最快。



图10给出了 y[†]=100 复合基本流的变化对三维波幅值演化的影响,图11给出了不同波数 下基本流对三维基本波幅值演化的影响。





图11 不同波数下基本波对幅值演化的影响

由图10,11,可以看出,当 k 线大时,即速度分布越接近湍流平均速度分布,三维基本波的 增长率就越小.甚至可以使原来增长的三维波变为衰减的.还也许可以说明相干 结构 的产 生、发展,消失这一循环过程的机理.在相干结构产生之前,平均流速度分布接近于本文提 出的复合速度分布,由于背景扰动的存在,最易放大的三维波被放大了,幅值很快地增长起 来,最终形成猝发.这又使流速分布变为比湍流边界层平均流速度分布更**非**满的剖面,在这 种剖面下,所有波都是衰减的.当由于猝发产生的湍能传输开后,底层又恢复到粘性起主要 作用的状态,剖面又逐渐变为类似本文所采用的那种剖面,为另一次不稳定波的发生提供了 条件.

五、结 论

本文提出了一个新的概念,即在用流动稳定性理论研究底层相干结构时,应采用新的速度分布.这一概念的采用使计算得到的增长最快的波,其纵向尺度和展向尺度都与实验结果符合得很好,而且这一概念也有助于理解相干结构产生、发展、消失的循环过程.

从周恒、尤学一最近对弱非线性理论的研究结论看,本文所采用的修正的弱非线性理论 可以计算到 a 或 b 直到0.05的情况,但是还能解决 a 或 b 约为0.15的强非线性问题。所以不 稳定波的进一步发展以及如何形成猝发,还需要用别的方法进一步研究,还是值得考虑的问题。

参考文献

[1] Black welder, R. F., Phys. Fluids 26(1986), 2807.

[2] Jang, P. S., D. J. Benney, and R. L. Gran, J. Fluid Mech., (1986), 169, 109.

[3] Benney, D. J. and, L. H. Gustavsson, Stud. Appl. Math. 64(1981), 185.

[4] 周恒, 力学学报,20(1988), 481.

[5] 周恒,流动稳定性弱非线性理论的重新考虑,应用数学和力学,12(3)(1991),3.

[6] Blackw_lder, R. F. and R. E. Kaplan, J. Fluid Mech. 76(1976), 89.

[7] White, F. M., Viscous Fluid Flow, Mc GRAW-Hill Brook Company(1974).

A Theoretical Model of the Coherent Structure in the Wall Region of a Turbulent Boundary Layer

Luo Ji-sheng Zhou Heng

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tionjin)

Abstract

In this paper, the formation of the coherent structure in the wall region of a turbulent boundary layer was studied, using the nonlinear theory of the hydrodynamic instability. The spanwise wavelength and the streamwise wavelength of the most quickly amplified instability wave obtained by the calculation are in good agreement with the experiment, which makes the distinction of the calculation in this paper as the basis of the instability analysis, the more rational velocity profile was used, which is different from that of the turbulent mean flow and the new nonlinear theory was used. The result may be useful in understanding the quasi-ordering phenomena of the coherent structure in the turbulent boundary layer.

Key words coherent structure, resonant tried amplitude evolution

1.