应用数学和力学，第14卷 第 11 期（1993年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

# KdVB方程行波解的定量分析*

吕 咸 青

（山东教育学院数理系，1992年7月3日收到）

**摘 要**

本文利用数学分析的方法，研究了$\nu^2 \gg 4\mu$时KdVB方程的行波解．证明 KdVB 方程行波解与相应的 Burgers 方程行波解在定量方面的类似性．证明一般渐近展开式的截断误差是小参数 $\varepsilon$ 的高阶量．

**关键词** KdVB方程 渐近 行波

## 一、引 言

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial z}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=0 \tag{1.1a}$$

其中 $\nu>0$，$\mu>0$。

(1.1a)式简称为KdVB方程，它所对应的 Burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial z}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.1b}$$

方程(1.1a)能够描述许多的物理现象，在理论与应用方面都有很重要的地位。但其精确解析解是不可能求出的，因此，只能根据$\nu^2$与$4\mu$的大小比较关系分别给出相应的近似算法。当$\nu^2 \gg 4\mu$时，我们曾利用奇异摄动的理论和方法，对其行波解进行研究，发现长期项不出现[1]。基于这种现象，我们自然想到：用方程(1.1b)的解去近似方程(1.1a)的解，是否一致有效？本文对这个问题作了肯定的回答．并进一步证明此奇异摄动由于非线性项的作用，可以用正则摄动来解决。

## 二、渐近展开式的误差估计

在文献[1]中，我们得到KdVB方程行波解的直到三阶的渐近展开式的明确表达式。在此对其截断误差进行估计。

引入变量替换[1]

$$u=u(x)=u(z-\lambda t)$$

则方程(1.1a)与方程(1.1b)分别变为

* 钱伟长推荐

$$u^2-(u_\infty^-+u_\infty^+)u+u_\infty^-u_\infty^+=\omega u_x-\varepsilon\omega u_{xx} \tag{2.1a}$$

其中 $\varepsilon=\mu\omega/2\nu^2$

由于$\nu^2\gg 4\mu$，故$0<\varepsilon\ll 1$.

$$u^2-(u_\infty^-+u_\infty^+)u+u_\infty^-u_\infty^+=\omega u_x \tag{2.b1}$$

1．设 $u=u^{(0)}+\varepsilon R^{(1)}$ (2.2a)

因为$u$与$u^{(0)}$分别是下述柯西问题的解[1]，

$$\left.\begin{array}{l} u^2-(u_\infty^-+u_\infty^+)u+u_\infty^-u_\infty^+=\omega u_x-\varepsilon\omega u_{xx} \\ u(0)=\frac{1}{2}(u_\infty^-+u_\infty^+) \end{array}\right\} \tag{2.2b}$$

$$\left.\begin{array}{l} [u^{(0)}]^2-(u_\infty^-+u_\infty^+)u^{(0)}+u_\infty^-u_\infty^+=\omega u_x^{(0)} \\ u^{(0)}(0)=\frac{1}{2}(u_\infty^-+u_\infty^+) \end{array}\right\} \tag{2.2c}$$

(2.2b)—(2.2c)并整理，得：

$$\left.\begin{array}{l} R_x^{(1)}+PR^{(1)}=u_{xx} \\ R^{(1)}(0)=0 \end{array}\right\} \tag{2.2d}$$

其中 $P=\frac{1}{\omega}[u_\infty^-+u_\infty^+-u-u^{(0)}]$

2．设 $R^{(1)}=u^{(1)}+\varepsilon R^{(2)}$ (2.3a)

则 $u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2R^{(2)}$ (2.3b)

将(2.2a)代入(2.2)并整理，得：

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon R_{xx}^{(1)}=R_x^{(1)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}R^{(1)}-u_{xx}^{(0)}-\frac{\varepsilon}{\omega}[R^{(1)}]^2 \\ R^{(1)}(0)=0 \end{array}\right\} \tag{2.3c}$$

因为$u^{(1)}$是下述柯西问题的解[1]，

$$\left.\begin{array}{l} u_x^{(1)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}u^{(1)}=u_{xx}^{(0)} \\ u^{(1)}(0)=0 \end{array}\right\} \tag{2.3d}$$

(2.3c)～(2.3d)并整理，得：

$$\left.\begin{array}{l} R_x^{(2)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}R^{(2)}=R_{xx}^{(1)}+\frac{1}{\omega}[R^{(1)}]^2 \\ R^{(2)}(0)=0 \end{array}\right\} \tag{2.3e}$$

若记 $u=\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^iu^{(i)}+\varepsilon^3R^{(3)}$ (2.4a)

类似前面推导，有：

$$\left.\begin{array}{l} R_x^{(3)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}R^{(3)}=R_{xx}^{(2)}+\frac{1}{\omega}\{2u^{(1)}R^{(2)}+\varepsilon[R^{(2)}]^2\} \\ R^{(3)}(0)=0 \end{array}\right\} \tag{2.4b}$$

同理，若记 $u=\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^iu^{(i)}+\varepsilon^4R^{(4)}$ (2.5a)

则有：

$$\left.\begin{aligned}&R_x^{(4)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}R^{(4)}=R_{xx}^{(3)}+\frac{1}{\omega}P_3\\&R^{(4)}(0)=0\end{aligned}\right\}\tag{2.5b}$$

其中 $P_3=[u^{(2)}]^2+2[u^{(1)}+\varepsilon u^{(2)}]R^{(3)}+\varepsilon^2[R^{(3)}]^2$

3. 对上述的$R^{(j)}$ $(j=1,2,3,4)$，可以证明它们及其它们对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数. 为此先给出以下几个引理.

**引理1** 若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续可导，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，$A$、$B$都是常数，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$都存在，则$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

**引理2** 若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$都存在，则$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

**引理3** 若函数$P(x)$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=E<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=F>0$，$|f(x)|\leqslant D$，$E$、$F$、$D$都是常数，则方程$y'+P(x)y=f(x)$的一切解都在$(-\infty,+\infty)$上有界.

引理1、2、3都可用数学分析的方法证明，而且在教科书中作为习题出现的，故证明从略.

**引理4** $u(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的严格单调递减函数，且$\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=u_\infty^-$，$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=u_\infty^+$. 因而显然是有界函数[2].

**引理5** $u^{(0)}(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的严格单调递减函数，且$\lim\limits_{x\to-\infty}u^{(0)}(x)=u_\infty^-$，$\lim\limits_{x\to+\infty}u^{(0)}(x)=u_\infty^+$，当然是有界函数[1].

**引理6** $u^j(j=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数[1].

从$u,u^{(0)},u^{(j)}$ $(j=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$ 各自所满足的方程本身可证明(用递推法)：

**引理7** $u,u^{(0)},u^{(j)}(j=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$都关于$x$无穷多次可导.

由引理7，1，2很容易证明下述两个引理：

**引理8** $u$及$u^{(0)}$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

**引理9** $u^{(j)}(j=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

由引理4,5,8易证明：

**引理10** 关于柯西问题(2.2d)中的$P$，有：$P$及$P$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

4. 在上述引理的基础上，我们有下述几个定理.

**定理1** $R^{(1)}$及$R^{(1)}$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数.

**证明** 因为$R^{(1)}$是柯西问题(2.2d)的解，

即
$$\left.\begin{aligned}&R_x^{(1)}+PR^{(1)}=u_{xx}\\&R^{(1)}(0)=0\end{aligned}\right\}\tag{2.6a}$$

其中 $P=\frac{1}{\omega}[u_\infty^-+u_\infty^+-u-u^{(0)}]$显然是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

根据引理4及5，有：$\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=1>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-1<0$.

又因为根据引理8，$u_{xx}$有界。

所以由引理3，$R^{(1)}$是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数。

将(2.6a)中的微分方程变形，得：

$$R_x^{(1)}=-PR^{(1)}+u_{xx} \tag{2.6b}$$

根据引理8及10，由方程(2.6b)可以看出$R^{(1)}$对$x$的各阶导数都存在，或者说$R^{(1)}$对$x$无穷多次可导。于是有：

$$R_{xx}^{(1)}=-PR_x^{(1)}-P_xR^{(1)}+u_{xxx} \tag{2.6c}$$

因为$P$有界(引理10)，$R^{(1)}$有界(已证)，$u_{xx}$有界(引理8)；又有(2.6b)式；所以$R_x^{(1)}$有界。

利用(2.6c)式，因为$P$及$P_x$有界(引理10)，$R^{(1)}$及$R_x^{(1)}$有界(已证)，$u_{xxx}$有界(引理8)；所以$R_{xx}^{(1)}$有界。

将(2.6c)式两边求导，同样的方法又可证明$R_{xxx}^{(1)}$也是有界函数。

如此类推下去，即可证明$R^{(1)}$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数。定理证毕。

**定理2** $R^{(2)}$及$R^{(2)}$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数。

定理2 的证明除了用到定理1的结论外，证明方法与定理1的完全相同。

如此递推下去，我们又有：

**定理3** $R^{(3)}$及$R^{(3)}$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数。

**定理4** $R^{(4)}$及$R^{(4)}$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数。

定理1说明当$\varepsilon$趋于零时，$u$一致收敛于$u^{(0)}$ $(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u\rightrightarrows u^{(0)})$ 即当$\nu^2\gg 4\mu$时，KdVB方程行波解与所对应的Burgers 方程行波解在定量方面极类似。

定理1至定理4说明文献[1]中所得到直到三阶的渐近展开式可写为：

$$u=u^{(0)}+O(\varepsilon) \tag{2.7a}$$

$$u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+O(\varepsilon^2) \tag{2.7b}$$

$$u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+O(\varepsilon^3) \tag{2.7c}$$

$$u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\varepsilon^3u^{(3)}+O(\varepsilon^4) \tag{2.7d}$$

即当$\nu^2\gg 4\mu$时，这些渐近展开式都一致有效，且展开阶数越高，精确度也越高，或者说这些渐近展开式的截断误差都是小参数$\varepsilon$的比相应阶数高一阶的同阶量。

## 三、一般渐近展开式的误差估计

在文献[1]中，我们得到KdVB方程行波解的一般渐近展开式：

$$u=u^{(0)}+\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2u^{(2)}+\cdots+\varepsilon^nu^{(n)}+\cdots \tag{3.1a}$$

设

$$u=\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon^iu^{(i)}+\varepsilon^nR^{(n)} \tag{3.1b}$$

将(3.1b)代入问题(2.2b)并整理，得：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon R_{xx}^{(n)}=R_x^{(n)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}R^{(n)}-u_{xx}^{(n-1)}-\frac{1}{\omega}H_n-\frac{\varepsilon}{\omega}P_n\\&R^{(n)}(0)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.1c}$$

其中
$$H_n=\sum_{i=1}^{n-1}u^{(i)}u^{(n-i)}$$

$$P_n=\sum_{m=n+1}^{2n-2}\varepsilon^{m-n-1}\sum_{\substack{1<i<n-1\\1<m-i<n-1}}u^{(i)}u^{(m-i)}$$

$$+2\left[\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon^{i-1}u^{(i)}\right]R^{(n)}+\varepsilon^{n-1}[R^{(n)}]^2$$

设
$$R^{(n)}=u^{(n)}+\varepsilon R^{(n+1)} \tag{3.2a}$$
则
$$u=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u^{(i)}+\varepsilon^{n+1}R^{(n+1)} \tag{3.2b}$$

因为$u^{(n)}$是下述柯西问题的解[1]，

$$\left.\begin{aligned}&u_x^{(n)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}u^{(n)}=u_{xx}^{(n-1)}+\frac{1}{\omega}H_n\\&u^{(n)}(0)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.2c}$$

(3.1c)－(3.2c)并整理，得：

$$\left.\begin{aligned}&R_x^{(n+1)}+\frac{\exp[x]-1}{\exp[x]+1}R^{(n+1)}=R_{xx}^{(n)}+\frac{1}{\omega}P_n\\&R^{(n+1)}(0)=0\qquad\qquad(k=1,2,\cdots,n.)\end{aligned}\right\} \tag{3.2d}$$

假如$R^{(k)}$及$R^{(k)}$对$x$的各阶导数都有界，则利用定理1的证明方法，有：

**定理5** $R^{(n+1)}$及$R^{(n+1)}$对$x$的各阶导数都是$(-\infty,+\infty)$上的有界函数。

这说明 $$u=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u^{(i)}+O(\varepsilon^{n+1}) \tag{3.2e}$$

前面已证明：$R^{(j)}(j=1,2)$及$R^{(j)}$对$x$的各阶导数有界。

又证明了递推关系：$R^{(k)}(k=1,2,\cdots,n)$及$R^{(k)}$对$x$的各阶导数都是有界函数$\Rightarrow R^{(n+1)}$及$R^{(n+1)}$对$x$的各阶导数都是有界函数。

所以，$R^{(j)}(j=1,2,\cdots,n,\cdots)$及$R^{(j)}$对$x$的各阶导数都是有界函数。

至此，可以看到，当$\nu^2\gg4\mu$时，利用奇异摄动的理论和方法求KdVB方程行波解的过程中，所得到的各阶渐近展开式不仅一致有效，而且其截断误差都是比展开式阶数高一阶的小量。由此证明此奇异摄动问题由于非线性项的作用，可以用正则摄动来解决。

## 参 考 文 献

[1] 吕咸青，KdVB方程行波解的渐近分析，物理学报，41 (2)(1992)，177.

[2] 管克英、高歌，Burgers-K-dV混合型方程行波解的定性分析，中国科学(A辑)，(1) (1987)，64.

# A Quantitative Analysis of the Travelling Wave Solution of the KdV-Burgers Equation

Lu Xian-qing

*(Department of Mathematics and Physics, Shandong Education College, Jiana)*

**Abstract**

By using the methods of mathematics analysis, we investigate the travelling wave solution of the KdVB equation under the assumption $\nu^2 \gg 4\mu$. We prove that the travelling wave solution is quantitatively similar to the corresponding Burgers shock wave. Then we prove that the absolute error of the general asymptotic expansion is high order quantity of the small parameter $\varepsilon$.

**Key words** KdVB equation, asymptotis, travelling wave