应用数学和力学，第14卷 第11期（1993 年 11月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

简单波的解析解*

李 国 彬

（昆明师专，1992年 4 月 2 日收到）

摘　要

Riemann 于1860年[1]给出了简单波的一般解，可是欲将其中所含的一个任意函数的具体形式按边界条件或初始条件求出来，却难以实现，因而对具体问题就难以深入探讨。本文按拟线性偏微分方程的几何理论，十分方便地给出了由边界条件或初始条件所确定的简单波解析解，并用这些解讨论了有关流动的性质，且得到了若干新颖的结果。

关键词　简单波　解析解　间断

一、引　　言

众所周知，对于完全气体的一维等熵非定常流动，其控制方程为[2]

$$\begin{cases} \rho_t+u\rho_x+\rho u_x=0 & (1.1)\\ u_t+uu_x+\dfrac{c^2}{\rho}\rho_x=0 & (1.2)\end{cases}$$

其中　u 为流速，ρ为密度，$c=\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$ 为音速．对于活塞在半无限长管道中运动所引起的气体的流动，其边界条件为

$$u|_{x=\varphi(t)}=\dot{\varphi}(t) \tag{1.3}$$

其中　$\varphi(t)$为活塞在 t 时刻的位置，$\dot{\varphi}(t)=\dfrac{d\varphi}{dt}$ 为活塞运动的速度．对于仅在初始时刻有一扰动所引起的气体的流动，其初始条件为

$$u|_{t=0}=\psi(x) \tag{1.4}$$

其中　$\psi(x)$为初始时刻的速度分布．

1860年 Riemann 假定存在$\rho=\rho(u)$的流动，即存在简单波的流动，然后由方程(1.1)和(1.2)得到了一般解[1]、[3]

$$x=t[u\pm c(u)]+f(u) \tag{1.5}$$

式中　$f(u)$为速度的任意函数．十分明显，$f(u)$应该由边界条件或初始条件来确定，可是要找出其具体形式却并非易事．另外，正因为$f(u)$并没有直接反映出与边界条件或初始条件之间的关系，因此也就无法深入研究有关流动的特性．显然，若能按方程(1.1)和(1.2)以

* 钱伟长推荐．

及诸如(1.3)和(1.4)式所给出的边界条件及初始条件，求出其解析解，这将是件十分有意义的事情，可是这个问题长时期以来未能得到关注．本文按拟线性偏微分方程的几何理论，非常方便地得到了这些解析解，并用这些解讨论了有关流动的性质，且得到了若干新颖的结果．

二、简单波的解析解

定义 满足方程(1.1)和(1.2)的流动中，对于$\rho=\rho(u)$(即ρ仅为u的函数)的流动，称为**简单波**．

对于简单波，方程(1.1)和(1.2)可以写为

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho}{du}u_t+\left(u\dfrac{d\rho}{du}+\rho\right)u_x=0 & (2.1)\\[2ex] u_t+\left(u+\dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{d\rho}{du}\right)u_x=0 & (2.2)\end{cases}$$

由于所讨论的对象是非定常流动，即$u_t\neq 0$，为此应有

$$\begin{vmatrix}\dfrac{d\rho}{du} & u\dfrac{d\rho}{du}+\rho\\[2ex] 1 & u+\dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{d\rho}{du}\end{vmatrix}=0$$

即

$$\frac{c^2}{\rho}\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2-\rho=0$$

由此得

$$\frac{d\rho}{du}=\pm\frac{\rho}{c} \tag{2.3}$$

其中正负号分别对应于压缩波和稀疏波．

由于

$$c=\sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}$$

代入(2.3)式，令c_0为静止气体中的音速，积分后得：

对于压缩波

$$c=\frac{\gamma-1}{2}u+c_0 \tag{2.4}$$

对于稀疏波

$$c=-\frac{\gamma-1}{2}u+c_0 \tag{2.5}$$

把(2.3)，(2.4)和(2.5)式代入(2.1)或(2.2)式得：

对于压缩波

$$u_t+\left(\frac{\gamma+1}{2}u+c_0\right)u_x=0 \tag{2.6}$$

对于稀疏波

$$u_t+\left(\frac{\gamma+1}{2}u-c_0\right)u_x=0 \tag{2.7}$$

这就是简单波的运动方程。

按照拟线性偏微分方程的几何理论[4]，对应于方程(2.6)的特征方程为

$$\frac{dt}{ds}=1,\quad \frac{dx}{ds}=\frac{\gamma+1}{2}u+c_0,\quad \frac{du}{ds}=0$$

其解为

$$\begin{cases} t=s+Q & (2.8)\\ x=\left(\frac{\gamma+1}{2}R+c_0\right)s+T & (2.9)\\ u=R & (2.10)\end{cases}$$

其中 Q，R，T为积分常数。

为使边界条件(1.3)得以满足，令$s=0$时

$$t=\tau,\ x=\varphi(\tau),\ u=\dot{\varphi}(\tau)$$

则满足边界条件(1.3)的压缩简单波的解析解为

$$\begin{cases} t=s+\tau & (2.11)\\ x=\left[\frac{\gamma+1}{2}\dot{\varphi}(\tau)+c_0\right](t-\tau)+\varphi(\tau) & (2.12)\\ u=\dot{\varphi}(\tau) \qquad (\dot{\varphi}(\tau)>0) & (2.13)\end{cases}$$

同理，由方程(2.7)出发，满足边界条件(1.3)的稀疏简单波的解析解为

$$\begin{cases} t=s+\tau & (2.14)\\ x=\left[\frac{\gamma+1}{2}\dot{\varphi}(\tau)-c_0\right](t-\tau)+\varphi(\tau) & (2.15)\\ u=\dot{\varphi}(\tau) \qquad (\dot{\varphi}(\tau)<0) & (2.16)\end{cases}$$

同理，满足初始条件(1.4)的简单波解析解为：

对于压缩波

$$\begin{cases} t=s\\ x=\left[\frac{\gamma+1}{2}\psi(l)+c_0\right]t+l\\ u=\psi(l)\end{cases} \tag{2.17}$$

对于稀疏波

$$\begin{cases} t=s\\ x=\left[\frac{\gamma+1}{2}\psi(l)-c_0\right]t+l\\ u=\psi(l)\end{cases} \tag{2.18}$$

这样就找到了满足边界条件和初始条件的简单波的解析解，借助于这些解可以深入讨论有关流动的特性。

三、讨　　论

1. 活塞在半无限长管道中推进所引起的流动

(A)　(2.11)，(2.12)和(2.13)式表明，活塞在τ时刻其位置和速度分别为$\varphi(\tau)$和$\dot{\varphi}(\tau)$

时，活塞的推进速度 $\dot{\varphi}(\tau)$ 将以波的形式向前传播，其波速为 $\frac{\gamma+1}{2}\dot{\varphi}(\tau)+c_0$，即推进速度越大波速就越大。

(B) (2.12)和(2.13)式分别对x求偏导数得

$$\begin{cases} 1=\left[\frac{\gamma+1}{2}\ddot{\varphi}(\tau)(t-\tau)-\frac{\gamma-1}{2}\dot{\varphi}(\tau)-c_0\right]\tau_x & (3.1) \\ u_x=\ddot{\varphi}(\tau)\tau_x & (3.2) \end{cases}$$

(3.2)÷(3.1)得

$$u_x=\ddot{\varphi}(\tau)\Big/\left[\frac{\gamma+1}{2}\ddot{\varphi}(\tau)(t-\tau)-\frac{\gamma-1}{2}\dot{\varphi}(\tau)-c_0\right] \tag{3.3}$$

若有间断产生，则(3.3)式的分母必须为0，即

$$\frac{\gamma+1}{2}\ddot{\varphi}(\tau)(t-\tau)-\frac{\gamma-1}{2}\dot{\varphi}(\tau)-c_0=0$$

或者

$$t=\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\dot{\varphi}(\tau)+\frac{2c_0}{\gamma+1}\right]\Big/\ddot{\varphi}(\tau)+\tau \tag{3.4}$$

代入(2.12)式得

$$x=\left[\frac{\gamma+1}{2}\dot{\varphi}(\tau)+c_0\right]\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\dot{\varphi}(\tau)+\frac{2c_0}{\gamma+1}\right]\Big/\ddot{\varphi}(\tau)+\varphi(\tau) \tag{3.5}$$

(3.4)和(3.5)式分别表示间断或激波出现的时间和位置．由上述公式可以得到如下的结论：间断面或激波是由于活塞的加速推进而产生的，当活塞匀速推进时，即 $\ddot{\varphi}(\tau)\equiv 0$，无论推进速度有多大，均不能产生间断面或激波；活塞推进的加速度越大，对应的间断面或激波出现得越早，且离活塞越近；活塞的推进速度小于音速时也能产生间断面或激波．

2. 活塞在半无限长管道中抽出时所引起的流动

仿照前述的讨论，由(2.11)，(2.15)和(2.16)式可得

$$u_x=\ddot{\varphi}(\tau)\Big/\left[\frac{\gamma+1}{2}\ddot{\varphi}(\tau)(t-\tau)-\frac{\gamma-1}{2}\dot{\varphi}(\tau)+c_0\right] \tag{3.6}$$

由此，间断发生的时间和位置为

$$t=\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\dot{\varphi}(\tau)-\frac{2c_0}{\gamma+1}\right]\Big/\ddot{\varphi}(\tau)+\tau \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} x&=\left[\frac{\gamma+1}{2}\dot{\varphi}(\tau)-c_0\right](t-\tau)+\varphi(\tau) \\ &=\left[\frac{\gamma+1}{2}\dot{\varphi}(\tau)-c_0\right]\left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\dot{\varphi}(\tau)-\frac{2c_0}{\gamma+1}\right]\Big/\ddot{\varphi}(\tau)+\varphi(\tau) \end{aligned} \tag{3.8}$$

根据此二式，似乎当活塞加速抽出时稀疏波也会有间断或激波发生，但是仔细分析会发现，此时，(3.7)和(3.8)所表示的时间及位置已经超出了流动区的范围．当然要一般地证明这一论断尚有一定困难，但是对于活塞加速抽出时而速度恒小于音速的场合，很容易得到验证．事实上，此时$\ddot{\varphi}(\tau)<0$，$|\dot{\varphi}(\tau)|<c_0$且$\dot{\varphi}(\tau)<0$，

$$\begin{aligned} \varphi(t)&=\dot{\varphi}(t')(t-\tau)+\varphi(\tau)>-c_0(t-\tau)+\varphi(\tau) \\ &>\left[\frac{\gamma+1}{2}\dot{\varphi}(\tau)-c_0\right](t-\tau)+\varphi(\tau)=x \qquad (\tau\leqslant t'\leqslant t) \end{aligned}$$

这表明(3.7)和(3.8)式所表示的点(x, t)已经落到了流动区之外，从而间断或激波不可能发

生。

3. 初值问题

仿照前面的讨论，按(2.17)和(2.18)式，若初始的速度分布中存在$\dot{\psi}(l)<0$的部分，则间断面或激波出现的位置和时间为：

对于压缩波

$$\begin{cases} t=-\dfrac{2}{\gamma+1}\Big/\dot{\psi}(l) \\ x=-\left[\psi(l)+\dfrac{2c_0}{\gamma+1}\right]\Big/\dot{\psi}(l)+l \end{cases} \tag{3.9}$$

对于稀疏波

$$\begin{cases} t=-\dfrac{2}{\gamma+1}/\dot{\psi}(l) \\ x=-\left[\psi(l)-\dfrac{2c_0}{\gamma+1}\right]\dot{\psi}(l)+l \end{cases} \tag{3.10}$$

这些式子表明，只要初始的速度分布中有负梯度存在，无论压缩波还是稀疏波一定会发展成间断面或激波，并且梯度越小的部分所引起的间断面或激波出现得越晚。

由于给出了间断面或激波出现的时间和位置的解析表达式，便可以讨论间断面或激波的运动规律。这里不给予详细论述。

应该指出，上述的方法和结论完全适用于浅水波的场合。

参 考 文 献

[1] Riemann, B,.Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, *Abhandlungen der Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, **8**(43)(1860).

[2] Courant,R. and K. O. Friedrichs,《超声速流与冲击波》，科学出版社,北京(1986),26, 32.

[3] Landau and Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Beijing (1987), 379.

[4] Courant, R. and D. Hilbert, 《数学物理方法》，卷Ⅰ，科学出版社(1981), 49–54.

Analytic Solutions of Simple Waves

Li Guo-bin

(Teachers Training Institute of Kunming, Kunming)

Abstract

B. Riemann furnished the general solution of simple waves in 1860[1]. But it is difficult to find out the exact forms of the arbitrary function contained in the general solution which must satisfy boundary or initial conditions. For this reason it is inconvenient to probe into the character ristics of concrete problems. In this paper the analytic solutions of simple waves are afforded according to the geometric theory of quassi-linear partial differential equations, and they are determined with boundary or initial conditions. By using these solutions the specific properties of certain flows are discussed and novel results are obtained.

Key words simple waves, analytic solutions, discontinuity