应用数学和力学，第14卷 第11期（1993年 11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 正交异性半无限固支板条的弹性解*

林 逸 汉

（复旦大学应用力学系，1992年11月9日收到）

**摘 要**

正交异性半无限固支板条在表面为应力自由和在无穷远处受载时的弹性解的控制微分方程为 $\phi,_{yyyy}+(2+\delta_0)\phi,_{yyzz}+\phi,_{zzzz}=0$ $(\delta_0>-4)$. 基于文献[10]对$\delta_0>0$情形的工作，本文完成对各向同性材料 $\delta_0=0$ 和正交异性材料$0>\delta_0>-4$情形的讨论. 上述问题的解在边界位移数据给定情形的板理论的边界条件的合理提法方面有重要应用.

**关键词** 半无限正交异性板条 固端应力奇异性 广义柯西型奇异积分方程

## 一、引 言

我们在线弹性和平面应变条件下解半无限长，正交异性板条问题. 板条上、下表面为应力自由，一端固支，另一端分别施加单位大小的拉力，弯矩和剪力. 上述情形的各向同性情况曾由许多人加以研究，例如见[1，2，5，9，14]以及他们的参考文献. 积分变换是很有效的方法，[2]导出耦合的积分方程组. 根部应力奇异性可用[15，11]的方法进行分析，也可用奇异积分方程的理论完成. [9]通过考虑一各向同性无限长板条有刚性内含物的情况，导出了受拉伸力时的单个奇异积分方程. 我们对正交异性板条的拉伸，弯曲和剪切情形都导出了单个的Fredholm第一类积分方程，并且将其归结为广义的Cauchy型奇异积分方程，从而为根部应力的奇异性分析和有效的数值解法奠定了基础.

除开上述问题本身在线弹性理论里的重要性以外，半无限板条固支端应力分布函数在平面应变薄板的位移边界条件里有重要应用，参见[6，7，8]. 我们曾在[10]里讨论过上述问题，限于参数 $\delta_0>0$ 的情况. 本文将完成所有的正交异性情况，并由正交异性解推出各向同性解.

## 二、半无限固支板条的三个边值问题

平面应变正交异性板条的应力应变关系可表为

---

* 江福汝推荐.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

此处$a_{12}=a_{21}\left(\frac{\nu_{12}}{E_2}=\frac{\nu_{21}}{E_1}\right)$.对各向同性材料，有$E_1=E_2=E$，$\nu_{12}=\nu_{21}=\nu$和$G=E/2(1+\nu)$．由$\sigma_x=\phi_{,zz}$，$\sigma_z=\phi_{,xx}$和$\sigma_{xz}=-\phi_{,xz}$定义的应力函数$\phi$的控制微分方程为

$$\phi_{,yyyy}+(2+\delta_0)\phi_{,yyzz}+\phi_{,zzzz}=0 \tag{2.2}$$

此处

$$y=\frac{x}{\beta_0}\ ,\ \beta_0=\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4},$$

$$\delta_0=\frac{E}{G}-2(1+\nu),\ E=\sqrt{E_1E_2}\ ,\ \nu=\sqrt{\nu_{12}\nu_{21}} \tag{2.3}$$

这里符号“，”代表偏微分．$\delta_0=0$对应各向同性情形．由应变能的正定性，也就是(2.1)式的矩阵的正定性，得$\delta_0>-4$．板条占据区域$|z|\leqslant h$，$0\leqslant x<\infty$，两表面为应力自由：

$$z=\pm h:\ \sigma_z=0,\ \sigma_{xz}=0 \qquad (y>0) \tag{2.4}$$

在根部$x=0$处，板条为固支，即

$$y=0:\ u_x=0,\ u_z=0 \qquad (|z|\leqslant h) \tag{2.5}$$

拉伸情形的边值问题(BVP1) 以下列无穷远处的加载条件为特征：$\sigma_x\to1/2h$，$\sigma_{xz}\to0$，(当$y\to\infty$)；而弯曲情形的边值问题(BVP2)有：$\sigma_x\to\frac{3z}{2h^2}$，$\sigma_{xy}\to0$，(当$y\to\infty$)；剪切情形的边值问题(BPV3)有：$\sigma_x\to\frac{3xz}{2h^3}$，$\sigma_{xz}\to\frac{3}{4h}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)$，(当$y\to\infty$)．这三个边值问题的解可表为特解和残值解$\{\tilde{\phi},\ \tilde{u},\ \tilde{\sigma}\}$的和．当$y\to\infty$时，残值解$\tilde{\sigma}_x$和$\tilde{\sigma}_{xz}$都趋于零．分别用上标$E$，$B$和$F$来指示BVP1，2，3，在板条根部有：(当$y=0$)

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{u}_x^E=-u_0,\ \tilde{u}_z^E=\frac{\nu_{21}z}{2hE_1}=\frac{\nu z}{2hE} \\ &\tilde{u}_x^B=\omega_0 z,\ \tilde{u}_z^B=\frac{3\nu z^2}{4h^3E}-\omega_0, \\ &\tilde{u}_x^F=\frac{1}{4h^3}\left(\frac{1}{G}-\frac{\nu}{E}\right)z^3+\omega_0 z,\ \tilde{u}_z^F=-w_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

这里 $u_0$，$w_0$和$\omega_0$为刚体位移(积分常数)．由[12]知，当$y\to\infty(x\to\infty)$时，$\{\tilde{u},\ \tilde{\sigma}\}=O(\exp[-\alpha x/h])$，$\alpha$为某正常数，有$O(1)$量级．以下，我们将致力于寻求上述三个边值问题的残值解，并为方便起见，略去其记号“～”，仍称为边值问题BVP1，BVP2和BVP3．

## 三、拉伸情形的边值问题解

在[10]里，通过使用余弦Fourier变换的方法，BVP1归结为一个第一类Fredholm

积分方程:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h K(z;\ t)\tau(t)\,dt=-\frac{\nu}{4h\beta_0} \tag{3.1}$$

其中$\tau(z)$为固支端的残值剪应力，而残值正应力为

$$\sigma(z)=-\frac{2}{\pi}\beta_0\int_0^h\{\nu G_{1,zz}+G_{2,zz}\}_{y=0}\tau(t)\,dt \tag{3.2}$$

在那里我们假定$\delta_0>0$因而参数

$$\delta=\left[1+\frac{\delta_0}{2}+\sqrt{\left(1+\frac{\delta_0}{2}\right)^2-1}\,\right]^{1/2}>1 \tag{3.3}$$

积分核$K$为无穷积分形式(由 Fourier 逆变换导致)，可分解为$\int_0^\eta+\int_\eta^\infty$，$\eta$为一很大的正数. $\int_\eta^\infty$仅保留其渐近展开的主部，则(3.1)可写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^h\Big\{\frac{\lambda_1}{t-z}+\frac{\lambda_2}{t+z}+\frac{\lambda_3}{2h-t-z}+\frac{\lambda_4}{h-z+\delta^2(h-t)}\\+\frac{\lambda_5}{\delta^2(h-z)+h-t}\Big\}\tau(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_0^h K_\eta(z;\ t)\tau(t)\,dt\\=-\frac{\nu}{4h\beta_0}+O(\exp[-\eta h/\delta])\end{aligned} \tag{3.4}$$

这里 $\lambda_1$，…，$\lambda_5$为常数，独立于$\eta$. 而非奇异核为

$$K_\eta(z;\ t)=\nu K_{1\eta}+K_{2\eta}+\frac{\nu\delta^2}{\delta^4-1}\sum_{i=1}^{8}\alpha_i f_{iR}+\frac{1}{\delta^4-1}\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i f_{iR}+\delta^4\sum_{i=5}^{8}\alpha_i f_{iR}\right) \tag{3.5}$$

(3.5)式右端前二项，$\nu K_{1\eta}+K_{2\eta}$贡献自积分$\int_0^\eta$，而右端其余部分来自$\int_\eta^\infty$的渐近展开的主部(奇异核也来自它). $K_{1\eta}(z;\ t)$和$K_{2\eta}(z;\ t)$分段表述为($j=1$，2)

$$K_{j\eta}(z;t)=\begin{cases}K_{j\eta_1}(z;\ t) & (0\leqslant t\leqslant z)\\ K_{j\eta_2}(z;\ t) & (z\leqslant t\leqslant h)\end{cases} \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned}K_{1\eta k}(z;\ t)&=-\frac{\delta^2}{\delta^4-1}\left\{\int_0^\eta\frac{A_k(\delta)}{\Delta(\delta)}\,ds+\nu\int_0^\eta\frac{B_k(\delta)}{\Delta(\delta)}\,ds\right\}\\K_{2\eta k}(z;\ t)&=-\frac{1}{\delta^4-1}\left\{\int_0^\eta\frac{C_k(\delta)}{\Delta(\delta)}\,ds+\nu\int_0^\eta\frac{D_k(\delta)}{\Delta(\delta)}\,ds\right\}\end{aligned} \tag{3.7}$$

详细表达式参见[10]. 以上公式适用于$\delta_0>0$($\delta>1$)的情形. 现在我们考虑$\delta_0=0$($\delta=1$)，即各向同性情形. 方法是在上述公式里让$\delta\to1$. 易见$\Delta(\delta)$有下列在$\delta=1$处的 Taylor 展开: $\Delta(\delta)=2(1-\delta)H+o(1-\delta)$，其中

$$H=hs+\sinh(hs)\cosh(hs) \tag{3.8}$$

于是当$\delta\to 1$时有

$$\left.\begin{aligned} K_{1\eta k}&=\frac{1}{16}\left\{\int_0^\eta \frac{A''_k(1)}{H}ds+\nu\int_0^\eta \frac{B''_k(1)}{H}ds\right\} \\ K_{2\eta k}&=\frac{1}{16}\left\{\int_0^\eta \frac{C''_k(1)}{H}ds+\nu\int_0^\eta \frac{D''_k(1)}{H}ds\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

这里"$'$"代表对$\delta$求偏导数。这里限于篇幅我们略去$A''_k(1)$，…等的详细表达式。非奇异核的其余部分和奇异核均来自下列积分的渐近展开式的主部：

$$\frac{1}{16}\int_\eta^\infty \{C''_k(1)+\nu[A''_k(1)+D''_k(1)]+\nu^2B''_k(1)\}\frac{ds}{H} \tag{3.10}$$

将$H$，$A''_1(1)$等当$s\to\infty$时的渐近表达式代入上式，略去$O(\eta^2e^{-h\eta})$量级的量，并分离奇异和非奇异部分，则得到下列形式的奇异积分方程：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^h\left\{\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4}\frac{1}{t-z}+\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4}\frac{1}{t+z}\right. \\ &\quad+\frac{(3-6\nu-\nu^2)}{4}\frac{1}{2h-t-z}+\frac{3}{2}(1+\nu^2)\frac{h-z}{(2h-t-z)^2} \\ &\quad\left.-(1+\nu)^2\frac{(h-z)^2}{(2h-t-z)^3}\right\}\tau(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^hK_\eta(z,\ t)\tau(t)dt \\ &\quad=-\frac{\nu}{4h\beta_0}+O(\eta^2e^{-\eta h}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

此处非奇异核为

$$K_\eta(z,\ t)=\nu K_{1\eta}+K_{2\eta}+c+\nu d+\nu^2b+(1+\nu)^2a \tag{3.12}$$

其中右端前二项的分段表达式见(3.9)，而右端其余部分分别对应(3.10)式各项的非奇异成分．具体表式为：

$$\left.\begin{aligned} c&=f_1/2+f_2/2+\left[\frac{1}{2}+\eta(h-z)\right]f_3+(h-z)f_4 \\ d&=[-1+\eta(t-z)]f_3+(t-z)f_4 \\ b&=-\frac{f_1}{2}-\frac{f_2}{2}+\left[\frac{1}{2}+\eta(t-h)\right]f_3+(t-h)f_4 \\ a&=\mp\frac{\eta}{4}\exp[-\eta|z-t|]+\frac{f_1}{4}+\frac{\eta}{4}\exp[-\eta(z+t)] \\ &\quad+\frac{f_2}{4}+\left[\frac{\eta(z-t)}{4}+\frac{\eta^2}{2}(h-z)(h-t)\right]f_3 \\ &\quad+\left[\frac{z-t}{4}+\eta(h-z)(h-t)\right]f_4+(h-z)(h-t)f_5 \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

此处

$$\left.\begin{aligned} f_1&=\frac{\exp[-\eta|z-t|]-1}{t-z},\quad f_2=\frac{\exp[-\eta(z+t)]-1}{z+t} \\ f_3&=\frac{\exp[-\eta(2h-t-z)]-1}{2h-t-z} \\ f_4&=\frac{\exp[-\eta(2h-t-z)]-1+\eta(2h-t-z)}{(2h-t-z)^2} \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

$$f_6=\left\{\exp[-\eta(2h-t-z)]-1+\eta(2h-t-z)-\frac{\eta^2}{2}(2h-t-z)^2\right\}/(2h-t-z)^3$$

(3.13)式中 $a$ 的表达式的第一项当 $t<z$ 时取负号，当 $t\geqslant z$ 时取正号. 方程(3.11)的奇异部分是和[9]一致的. 按照[3, 4]，固支端角点处应力奇异性指数 $\beta\left(\text{即因子}\frac{1}{(h-t)^\beta}\text{ 里的 }\beta\right)$的控制方程为

$$\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4}\cos\pi\beta+\frac{\nu^2+6\nu-3}{4}+\frac{(1+\nu)^2}{2}\beta(\beta-2)=0 \tag{3.15}$$

文[10]对 $\delta>1$ 情形得到的相应方程为

$$\lambda_1\cos\pi\beta-\lambda_3-\lambda_4\delta^{-2+2\beta}-\lambda_5\delta^{-2\beta}=0 \tag{3.16}$$

易见当 $\delta\to1$ 时方程(3.16)趋于(3.15). 相应地，在求 $\sigma(z)$ 的公式(3.2)里，当 $\delta\to1$ 时有

$$\left.\begin{aligned}G_{1,zz}|_{y=0}&=\frac{\delta^2}{\delta^4-1}\int_0^\infty\frac{B_k(\delta)}{\Delta(\delta)}ds\to\frac{-1}{16}\int_0^\infty\frac{B_k''(1)}{H}ds\\G_{2,zz}|_{y=0}&=\frac{1}{\delta^4-1}\int_0^\infty\frac{D_k(\delta)}{\Delta(\delta)}ds\to\frac{-1}{16}\int_0^\infty\frac{D_k''(1)}{H}ds\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

以上的分析表明，当参数 $\delta_0>0\,(\delta>1)$ 时，我们使用积分方程(3.4)和超越方程(3.16)，当参数 $\delta_0=0\,(\delta=1)$ 时，使用(3.11)和(3.15). 当 $-4<\delta_0<0$ 时，由(3.3) $\delta$ 为一模为1的复数:

$$\delta=\left[1+\frac{\delta_0}{2}+i\sqrt{1-\left(1+\frac{\delta_0}{2}\right)^2}\right]^{1/2}=\delta_1+i\delta_2 \tag{3.18}$$

其中

$$\delta_1>0,\ \delta_2>0,\ \delta_1^2+\delta_2^2=1 \tag{3.19}$$

对这种情形，$\delta>1$ 时的公式(3.4)和(3.16)仍适用. 事实上在积分方程(3.4)的推导过程中，在引进渐近展开之前的所有表达式对 $\delta\neq1$ 都适用. 再由 $\delta^*=1/\delta$（*表示共轭），容易说明 $\delta^2/(\delta^4-1)$，$A_k(\delta)/\Delta(\delta)$ 和 $B_k(\delta)/\Delta(\delta)$ 都为纯虚数，因而 $K_{1\eta k}$ 为实数，类似地 $K_{2\eta k}$ 也为实数. 也即由积分 $\int_0^\eta$ 贡献的那部分非奇异积分核为实数. 详细的计算表明由条件 $\delta>1$ 导出的渐近表达式仍适用于 $\delta$ 为复数的情形. 例如,

$$\begin{aligned}\Delta(\delta)&=\frac{1-\delta^2}{4}\exp[hs(2\delta_1)][1+O(\exp[-2hs\delta_1)]\\&=\frac{1-\delta^2}{4}\exp\left[hs\left(\delta+\frac{1}{\delta}\right)\right]\left[1+O\left(\exp\left[\frac{-2hs}{\delta}\right]\right)\right].\end{aligned}$$

这样，积分 $\int_\eta^\infty$ 的渐近展开式的主部仍有原来的形式. 容易说明 $\lambda_1=\lambda_2$，$\lambda_3$ 为实数，而

$$\frac{\lambda_4}{h-z+\delta^2(h-t)}+\frac{\lambda_5}{\delta^2(h-z)+h-t}$$

也为实数. 所以，积分核奇异部分为实数. 进一步的考察表明由渐近主部贡献的非奇异项

$$\frac{\nu\delta^2}{\delta^4-1}\sum_{i=1}^8\alpha_if_{iR}+\frac{1}{\delta^4-1}\left(\sum_{i=1}^4\alpha_if_{iR}+\delta^4\sum_{i=5}^8\alpha_if_{iR}\right)$$

也为实数. 这里因为

$$\alpha_1^*=\alpha_2^*=-\alpha_5=-\alpha_6,\ \alpha_3^*=-\alpha_7,\ \alpha_4^*=-\alpha_8/\delta^2,$$
$$f_{1R}^*=f_{5R},\ f_{2R}^*=f_{6R},\ f_{3R}^*=f_{7R},\ f_{4R}^*=\delta^2 f_{8R}. \tag{3.20}$$

这样，奇异积分方程(3.4)的各项的适当结合都为实数，也就是说，适当地编制程序，我们可以在实数域上解此方程．对$\delta$为复数的奇异积分方程(3.4)应用奇异方程的一般理论仍能得到(3.16)．此时，$\lambda_1$和$\lambda_3$为实数，$\lambda_4^*=\lambda_5/\delta^2$以及$\lambda_4\delta^{2\beta-2}+\lambda_5\delta^{-2\beta}$为实数(若$\beta$为实数)，也即超越方程的左端为实函数．

以上我们完成了对参数$\delta_0>-1$的BVP1边值问题的所有情况的讨论．正交异性和各向同性材料的一些数值计算结果参见[10]．

## 四、弯曲和剪切情形的边值问题解

文[13]处理了$\delta_0>0(\delta>1)$时的弯曲和剪切情形的边值问题BVP2和BVP3．和(3.1)对应的 Fredholm 第一类积分方程为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h K(z;\ t)\tau(t)dt=F(z) \tag{4.1}$$

在弯曲情形，$F(z)=-\dfrac{3\nu z}{4\beta_0 h^3}$；而在剪切情形

$$F(z)=\frac{3}{4\pi h^3}\left(\frac{E}{G}-\nu\right)\int_0^h L[G_1]\,|_{y=0}t^2dt \tag{4.2}$$

其中$L[\cdots]=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\nu\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)[\cdots]$．而固支端的残值正应力则为

$$\sigma(z)=\frac{-2}{\pi}\beta_0E\int_0^h G_{0,zz}\,|_{y=0}\tilde{u}_x''(t)dt-\frac{2}{\pi}\beta_0\int_0^h\{\nu G_{1,zz}+G_{2,zz}\}\,|_{y=0}\tau(t)dt \tag{4.3}$$

其中$\tilde{u}_x$由(2.6)给出．和BVP1边值问题一样，(4.1)可归结为一个广义的Cauchy型奇异积分方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^h\Big\{\frac{\lambda_1}{t-z}+\frac{\lambda_2}{t+z}+\frac{\lambda_3}{2h-t-z}+\frac{\lambda_4}{h-z+\delta^2(h-t)}\\+\frac{\lambda_5}{\delta^2(h-z)+h-t}\Big\}\cdot\tau(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^h K_\eta(z;\ t)\tau(t)dt\\=F(z)+O(\exp[-\eta h/\delta])\end{aligned} \tag{4.4}$$

这里$\lambda_i$为独立于$\eta$的常数，在[13]里给出．(3.5)，(3.6)和(3.7)的公式仍适用，但$\Delta(\delta)$，$A_k(\delta)$等表达式不同．类似地，让$\delta_0\to0(\delta\to1)$导出各向同性的有关公式．取代(3.8)式的是

$$H=\sinh(hs)\cosh(hs)-hs \tag{4.5}$$

(3.9)和(3.10)仍为正确，但$A_k''(1)$等表达式不同，此处限于篇幅予以省略．通过类似的运算，积分方程(4.1)变成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h\Big\{\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4}\cdot\frac{1}{t-z}-\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4}\cdot\frac{1}{t+z}$$
$$+\frac{3-6\nu-\nu^2}{4}\cdot\frac{1}{2h-t-z}+\frac{3}{2}(1+\nu)^2\cdot\frac{h-z}{(2h-z-t)^2}$$

$$-(1+\nu)^2\frac{(h-z)^2}{(2h-z-t)^3}\Big\}\tau(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^h K_\eta(z,t)\tau(t)dt$$
$$=F(z)+O(\eta^2\exp[-\eta h]) \tag{4.6}$$

(3.12)式仍正确，而(3.13)应作如下修改：所有含 $f_2$ 项的系数都改变符号：$\alpha$ 的表达式里项$\frac{\eta}{4}\exp[-\eta(z+t)]$也应改变符号．$f_1$，…，$f_5$的定义仍如(3.14)．有关奇异性指数的讨论导致和(3.15)完全相同的方程．有关方程(3.16)和(3.17)的讨论仍旧正确．在(4.3)式残值正应力的公式里，对弯曲情形，右端第一项不出现，而对剪切情形，此项可通过分部积分将被积函数变为由$G_{1,zz}|_{y=0}$表出。有关$-4<\delta_0<0$的情形的讨论仍和拉伸情形一样，只是(3.5)式右端第三、四项里，$\alpha_2=-\alpha_1$，$\alpha_6=-\alpha_5$($f_{iR}$和$\alpha_1$，$\alpha_3$，$\alpha_4$，$\alpha_5$，$\alpha_7$仍和拉伸情形相同)．

以上我们完成了对参数$\delta_0>-4$的BVP2和BVP3的所有情形的讨论．正交异性和各向同性材料的一些数估计算结果参见[13]．

## 参 考 文 献


[1] Adams, G. G. and D. B. Bogy, *Int. J. Solids Struct.*12(1976), 239—249.

[2] Bogy, D. G., *J. Appl. Math. phys.* (ZAMP), 26(1975), 749—769.

[3] Erdogan, F., Complex Function Technique, in Treatise on Continuum physics (A. C. Eringen Ed.), Academic, New York, 1972, ch. 3.

[4] Erdogan, F., G. D. Gupta ana T. S. Cook, Numerical Solution of Singular Integral Equations, Methods of Analysis and Solutions to Crach problems(G. C. Sih, Ed.), Noordoff, (1972), ch. 7.

[5] Gregory, R. D. and I. Gladwell, *J. Elasticity*, 12(1982), 317—343.

[6] Gregory, R. D. and F. Y. M. Wan, *J. Elasticity*, 14(1984), 27—64.

[7] Gregory, R. D. and F. Y. M.Wan, *Int J. Solids Struct.*, 21(1985), 1005—1024.

[8] Gregory, R. D. and F. Y. M. Wan, *J. Appl. Mech.*, 55(1988), 551—59.

[9] Gupta, G. D., *J. Appl. Mech.*, 40(1973), 948—954.

[10] Lin, Y. H. and F. Y. M. Wan, *Stud. Appl. Math.*, 82(1990). 217—244.

[11] Lin, Y. H., A Mathematical Theory of Elastic Orthotropic plates in Plane Strain and Axisymmetric Deformations, Ph. D. Dissertation, Institute of Applied Mathematics. University of British Columbia, Vancourer, B.C.(1987).

[12] Lin, Y. H. and F. Y. M. Wan, *Stud. Appl. Math.*, 79(1988), 93—125.

[13] Lin, Y. H. and F. Y. M. Wan, *Computers & Structures*, 35(1990), 349—359.

[14] Vorovich, I. I. and V. V. Kopasenko, *J. Appl. Math.Mech.* (PMM), 30(1966), 109—115.

[15] Williams, M. L., *J. Appl. Mech.*, 74(1952), 526—528.

# Elastostatic Solutions for Semi-Infinite Orthotropic Cantilevered Strips

Lin Yi-han

*(Department of Appliend Mechanics, Fudan University, Shanghai)*

**Abstract**

The elastostatic solutions of semi-infinite orthotropic cantilevered strips with traction free edges and loading at infinity are governed by the differential equation $\phi_{,yyyy}+(2+\delta_0)\phi_{,yyzz}+\phi_{,zzzz}=0$ with $\delta_0>-4$. Based on the work of [1] for $\delta_0>0$ case, this paper completes the case $\delta_0=0$ for isotropic materials and the case $0>\delta_0>-4$ for orthotropic materials. The solutions of the above problems have important application in the properly formulated boundary conditions of plate theories for prescribed displacement edge data.

**Key words** Semi-infinite orthotropic strip, stress singularity at the clamped end, generalized Cauchy type singular integral equation